第 2 章　力学過程

2.1　定式化 [1]

本節では、asuca の力学過程の定式化について述べる。はじめに第 2.1.1 項では直交直線座標の基礎方程式系を導出する。次に第 2.1.2 項では、数値計算を行う任意の座標に対応できるよう一般座標の方程式系への変換を行い、第 2.1.3 項では、計算効率および開発効率の観点から鉛直座標のとり方について制限を設ける。第 2.1.4 項では、計算誤差を小さく抑える目的で、方程式系に基本場を導入する。第 2.1.5 項では、導出した方程式系を用いた asuca の計算手順の概略を示す。

2.1.1　基礎方程式系

asuca で用いる支配方程式は完全圧縮の非静力学方程式系であり、質量、運動量、温位の保存則と状態方程式から構成される。予報変数は、密度、運動量、温位とし、状態方程式から気圧を診断する。本項では、直交直線座標の基礎方程式系の定式化について説明する。以下では、まず定式化の考え方と表記における注意点を示しておく。なお、本節の記述では、アインシュタインの規約を用い、同じ添字が同じ項の上下に現れた場合はその添字について空間方向に和を取る。

保存則は、ある領域内の物理量 Φ の時間変化が、領域表面から流出入するフラックスと領域内での生成・消滅によって決まることから、

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \Phi dV = -\int_S n_i F^i dS + \int_V Q_\Phi dV \qquad (2.1.1)$$

と表される。ここで、F^i は i 方向のフラックス、Q_Φ は生成・消滅を表し、n_i はこの領域の表面に垂直な単位ベクトル、$\int_V dV$ は領域の体積積分、$\int_S dS$ は領域を囲む閉曲面の表面積分である。u^i を i 方向の流速として、

$$F^i = \Phi u^i + \tilde{f}^i_\Phi \qquad (2.1.2)$$

のように流速 u^i によるフラックスと u^i によらないフラックス $\tilde{f}^i_\Phi$ に分けて考えると、(2.1.1) 式は、ガウスの定理により

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi u^i}{\partial x^i} - \frac{\partial \tilde{f}^i_\Phi}{\partial x^i} + Q_\Phi \qquad (2.1.3)$$

と書ける。(2.1.3) 式の右辺第 1 項はフラックスの発散の形で表されており、この形式はフラックス形式と呼ばれる [2]。この形式は、数値計算において保存性を保持しやすいため、asuca の方程式系はフラックス形式で記述する。

本項では、大気が乾燥大気 (d)、水蒸気 (v)、雲水 (c)、雨 (r)、雲氷 (i)、雪 (s)、あられ (g) といった成分によって構成されていることを考慮して定式化を進める。また、大気の各成分の密度の和を全密度と定義する。なお、ここでの定式化は Ooyama (2001) を参考にした。

時間を t、3 次元空間 (x, y, z) における大気速度を (u, v, w)、密度 ρ、温位 θ、気圧 p、重力加速度を g、全密度と水物質の密度の比を q とする。また、大気を前述の各成分に分けて記述する場合は、下付き添字 α で区別し、各成分の和をとる場合は $\sum_\alpha$ で表す。また、大気速度 (u, v, w) と降水粒子の速度（落下速度）の違いを考慮し、大気の各成分によってそれぞれの速度 $(u_\alpha, v_\alpha, w_\alpha)$ を定義する。

(1)　連続の式

各大気成分の連続の式

大気の各成分毎の質量の保存は次のように表される。

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho_\alpha u^i_\alpha\right) = \left(Q_\rho\right)_\alpha - \frac{\partial}{\partial x^i}(\tilde{f}_\rho)^i_\alpha \qquad (2.1.4)$$

ここで $(Q_\rho)_\alpha$ は大気の各成分の生成・消滅を表す項であり、$(Q_\rho)_d = 0$ である（乾燥大気は生成・消滅しない）。$(\tilde{f}_\rho)^i_\alpha$ は大気の各成分の u^i_α によらない i 方向のフラックスであり、具体的には、地表面からの水蒸気の供給を想定する（つまり、$\alpha = v$ 以外は $(\tilde{f}_\rho)^i_\alpha = 0$）。

降水粒子の落下

降水粒子は、大気中を落下する液体または固体の水物質とする。ここで、降水粒子の速度 $u_\alpha, v_\alpha, w_\alpha (\alpha = r, s, g)$ を大気の速度 u, v, w とそこからの相対的な落下速度 $(u_t)_\alpha, (v_t)_\alpha, (w_t)_\alpha$ に分けて、

$$\begin{aligned} u_\alpha &= u + (u_t)_\alpha \\ v_\alpha &= v + (v_t)_\alpha \\ w_\alpha &= w + (w_t)_\alpha \end{aligned} \qquad (2.1.5)$$

と表し、u, v, w を予報変数とする。一方、相対的な落下速度については、湿潤大気に対する降水粒子の密度の比の関数として診断的に与える [3]。(2.1.5) 式により (2.1.4) 式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}(\rho_\alpha u^i) + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho_\alpha (u_t)^i_\alpha\right) \\ = (Q_\rho)_\alpha - \frac{\partial}{\partial x^i}(\tilde{f}_\rho)^i_\alpha \end{aligned} \qquad (2.1.6)$$

---

[1] 河野 耕平、松林 健吾、石田 純一、室井 ちあし

[2] あるいは発散型、保存型と呼ばれる。一方、$\Phi = \rho\phi$ として、

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho\phi u^i\right) = \rho\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \underline{u^i \frac{\partial \phi}{\partial x^i}}\right) + \phi\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho u^i\right)\right)$$

のように変形した形式は、下線部の項の形から移流形式（あるいは勾配型、非保存型）と呼ばれる。

[3] 雲物理過程において診断する。実際には落下の速さ（スカラー量）が診断的に求まり、向きは重力方向となる。

となり、密度の移流は、大気速度によるものと大気に相対的な降水粒子の落下速度によるものからなる。

全密度の連続の式

乾燥空気と水物質をあわせた全密度を $\rho = \sum \rho_\alpha$ とすると、全ての成分について (2.1.4) 式の和を取ることにより、連続の式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}(\rho u^i) + \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho_\alpha (u_t)^i_\alpha\right) = \sum_\alpha (Q_\rho)_\alpha - \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x^i}(\tilde{f}_\rho)^i_\alpha \equiv Q_\rho - \frac{\partial}{\partial x^i}\tilde{f}^i_\rho \tag{2.1.7}$$

全密度の時間変化は、大気速度 u, v, w による移流、降水粒子 ($\alpha = r, s, g$) の落下速度 $(u_t)_\alpha, (v_t)_\alpha, (w_t)_\alpha$ による移流、生成・消滅 Q_ρ（$= 0$ である [4]）および大気速度・落下速度によらないフラックスによる時間変化（地表面からの水蒸気供給）$\partial \tilde{f}^i_\rho / \partial x^i$ によって決まる。

(2) 運動量保存の式

各大気成分の運動量保存の式

大気の各成分毎の運動量の保存は次のように表される。乾燥大気 (d)、水蒸気 (v) 以外は $p_\alpha = 0$ である。

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_\alpha u^i_\alpha\right) + \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\rho_\alpha u^i_\alpha u^j_\alpha\right) + \frac{\partial p_\alpha}{\partial x^i} + \rho_\alpha g^i + 2\epsilon^{ijk}\Omega_j \rho_\alpha u_{\alpha k} = (M_{\rho u})^i_\alpha + u^i_\alpha (Q_\rho)_\alpha + (Q_{\rho u})^i_\alpha - \frac{\partial}{\partial x^j}(\tilde{f}_{\rho u})^{ij}_\alpha \tag{2.1.8}$$

大気各成分の運動量の時間変化は、$(u_\alpha, v_\alpha, w_\alpha)$ による移流、気圧傾度力と重力、コリオリ力（Ω は地球自転の角速度、ϵ はレビ・チビタの記号を表す)、さらに以下の

- $(M_{\rho u})^i_\alpha$: 大気の各成分が他の成分から受ける力（たとえば、降水粒子が周囲の大気をひきずりおろす力）
- $u^i_\alpha (Q_\rho)_\alpha + (Q_{\rho u})^i_\alpha$: 成分 α の質量の生成・消滅に伴う運動量の生成・消滅 $u^i_\alpha (Q_\rho)_\alpha$ とそれ以外による運動量の生成・消滅 $(Q_{\rho u})^i_\alpha$
- $\dfrac{\partial}{\partial x^j}(\tilde{f}_{\rho u})^{ij}_\alpha$: u^i_α によらないフラックスによる時間変化（地表面との運動量交換）

によって決まる。

降水粒子の落下

降水粒子は瞬時に終端速度に達すると見做して、ラグランジュ微分はゼロとすると、

$$\frac{d(u_t)^i_\alpha}{dt} = \frac{\partial (u_t)^i_\alpha}{\partial t} + u^j_\alpha \frac{\partial (u_t)^i_\alpha}{\partial x^j} = 0 \tag{2.1.9}$$

と書ける。

(2.1.8) 式の時間変化項と移流項は、(2.1.4) 式、(2.1.5) 式、(2.1.9) 式より、

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(\rho_\alpha u^i_\alpha) + \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\rho_\alpha u^i_\alpha u^j_\alpha\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(\rho_\alpha u^i) + \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\rho_\alpha u^i u^j_\alpha\right) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_\alpha (u_t)^i_\alpha\right) + \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\rho_\alpha (u_t)^i_\alpha u^j_\alpha\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(\rho_\alpha u^i) + \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\rho_\alpha u^i u^j\right) + \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\rho_\alpha u^i (u_t)^j_\alpha\right) \\
&\quad + (u_t)^i_\alpha (Q_\rho)_\alpha
\end{aligned} \tag{2.1.10}$$

と変形できる [5]。

以上から、(2.1.8) 式は、

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(\rho_\alpha u^i) + \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\rho_\alpha u^i u^j\right) + \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\rho_\alpha u^i (u_t)^j_\alpha\right) \\
&\quad + \frac{\partial p_\alpha}{\partial x^i} + \rho_\alpha g^i \\
&\quad + 2\epsilon^{ijk}\Omega_j \rho_\alpha u_k + 2\epsilon^{ijk}\Omega_j \rho_\alpha (u_t)_{\alpha k} \\
&= (M_{\rho u})^i_\alpha + u^i (Q_\rho)_\alpha + (Q_{\rho u})^i_\alpha - \frac{\partial}{\partial x^j}(\tilde{f}_{\rho u})^{ij}_\alpha
\end{aligned} \tag{2.1.11}$$

となり、運動量の移流は、密度の場合と同様に大気速度によるものと大気に相対的な降水粒子の落下速度によるものからなる。

全密度を用いた運動量保存の式

乾燥空気と水物質をあわせた全密度を ρ、全気圧を $p = \sum p_\alpha = p_d + p_v$ とすると、全ての成分について (2.1.11) 式の和を取ることにより、運動量保存の式は次式になる。

[4] ただし、(6) の最後に述べるように、数値計算上は $\sum (Q_\rho)_\alpha$ がゼロにならない場合があるため、以降もこの項を明示的に扱う。

[5] 途中、(2.1.4) 式と (2.1.9) 式から導出される以下の関係式を用いた。

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_\alpha (u_t)^i_\alpha\right) + \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\rho_\alpha (u_t)^i_\alpha u^j_\alpha\right) \\
&= \rho_\alpha \left\{\frac{\partial (u_t)^i_\alpha}{\partial t} + u^j_\alpha \frac{\partial (u_t)^i_\alpha}{\partial x^j}\right\} \\
&\quad + (u_t)^i_\alpha \left\{\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\rho_\alpha u^j_\alpha\right)\right\} \\
&= (u_t)^i_\alpha (Q_\rho)_\alpha - (u_t)^i_\alpha \frac{\partial}{\partial x^j}(\tilde{f}_\rho)^j_\alpha
\end{aligned}$$

ここで、$\alpha \neq v$ のときは $(\tilde{f}_\rho)^j_\alpha = 0$、$\alpha = v$ のときは $(u_t)^i_\alpha = 0$ なので、$(u_t)^i_\alpha \dfrac{\partial}{\partial x^j}(\tilde{f}_\rho)^j_\alpha = 0$ となる。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(\rho u^i) + \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\rho u^i u^j\right) + \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\rho_\alpha u^i (u_t)^j_\alpha\right) \\
&\quad + \frac{\partial p}{\partial x^i} + \rho g^i \\
&\quad + 2\epsilon^{ijk}\Omega_j \rho u_k + \sum_\alpha 2\epsilon^{ijk}\Omega_j \rho_\alpha (u_t)_{\alpha k} \\
&= u^i \sum_\alpha (Q_\rho)_\alpha + \sum_\alpha (Q_{\rho u})^i_\alpha - \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x^j}(\tilde{f}_{\rho u})^{ij}_\alpha \\
&\equiv u^i Q_\rho + Q^i_{\rho u} - \frac{\partial}{\partial x^j}\tilde{f}^{ij}_{\rho u}
\end{aligned}
\tag{2.1.12}
$$

ここで、各成分が他の成分から受ける力は、全成分についての和をとった場合は互いに打ち消しあうため、ゼロとした ($\sum (M_{\rho u})_\alpha = 0$)。

(3) 状態方程式

状態方程式は、気体である各成分毎 ($\alpha = d, v$) に気体定数 R_α を用いて、次のように書くことができる。

$$
p_\alpha = \rho_\alpha R_\alpha T \tag{2.1.13}
$$

ここで、T は気温である。$p = p_d + p_v$ であるから、

$$
p = p_d + p_v = (\rho_d R_d + \rho_v R_v) T \tag{2.1.14}
$$

のように表され、$\epsilon = R_d/R_v$ とすると [6]、以下の式となる。

$$
p = \left(\rho_d + \frac{\rho_v}{\epsilon}\right) R_d T = \rho \left(\frac{\rho_d}{\rho} + \frac{\rho_v}{\epsilon\rho}\right) R_d T \tag{2.1.15}
$$

ここで、次式で定義されるエクスナー関数 π 及び温位 θ を導入する。C_v は定積比熱、C_p は定圧比熱である。

$$
\pi = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{R_d}{C_p}}, \quad \theta = \frac{T}{\pi} \tag{2.1.16}
$$

さらに、

$$
\begin{aligned}
\theta_m &= \theta \left(\frac{\rho_d}{\rho} + \frac{\rho_v}{\epsilon\rho}\right) \\
&= \theta \left(\frac{\rho - \rho_v - \sum_{\alpha \neq v} \rho_\alpha}{\rho} + \frac{\rho_v}{\epsilon\rho}\right) \\
&= \theta \left(1 + \left(\frac{1-\epsilon}{\epsilon}\right) q_v - \sum_{\alpha \neq v} q_\alpha\right)
\end{aligned}
\tag{2.1.17}
$$

を導入することにより [7]、全気圧 p についての状態方程式を次式のように導き出すことができる。

$$
p = R_d \pi \rho \theta_m \tag{2.1.18}
$$

これを p について解けば、

$$
p = p_0 \left(\frac{R_d \rho \theta_m}{p_0}\right)^{\frac{C_p}{C_v}} \tag{2.1.19}
$$

となり、また π について解けば、

$$
\pi = \left(\frac{R_d \rho \theta_m}{p_0}\right)^{\frac{R_d}{C_v}} \tag{2.1.20}
$$

となる。

(4) 温位の式

温位 θ の時間変化は以下の式で表される。

$$
\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial \theta}{\partial t} + u^i \frac{\partial \theta}{\partial x^i} = Q_\theta - \frac{\partial}{\partial x^i}\tilde{f}^i_\theta \tag{2.1.21}
$$

右辺の Q_θ は相変化に伴う潜熱の解放・吸収による温位変化、$\partial \tilde{f}^i_\theta / \partial x^i$ は u^i によらないフラックスによる時間変化（放射および地表面との熱交換）を表す。両辺に $(\rho_d + \rho_v/\epsilon)$ を乗じ、乾燥大気 (d)、水蒸気 (v) の連続の式（(2.1.4) 式）と組み合わせることにより、以下のフラックス形式による温位の式を得る。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\theta_m\right) + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho\theta_m u^i\right) \\
&= \theta \left\{ \left((Q_\rho)_d - \frac{\partial}{\partial x^i}(\tilde{f}_\rho)^i_d \right) \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{\epsilon}\left((Q_\rho)_v - \frac{\partial}{\partial x^i}(\tilde{f}_\rho)^i_v \right) \right\} \\
&\quad + \left(\rho_d + \frac{\rho_v}{\epsilon}\right)\left(Q_\theta - \frac{\partial}{\partial x^i}\tilde{f}^i_\theta\right)
\end{aligned}
\tag{2.1.22}
$$

(5) 水物質の式

水物質については、大気の各成分毎の連続の式（(2.1.4) 式）から、

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho_\alpha u^i\right) + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho_\alpha (u_t)^i_\alpha\right) \\
&= (Q_\rho)_\alpha - \frac{\partial}{\partial x^i}(\tilde{f}_\rho)^i_\alpha
\end{aligned}
\tag{2.1.23}
$$

であり、ここで、q_α は全密度と各成分の密度の比 [8] であるので、$\rho_\alpha = \rho q_\alpha$ を用いて以下のように書ける。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho q_\alpha\right) + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho q_\alpha u^i\right) + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho q_\alpha (u_t)^i_\alpha\right) \\
&= (Q_\rho)_\alpha - \frac{\partial}{\partial x^i}(\tilde{f}_\rho)^i_\alpha
\end{aligned}
\tag{2.1.24}
$$

(6) 直交直線座標の方程式系：まとめ

以上で直交直線座標でのフラックス形式の方程式系の導出が完了した。導出した方程式系を改めて以下にまとめておく。予報変数として、$\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho\theta_m, \rho q_\alpha$ があり、それぞれの時間発展の方程式が立てられる。ま

[6] $R_d \simeq 287.0, R_v \simeq 461.5$ であるから $\epsilon \simeq 0.622$, $(1-\epsilon)/\epsilon \simeq 0.608$

[7] θ_m は液体及び固体の水を含まない場合は仮温位となる。

[8] 水蒸気でいえば、混合比 $= \rho_v/\rho_d$、比湿 $= \rho_v/(\rho_d + \rho_v)$、全密度と水蒸気の密度の比 $= \rho_v/\rho = \rho_v/\sum \rho_\alpha$ である。

た、その他の未知数として p があり、これは状態方程式から診断される。

なお、乾燥大気の方程式系では、降水粒子の落下速度を含む項がゼロになり、θ_m が温位 θ と同じになる。

連続の式

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho u^i\right)+\sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho q_\alpha (u_t)^i_\alpha\right)\\&=Q_\rho-\frac{\partial}{\partial x^i}\tilde{f}^i_\rho \equiv F_\rho\end{aligned} \tag{2.1.25}$$

運動量保存の式

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}(\rho u^i)+\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\rho u^i u^j\right)+\sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\rho q_\alpha u^i (u_t)^j_\alpha\right)\\&\quad+\frac{\partial p}{\partial x^i}+\rho g^i\\&\quad+2\epsilon^{ijk}\Omega_j \rho u_k+\sum_\alpha 2\epsilon^{ijk}\Omega_j \rho (u_t)_{\alpha k}\\&\quad=u^i Q_\rho+Q^i_{\rho u}-\frac{\partial}{\partial x^j}\tilde{f}^{ij}_{\rho u}\equiv F^i_{\rho u}\end{aligned} \tag{2.1.26}$$

温位の式

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}(\rho\theta_m)+\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho\theta_m u^i\right)\\&=\theta\left\{\left((Q_\rho)_d-\frac{\partial}{\partial x^i}(\tilde{f}_\rho)^i_d\right)\right.\\&\qquad\left.+\frac{1}{\epsilon}\left((Q_\rho)_v-\frac{\partial}{\partial x^i}(\tilde{f}_\rho)^i_v\right)\right\}\\&\quad+\left(\rho_d+\frac{\rho_v}{\epsilon}\right)\left(Q_\theta-\frac{\partial}{\partial x^i}\tilde{f}^i_\theta\right)\equiv F_{\rho\theta_m}\end{aligned} \tag{2.1.27}$$

水物質の式

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho q_\alpha\right)+\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho q_\alpha u^i\right)+\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho q_\alpha (u_t)^i_\alpha\right)\\&=(Q_\rho)_\alpha-\frac{\partial}{\partial x^i}(\tilde{f}_\rho)^i_\alpha\equiv F_{\rho\alpha}\end{aligned} \tag{2.1.28}$$

状態方程式

$$p=p_0\left(\frac{R_d\rho\theta_m}{p_0}\right)^{\frac{C_p}{C_v}} \tag{2.1.29}$$

ただし、

$$\begin{aligned}\theta_m&=\theta\left(1+\left(\frac{1-\epsilon}{\epsilon}\right)q_v-\sum_{\alpha\neq v}q_\alpha\right)\\\epsilon&=\frac{R_d}{R_v}\end{aligned} \tag{2.1.30}$$

各式における $F_\rho, F_{\rho u}, F_{\rho v}, F_{\rho w}, F_{\rho\theta_m}$ について、数値計算上、考慮すべき事項を以下に補足する。

- 第 2.5.4 項で述べるレイリーダンピングを各予報変数に対して用いる場合には、これによる生成・消滅がありうる。
- 鉛直方向の CFL 条件を破るような上昇流に対して、クーラン数を 1 に近づけるよう減衰項を付加する手法[9]を導入する場合は、これによる ρw の消滅がありうる[10]。
- 大気の各成分の生成・消滅の総和 Q_ρ はゼロとなるべき量であるが、雲物理過程のコードによっては Q_ρ がゼロにならないものがある。このことも生成・消滅として扱う。

2.1.2 一般座標系における基礎方程式系

数値予報モデルでは、空間的に離散化した格子において、予報変数の時間発展を求めていく。前項で直交直線座標系における基礎方程式系を示したが、この方程式系が適用できる格子配置は直交直線座標に基づくものに限定される。計算領域に地形が含まれる場合、その形状を直交直線の格子で表現するためには、非常に多くの細かな格子が必要となるが、地形に沿った形状の格子を配置できれば、その格子形状によって地形を表現できて効率が良い。座標軸が直交せず、また、形状に沿って曲率を持った格子配置に対応する座標は、一般座標となる。数値計算を行う任意の座標系に対応するため、本項では、直交直線座標系における方程式系を一般座標系の方程式系に変換する。

(1) 方程式系の変換の準備

まず、直交直線座標 (x, y, z)、一般座標 (ξ, η, ζ) のそれぞれの微小要素の変換 $(dx, dy, dz) \to (d\xi, d\eta, d\zeta)$ を、座標変換行列 A を用いて以下のように記述する。

$$\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \tag{2.1.31}$$

ここで、座標変換行列 A は、

$$A\equiv\begin{pmatrix}\xi_x & \xi_y & \xi_z\\ \eta_x & \eta_y & \eta_z\\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z\end{pmatrix} \tag{2.1.32}$$

[9] WRF-ARW で採用されている Vertical Velocity Damping (Skamarock et al. 2008)

[10] これは、現状、積雲対流に対してエントレインメント/デトレインメントの結果としての上昇流の弱まりを表現するために導入したものである。エントレインメント/デトレインメントを表現する過程について、今後、導入に向けた開発が必要であると考えている。

である[11]。このとき、行列 A の各要素は変換のメトリックと呼ばれる。また、A の行列式

$$J = |A| \tag{2.1.33}$$

は変換のヤコビアンと呼ばれる。これらは、座標間の変換を記述する重要な量である。

メトリックとヤコビアンを用いて基礎方程式系を変換していくにあたって、ベクトル、テンソル解析の変換公式に基づき、方程式の各項の変換において必要な変換則を示す。なお、一般座標系 (ξ, η, ζ) を $(\hat{x}^i)$ と記述する。

速度成分の一般座標変換は、$\hat{u}^i$ を一般座標の（反変）速度成分として、(2.1.31) 式に従い

$$\hat{u}^i = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^n} u^n \tag{2.1.34}$$

で表される。同様に、降水粒子の落下速度成分 $(\hat{u_t})^i_\alpha$ は、

$$(\hat{u_t})^i_\alpha = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^n} (u_t)^n_\alpha \tag{2.1.35}$$

と表される。

予報方程式は変換のヤコビアンの逆数 $(1/J)$ を乗じた形で示すことにする。これは、$1/J$ は第 2.1.5 項で述べる物理空間の単位セルの体積に相当し、したがって、このような形の変換をすると、単位体積あたりの保存量 ϕ について物理空間の単位セル内の積分値 (ϕ/J) の収支という形で表すことができるためである。以下では各項の置き換えを示すが、それぞれに $1/J$ を乗じてある。スカラー ϕ の予報方程式においては、各項をそれぞれ次のように置き換えれば良い。

- スカラーの時間変化項

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{J} \phi \right)$$

- ベクトルの発散（移流項）

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\phi u^i \right) \rightarrow \frac{\partial}{\partial \hat{x}^i} \left(\frac{1}{J} \phi \hat{u}^i \right)$$

また、運動量保存の式においては、各項をそれぞれ次のように置き換えれば良い。

- ベクトルの時間変化項

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho u^i \right) \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{J} \rho \hat{u}^i \right)$$

- テンソルの発散 (移流項)

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \left(\rho u^i u^j \right) \rightarrow \frac{\partial}{\partial \hat{x}^j} \left(\frac{1}{J} \rho \hat{u}^i \hat{u}^j \right) + \frac{1}{J} \hat{\Gamma}^i_{jk} \rho \hat{u}^j \hat{u}^k$$

- スカラーの微分 (気圧傾度力項)

$$\frac{\partial p}{\partial x^i} \rightarrow \frac{1}{J} \hat{G}^{in} \frac{\partial p}{\partial \hat{x}^n}$$

- ベクトル

$$\rho g^i \rightarrow \frac{1}{J} \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^n} \rho g^n$$

ここで、$\hat{G}_{ij}, \hat{G}^{ij}$ はそれぞれ（共変）計量テンソル、反変計量テンソル

$$\hat{G}_{ij} = \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial x^m}{\partial \hat{x}^i} \frac{\partial x^m}{\partial \hat{x}^j}, \qquad \hat{G}^{ij} = \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^m} \frac{\partial \hat{x}^j}{\partial x^m} \tag{2.1.36}$$

であり、メトリックで記述できる。また、$\hat{\Gamma}^i_{jk}$ はクリストッフェル記号

$$\hat{\Gamma}^i_{jk} = \frac{1}{2} \hat{G}^{im} \left(\frac{\partial \hat{G}_{km}}{\partial \hat{x}^j} + \frac{\partial \hat{G}_{jm}}{\partial \hat{x}^k} - \frac{\partial \hat{G}_{kj}}{\partial \hat{x}^m} \right) \tag{2.1.37}$$

である。なお、上記の変換式では、一般座標系の計量テンソル $(\hat{G}_{ij})$ の行列式の平方根 $(\hat{G}^{\frac{1}{2}})$ が、直交直線座標から一般座標への変換のヤコビアンの逆数 $(1/J)$ に等しいことを用いている。

(2) 方程式系の変換

上記の変換を (2.1.25) 式–(2.1.28) 式の各項に適用すると、方程式系は以下のように変換できる。

連続の式

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{J} \rho \right) + \frac{\partial}{\partial \hat{x}^i} \left(\frac{1}{J} \rho \hat{u}^i \right) + \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial \hat{x}^i} \left(\frac{1}{J} \rho q_\alpha (\hat{u_t})^i_\alpha \right) \\ &= \frac{1}{J} F_\rho \end{aligned} \tag{2.1.38}$$

運動量保存の式

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{J} \rho \hat{u}^i \right) + \frac{\partial}{\partial \hat{x}^n} \left(\frac{1}{J} \rho \hat{u}^i \hat{u}^n \right) + \frac{1}{J} \hat{\Gamma}^i_{jk} \rho \hat{u}^j \hat{u}^k \\ &+ \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial \hat{x}^n} \left(\frac{1}{J} \rho_\alpha \hat{u}^i (\hat{u_t})^n_\alpha \right) + \sum_\alpha \frac{1}{J} \hat{\Gamma}^i_{jk} \rho_\alpha \hat{u}^j_\alpha (\hat{u_t})^k_\alpha \\ &+ \frac{1}{J} \hat{G}^{in} \frac{\partial p}{\partial \hat{x}^n} + \frac{1}{J} \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^n} \rho g^n \\ &+ \frac{1}{J} 2 \hat{\epsilon}^{ijk} \hat{\Omega}_j \rho \hat{u}_k + \sum_\alpha \frac{1}{J} 2 \hat{\epsilon}^{ijk} \hat{\Omega}_j \rho_\alpha (\hat{u_t})_{\alpha k} \\ &= \frac{1}{J} \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^n} F^n_u \end{aligned} \tag{2.1.39}$$

[11] $\left(\dfrac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{y,z}$ を ξ_x のように記述する。

温位の式

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho\theta_m\right)+\frac{\partial}{\partial\hat{x}^i}\left(\frac{1}{J}\rho\theta_m\hat{u}^i\right)=\frac{1}{J}F_{\rho\theta_m} \tag{2.1.40}$$

水物質の式

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho q_\alpha\right)+\frac{\partial}{\partial\hat{x}^i}\left(\frac{1}{J}\rho q_\alpha\hat{u}^i\right)+\frac{\partial}{\partial\hat{x}^i}\left(\frac{1}{J}\rho q_\alpha(\hat{u_t})^i_\alpha\right)=\frac{1}{J}F_{\rho\alpha} \tag{2.1.41}$$

ここで、(2.1.38) 式の F_ρ には、(2.1.25) 式に示したように $\partial\tilde{f}^i_\rho/\partial x^i$ の項（ベクトルの発散）が含まれている。しかし、実際には物理過程によって評価された ρ の時間変化率の形で扱うため、スカラーの時間変化項と同様の変換を F_ρ に適用した（$F_{\rho\theta_m}, F_{\rho\alpha}$ についても同様)。また、$\partial\tilde{f}^{ij}_{\rho u}/\partial x^j$ の項（テンソルの発散）を含む $F^i_{\rho u}$ についても、ρu^i の時間変化項と同様の変換を適用した。

以上が、一般座標系の基礎方程式系となるが、運動量保存の式については、次の第 2.1.3 項において、さらに式の変形を行う。

2.1.3 重力加速度と鉛直座標に関する制限と運動量保存の式の変形

(1) 重力加速度と鉛直座標に関する制限

ここまでの基礎方程式系の導出においては、あらゆる一般座標系を対象に議論しており、その座標系の性質について、特に制限を設けていなかった。ここで、重力加速度は z 軸及び ζ 軸と平行であるとする制限を設ける。こうすることにより、音波及び重力波の解法に split-explicit 法 (Klemp and Wilhelmson 1978) を利用できることや乱流過程や降水過程など鉛直方向に依存のある物理過程・力学過程の扱いが簡便になること等の長所がある [12]。

重力加速度と z 軸が平行であるとしたので、以下の式が成り立つ。

$$g^1=g^2=0,\qquad u_{t_\alpha}=v_{t_\alpha}=0 \tag{2.1.42}$$

さらに、z 軸と ζ 軸が平行であるから、

$$\xi_z=\eta_z=0 \tag{2.1.43}$$

となり、したがって、座標変換後の降水粒子の落下速度成分は、

$$\begin{aligned}(\hat{u_t})_\alpha&=\xi_x(u_t)_\alpha+\xi_y(v_t)_\alpha+\xi_z(w_t)_\alpha=0\\(\hat{v_t})_\alpha&=\eta_x(u_t)_\alpha+\eta_y(v_t)_\alpha+\eta_z(w_t)_\alpha=0\\(\hat{w_t})_\alpha&=\zeta_x(u_t)_\alpha+\zeta_y(v_t)_\alpha+\zeta_z(w_t)_\alpha=\zeta_z(w_t)_\alpha\end{aligned} \tag{2.1.44}$$

となる。この制限を設けることによって、(2.1.38) 式、(2.1.39) 式及び (2.1.41) 式において、上記に関係する項が実質ゼロになる。

(2) 運動量保存の式の変形

asuca では、予報変数である運動量には、局所直交座標系 (x,y,z) における速度成分 (u,v,w) に基づく運動量の成分 $(\rho u,\rho v,\rho w)$ を採用している。(2.1.39) 式では、$(\rho\hat{u},\rho\hat{v},\rho\hat{w})$ の時間変化を記述する形になっているのを $(\rho u,\rho v,\rho w)$ の時間変化を記述するように式を変形する。後述するように、このように式を変形することで (2.1.39) 式のクリストッフェル記号の扱いが容易になる。一方、移流速度には $(\hat{u},\hat{v},\hat{w})$ を採用している [13]。以下では、「重力加速度は z 軸及び ζ 軸と平行」とする制限を課した上で、$(\rho u,\rho v,\rho w)$ の時間発展の式とするように (2.1.39) 式を変形する。

重力加速度が z 軸及び ζ 軸と平行であるとすることは、局所直交直線座標の z 軸の方向が、地球上の局所局所で変わることを考慮することであるとも言える。それに伴い、(u,v,w) の基底ベクトルも球面に沿って方向を変えることになる。このことを表現するために、斉藤 (2003) および石田 (2008) で解説された JMA-NHM の方法と同様に、局所直交直線座標 x^i から一般座標 $\hat{x}^i$ の変換の過程において、以下の (2.1.45) 式のように x^i 座標からの座標変換行列の非対角成分がゼロであるような球面直交曲線座標 $\bar{x}^i$ を導入する。そして、球面直交曲線座標 $\bar{x}^i$ から座標 $\hat{x}^i$ への変換に関しては水平方向には不変であるとする。

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}d\bar{x}\\d\bar{y}\\d\bar{z}\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\frac{\partial\bar{x}}{\partial x}&\frac{\partial\bar{x}}{\partial y}&\frac{\partial\bar{x}}{\partial z}\\\frac{\partial\bar{y}}{\partial x}&\frac{\partial\bar{y}}{\partial y}&\frac{\partial\bar{y}}{\partial z}\\\frac{\partial\bar{z}}{\partial x}&\frac{\partial\bar{z}}{\partial y}&\frac{\partial\bar{z}}{\partial z}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dx\\dy\\dz\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}m_1&0&0\\0&m_2&0\\0&0&m_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dx\\dy\\dz\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{2.1.45}$$

球面直交曲線座標 $\bar{x}^i$ としては、これも斉藤 (2003) および石田 (2008) 同様に地図投影法を用いる。m_i はマップファクターと呼ばれる量で、$m_3=1$ である。このような $\bar{x}^i$ 座標の利点は、$(\bar{u},\bar{v},\bar{w})$ と (u,v,w) との関

[12] 一方、この制限の短所としては、急峻な地形が存在する場合に、座標の非直交性が大きくなることにより誤差が大きくなってしまう点が挙げられる。

[13] $(\hat{u},\hat{v},\hat{w})$ は空間離散化した場合のセルの各面に直交する成分であり、セルの各面のフラックスを考える上で直感的にも分かりやすい。

係を、

$$\bar{u} = m_1 u, \quad \bar{v} = m_2 v, \quad \bar{w} = m_3 w \tag{2.1.46}$$

のようにマップファクターを用いて表すことができることと、計量テンソルの非対角成分がゼロになり、(2.1.39) 式のクリストッフェル記号 ($\hat{\Gamma}^i_{jk}$) を含む項（以下、この項を曲率項と呼ぶ）の扱いの煩雑さが軽減されることである。また、$(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$ と $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ との関係は、座標 $\bar{x}^i$ から座標 $\hat{x}^i$ への変換に関しては水平方向には不変としたことから、

$$\hat{u} = \bar{u}, \quad \hat{v} = \bar{v}, \quad \hat{w} = \frac{\partial \hat{z}}{\partial \bar{x}}\bar{u} + \frac{\partial \hat{z}}{\partial \bar{y}}\bar{v} + \frac{\partial \hat{z}}{\partial \bar{z}}\bar{w} \tag{2.1.47}$$

と表される。

u^i と $\bar{u}^i$ の関係が (2.1.46) 式で表されることを念頭に、(2.1.39) 式において、まず、$\hat{u}^i$ から $\bar{u}^i$ への変換を考える。(2.1.39) 式において、i を m とおきかえ、$\partial \bar{x}^i / \partial \hat{x}^m$（$m$ について和をとる）を両辺にかけて整理すると、次のように式変形できる（付録 2.1.A に式変形についての補足を付す）。

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho \bar{u}^i\right) + \frac{\partial}{\partial \hat{x}^j}\left(\frac{1}{J}\rho \bar{u}^i \hat{u}^j\right) + \frac{1}{J}\rho \bar{u}^j \bar{u}^k \bar{\Gamma}^i_{jk} \\
&+ \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial \hat{x}^j}\left(\frac{1}{J}\rho_\alpha \bar{u}^i (\hat{u}_t)^j_\alpha\right) + \sum_\alpha \frac{1}{J}\rho \bar{u}^j (\bar{u}_t)^k_\alpha \bar{\Gamma}^i_{jk} \\
&+ \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l}\frac{1}{J}\frac{\partial \hat{x}^n}{\partial x^l}\frac{\partial p}{\partial \hat{x}^n} + \frac{1}{J}\rho \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^3} g \\
&+ \frac{1}{J} 2 \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m}\epsilon^{mjk}\Omega_j \rho u_k \\
&+ \sum_\alpha \frac{1}{J} 2 \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m}\epsilon^{mjk}\Omega_j \rho (u_t)_{\alpha k} \\
&= \frac{1}{J}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^n}F^n
\end{aligned} \tag{2.1.48}$$

これにより、(2.1.48) 式の $\bar{\Gamma}^i_{jk}$ は、一般座標系の $\hat{\Gamma}^i_{jk}$ に比較して扱いが容易となる。以下では、クリストッフェル記号 ($\bar{\Gamma}^i_{jk}$) をマップファクターを用いて表し、それを用いて (2.1.48) 式を変形して $(\rho u, \rho v, \rho w)$ の時間発展の式とした結果を示す。

まず、(2.1.48) 式の $\bar{\Gamma}^i_{jk}$

$$\bar{\Gamma}^i_{jk} = \frac{1}{2}\bar{G}^{im}\left(\frac{\partial \bar{G}_{km}}{\partial \bar{x}^j} + \frac{\partial \bar{G}_{jm}}{\partial \bar{x}^k} - \frac{\partial \bar{G}_{kj}}{\partial \bar{x}^m}\right) \tag{2.1.49}$$

を求めるために計量テンソル $\bar{G}^{ij}, \bar{G}_{ij}$ が必要となる。

計量テンソル $\bar{G}^{ij}, \bar{G}_{ij}$ はマップファクターを用いて次のように書ける。

$$\bar{G}^{ij} = \begin{pmatrix} {m_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & {m_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & {m_3}^2 \end{pmatrix} \tag{2.1.50}$$

$$\bar{G}_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{{m_1}^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{{m_2}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{{m_3}^2} \end{pmatrix} \tag{2.1.51}$$

ここで、計量テンソルの非対角成分がゼロであるから、m についての和は $m = i$ しか残らないので、

$$\bar{\Gamma}^i_{jk} = \frac{1}{2}\bar{G}^{ii}\left(\frac{\partial \bar{G}_{ki}}{\partial \bar{x}^j} + \frac{\partial \bar{G}_{ji}}{\partial \bar{x}^k} - \frac{\partial \bar{G}_{kj}}{\partial \bar{x}^i}\right) \tag{2.1.52}$$

である（マップファクターを用いて表したクリストッフェル記号の成分は付録 2.1.B を参照）。

この $\bar{\Gamma}^i_{jk}$ を用いて、(2.1.48) 式の大気速度の移流項と曲率項を変形する（途中の式変形については付録 2.1.C にまとめる）。式変形の際の注意点は、shallow assumption[14] を導入して、マップファクターの鉛直微分項をゼロとすることと、shallow assumption を適用した場合に角運動量を保存させるために Ω_1, Ω_2 の項を省略することである。この点において、(2.1.39) 式とは異なる。式変形後の運動量保存の式を以下に示す。

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho u\right) + \frac{\partial}{\partial \hat{x}^j}\left(\frac{1}{J}\rho u \hat{u}^j\right) \\
&+ \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial \hat{z}}\left(\frac{1}{J}\rho_\alpha u (\hat{w}_t)_\alpha\right) + \frac{1}{J}\frac{\partial \hat{x}^n}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial \hat{x}^n} \\
&- \frac{1}{J}\rho v \Gamma - \frac{1}{J}\rho v f = \frac{1}{J}F_{\rho u}
\end{aligned} \tag{2.1.53}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho v\right) + \frac{\partial}{\partial \hat{x}^j}\left(\frac{1}{J}\rho v \hat{u}^j\right) \\
&+ \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial \hat{z}}\left(\frac{1}{J}\rho_\alpha v (\hat{w}_t)_\alpha\right) + \frac{1}{J}\frac{\partial \hat{x}^n}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial \hat{x}^n} \\
&+ \frac{1}{J}\rho u f = \frac{1}{J}F_{\rho v}
\end{aligned} \tag{2.1.54}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho w\right) + \frac{\partial}{\partial \hat{x}^j}\left(\frac{1}{J}\rho w \hat{u}^j\right) \\
&+ \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial \hat{z}}\left(\frac{1}{J}\rho_\alpha w (\hat{w}_t)_\alpha\right) + \frac{1}{J}\frac{\partial \hat{x}^n}{\partial z}\frac{\partial p}{\partial \hat{x}^n} \\
&+ \frac{\rho}{J} g = \frac{1}{J}F_{\rho w}
\end{aligned} \tag{2.1.55}$$

[14] 地球半径 a に対して $z \ll a$ とする近似。

ただし、

$$\Gamma = u\frac{m_2}{m_1}\frac{\partial m_1}{\partial \hat{y}} - v\frac{m_1}{m_2}\frac{\partial m_2}{\partial \hat{x}} \tag{2.1.56}$$

$$f = 2\Omega_3 \tag{2.1.57}$$

である。なお、降水粒子の落下による移流の項については、大気速度の移流項と曲率項の変形と同様の変形を行い、降水の落下速度が $\hat{z}$ 軸と平行であることを用いると、大気速度の Γ の項に相当する項はゼロとなる。また、降水粒子の落下速度についてのコリオリ項は、降水の落下速度が $\hat{z}$ 軸と平行であることと、shallow assumption の適用によって省略される。

2.1.4 基本場の導入

ここまで、基礎方程式系の導出及び座標変換まで行ったところであるが、実際に数値計算を行う場合には、以下に述べるように、気圧傾度力項と浮力項の扱いに注意が必要となる。まず、気圧傾度力項と浮力項は、状態方程式

$$p = p_0\left(\frac{R_d\rho\theta_m}{p_0}\right)^{\frac{C_p}{C_v}}, \quad p = R_d\pi\rho\theta_m \tag{2.1.58}$$

及び、その微分

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \hat{x}}p &= p_0\frac{C_p}{C_v}\left(\frac{R_d\rho\theta_m}{p_0}\right)^{\frac{C_p}{C_v}-1}\frac{R_d}{p_0}\frac{\partial}{\partial \hat{x}}\left(\rho\theta_m\right)\\ &= \frac{C_p}{C_v}R_d\pi\frac{\partial}{\partial \hat{x}}\left(\rho\theta_m\right)\end{aligned} \tag{2.1.59}$$

を利用して、以下のように変形できる。

$$\begin{aligned}&\frac{1}{J}\frac{\partial \hat{x}^n}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial \hat{x}^n}p + \frac{\rho g^i}{J}\\ &= \frac{1}{J}\frac{\partial \hat{x}^n}{\partial x^i}\frac{C_p}{C_v}R_d\pi\frac{\partial}{\partial \hat{x}^n}\left(\rho\theta_m\right) + \frac{\rho g^i}{J}\\ &= \frac{C_p}{C_v}R_d\pi\frac{\partial}{\partial \hat{x}^n}\left(\frac{1}{J}\frac{\partial \hat{x}^n}{\partial x^i}\rho\theta_m\right) + \frac{\rho g^i}{J}\end{aligned} \tag{2.1.60}$$

ここで、鉛直の気圧傾度力項と浮力項の和の絶対値は、それぞれの項の絶対値よりも数桁小さいために、計算機上の桁落ちによる計算精度の低下が問題となる。そこで、桁落ちに伴う誤差を小さくするため、変数を基本場と呼ぶ場とそこからの偏差に分離して扱うこととする。以下では「$^-$」がついた値が基本場であり、「$'$」がついた値が基本場からの偏差を表す。

$$\begin{aligned}\rho &= \overline{\rho} + \rho'\\ \rho\theta_m &= \overline{\rho\theta_m} + \left(\rho\theta_m\right)'\\ \pi &= \overline{\pi} + \pi'\end{aligned} \tag{2.1.61}$$

基本場は時間変化させず下記の静力学平衡の関係を満たすように決める。

$$\frac{C_p}{C_v}R_d\overline{\pi}\frac{\partial}{\partial \hat{x}^n}\left(\frac{1}{J}\frac{\partial \hat{x}^n}{\partial x^i}\overline{\rho\theta_m}\right) + \frac{\overline{\rho}g^i}{J} = 0 \tag{2.1.62}$$

上記の関係を用いると、気圧傾度力項と浮力項は以下のように変形できる。なお、ここでは定積比熱と定圧比熱の比 $\gamma = C_p/C_v$ を用いている。

$$\begin{aligned}&\frac{C_p}{C_v}R_d\pi\frac{\partial}{\partial \hat{x}^n}\left(\frac{1}{J}\frac{\partial \hat{x}^n}{\partial x^i}\rho\theta_m\right) + \frac{\rho g^i}{J}\\ &= \gamma R_d\left(\overline{\pi} + \pi'\right)\frac{\partial}{\partial \hat{x}^n}\left\{\frac{1}{J}\frac{\partial \hat{x}^n}{\partial x^i}\left(\overline{\rho\theta_m} + \left(\rho\theta_m\right)'\right)\right\}\\ &\quad + \frac{\left(\overline{\rho} + \rho'\right)g^i}{J}\\ &= \gamma R_d\pi\frac{\partial}{\partial \hat{x}^n}\frac{1}{J}\frac{\partial \hat{x}^n}{\partial x^i}\left(\rho\theta_m\right)' + \left(\frac{\rho'}{J} - \frac{\pi'}{\overline{\pi}}\frac{\overline{\rho}}{J}\right)g^i\end{aligned} \tag{2.1.63}$$

以上のように基本場を導入することにより、運動量保存の式の気圧傾度力項と浮力項に表れるエクスナー関数、温位と全密度をそれぞれの偏差で表すことができる。また、基本場は時間変化しないようにとるため、全密度と温位の時間微分項をそれぞれの偏差で表すことができる。

基本場を導入した方程式系を以下に示す。ここでは、アインシュタインの規約を用いずに座標変換後の方程式を記述する。$(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$ は (U, V, W) と書き換える。また、第 2.1.3 項で述べた鉛直座標を重力方向にとる制限によってゼロになる項は記述していない。次節以降で離散化するのは、この方程式系である。

連続の式

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho'\right)\\ &+ \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{J}\rho U\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{J}\rho V\right) + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{J}\rho W\right)\\ &= -\sum_{\alpha}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{J}\rho q_\alpha W_{t_\alpha}\right) + \frac{1}{J}F_\rho \equiv \frac{1}{J}F'_\rho\end{aligned} \tag{2.1.64}$$

運動量保存の式

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho u\right)\\ &+ \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{J}\rho u U\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{J}\rho u V\right) + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{J}\rho u W\right)\\ &+ \gamma R_d\pi\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{J}\xi_x\left(\rho\theta_m\right)'\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{J}\eta_x\left(\rho\theta_m\right)'\right)\right.\\ &\qquad\left. + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{J}\zeta_x\left(\rho\theta_m\right)'\right)\right\}\\ &= -\sum_{\alpha}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{J}\rho u q_\alpha W_{t_\alpha}\right)\\ &\qquad - \frac{1}{J}\rho v\Gamma - \frac{1}{J}\rho v f + \frac{1}{J}F_{\rho u} \equiv \frac{1}{J}F'_u\end{aligned} \tag{2.1.65}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho v\right) \\
&+\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{J}\rho v U\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{J}\rho v V\right)+\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{J}\rho v W\right) \\
&+\gamma R_d \pi\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{J}\xi_y\left(\rho\theta_m\right)'\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{J}\eta_y\left(\rho\theta_m\right)'\right)\right. \\
&\qquad\left.+\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{J}\zeta_y\left(\rho\theta_m\right)'\right)\right\} \\
&=-\sum_{\alpha}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{J}\rho v q_\alpha W_{t_\alpha}\right) \\
&\qquad+\frac{1}{J}\rho u\Gamma+\frac{1}{J}\rho u f+\frac{1}{J}F_{\rho v}\equiv\frac{1}{J}F'_v
\end{aligned}
\tag{2.1.66}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho w\right) \\
&+\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{J}\rho w U\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{J}\rho w V\right)+\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{J}\rho w W\right) \\
&+\gamma R_d \pi\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{J}\xi_z\left(\rho\theta_m\right)'\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{J}\eta_z\left(\rho\theta_m\right)'\right)\right. \\
&\qquad\left.+\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{J}\zeta_z\left(\rho\theta_m\right)'\right)\right\}+\left(\frac{\rho'}{J}-\frac{\pi'}{\overline{\pi}}\frac{\overline{\rho}}{J}\right)g^i \\
&=-\sum_{\alpha}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{J}\rho w q_\alpha W_{t_\alpha}\right)+\frac{1}{J}F_{\rho w}\equiv\frac{1}{J}F'_w
\end{aligned}
\tag{2.1.67}
$$

温位の式

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\left(\rho\theta_m\right)'\right) \\
&+\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{J}\rho\theta_m U\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{J}\rho\theta_m V\right)+\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{J}\rho\theta_m W\right) \\
&=\frac{1}{J}F_{\rho\theta_m}
\end{aligned}
\tag{2.1.68}
$$

水物質の式

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho q_\alpha\right) \\
&+\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{J}\rho q_\alpha U\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{J}\rho q_\alpha V\right) \\
&+\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{J}\rho q_\alpha (W+W_{t_\alpha})\right) \\
&=\frac{1}{J}F_{\rho\alpha}
\end{aligned}
\tag{2.1.69}
$$

2.1.5 一般座標の方程式系を用いた計算手順

ここでは、一般座標の方程式系を用いた asuca の計算手順の概略を示す。数値計算においては、座標 (x,y,z) で定義される格子空間は物理空間と呼ばれ、一般座標 (ξ,η,ζ) で定義される格子空間は計算空間と呼ばれる。メトリックは計算空間の単位セルと物理空間の単位セルの各辺の長さ比に相当し、ヤコビアンは計算空間の単位セルと物理空間の単位セルの体積比に相当する。

一般座標の方程式系を用いた asuca の計算手順は、

- 物理空間上に任意に格子点を配置する
- 長さ 1 の単位セル [15] の計算空間に対するメトリック、ヤコビアンを数値的に計算する
- 初期値、境界値を計算空間上の方程式系にあうよう、上で求めたメトリック、ヤコビアンを用いて変換する
- 計算空間上で予報する
- 診断および出力に必要な物理空間上の値は、逆変換で求める

という流れになる。

[15] 単位セルの長さ 1 とすることにより、長さに関する乗算・除算がプログラム上不要になり、高速になる。

付録 2.1.A　一般座標系の運動量保存の式 (2.1.39) 式の式変形

(2.1.39) 式から (2.1.48) 式への変形を簡単に示す。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \hat{x}^m} \times ((2.1.39)\ \text{式の左辺第 2 項}) \\
&= \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \hat{x}^m}\left(\frac{1}{J}\rho\hat{u}^j\right)\frac{\partial \hat{u}^m}{\partial \hat{x}^j} + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \hat{x}^m}\hat{u}^m\frac{\partial}{\partial \hat{x}^j}\left(\frac{1}{J}\rho\hat{u}^j\right) \\
&= \underline{\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \hat{x}^m}\left(\frac{1}{J}\rho\hat{u}^j\right)\frac{\partial \hat{u}^m}{\partial \hat{x}^j}} + \underline{\underline{\bar{u}^i\frac{\partial}{\partial \hat{x}^j}\left(\frac{1}{J}\rho\hat{u}^j\right)}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \hat{x}^m} \times ((2.1.39)\ \text{式の左辺第 3 項}) \\
&= \underline{\frac{1}{J}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \hat{x}^m}\hat{\Gamma}^m_{jk}\rho\hat{u}^j\hat{u}^k}
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\text{下線部の和} = \underline{\underline{\frac{1}{J}\rho\hat{u}^j\frac{\partial \bar{u}^i}{\partial \hat{x}^j}}} + \frac{1}{J}\rho\bar{u}^j\bar{u}^k\bar{\Gamma}^i_{jk} \qquad ,
$$

$$
\text{さらに二重下線部の和} = \frac{\partial}{\partial \hat{x}^j}\left(\frac{1}{J}\rho\bar{u}^i\hat{u}^j\right)
$$

付録 2.1.B　マップファクターを用いて表したクリストッフェル記号

$$
\begin{aligned}
&\bar{\Gamma}^1_{11} = -\frac{1}{m_1}\frac{\partial m_1}{\partial \bar{x}}, && \bar{\Gamma}^1_{12} = -\frac{1}{m_1}\frac{\partial m_1}{\partial \bar{y}}, && \\
& && \bar{\Gamma}^1_{13} = -\frac{1}{m_1}\frac{\partial m_1}{\partial \bar{z}}, && \\
&\bar{\Gamma}^1_{21} = -\frac{1}{m_1}\frac{\partial m_1}{\partial \bar{y}}, && \bar{\Gamma}^1_{22} = \frac{m_1^2}{m_2^3}\frac{\partial m_2}{\partial \bar{x}}, && \bar{\Gamma}^1_{23} = 0, \\
&\bar{\Gamma}^1_{31} = -\frac{1}{m_1}\frac{\partial m_1}{\partial \bar{z}}, && \bar{\Gamma}^1_{32} = 0, && \bar{\Gamma}^1_{33} = 0, \\
&\bar{\Gamma}^2_{11} = \frac{m_2^2}{m_1^3}\frac{\partial m_1}{\partial \bar{y}}, && \bar{\Gamma}^2_{12} = -\frac{1}{m_2}\frac{\partial m_2}{\partial \bar{x}}, && \bar{\Gamma}^2_{13} = 0, \\
&\bar{\Gamma}^2_{21} = -\frac{1}{m_2}\frac{\partial m_2}{\partial \bar{x}}, && \bar{\Gamma}^2_{22} = -\frac{1}{m_2}\frac{\partial m_2}{\partial \bar{y}}, && \\
& && \bar{\Gamma}^2_{23} = -\frac{1}{m_2}\frac{\partial m_2}{\partial \bar{z}}, && \\
&\bar{\Gamma}^2_{31} = 0, && \bar{\Gamma}^2_{32} = -\frac{1}{m_2}\frac{\partial m_2}{\partial \bar{z}}, && \bar{\Gamma}^2_{33} = 0, \\
&\bar{\Gamma}^3_{11} = -\frac{1}{m_1^3}\frac{\partial m_1}{\partial \bar{z}}, && \bar{\Gamma}^3_{12} = 0, && \bar{\Gamma}^3_{13} = 0, \\
&\bar{\Gamma}^3_{21} = 0, && \bar{\Gamma}^3_{22} = -\frac{1}{m_2^3}\frac{\partial m_2}{\partial \bar{z}}, && \bar{\Gamma}^3_{23} = 0, \\
&\bar{\Gamma}^3_{31} = 0, && \bar{\Gamma}^3_{32} = 0, && \bar{\Gamma}^3_{33} = 0
\end{aligned}
\tag{2.1.70}
$$

付録 2.1.C　移流項と曲率項の変形

付録 2.1.B で求めた $\bar{\Gamma}^i_{jk}$ を用いて (2.1.48) 式の移流項と曲率項を変形していく。まず、$\bar{u}^i$ については、

$$
\bar{u}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^n}u^n = m_i u^i \quad (i\ \text{について和を取らない}) \tag{2.1.71}
$$

である。微分については、

$$
\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial \hat{x}^n}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial}{\partial \hat{x}^n} \tag{2.1.72}
$$

とする。移流項は、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \hat{x}^j}\left(\frac{1}{J}\rho\bar{u}^i\hat{u}^j\right) &= \frac{\partial}{\partial \hat{x}^j}\left(\frac{1}{J}\rho m_i u^i\hat{u}^j\right) \\
&= m_i\frac{\partial}{\partial \hat{x}^j}\left(\frac{1}{J}\rho u^i\hat{u}^j\right) + \frac{1}{J}\rho u^i\hat{u}^j\frac{\partial m_i}{\partial \hat{x}^j}
\end{aligned}
\tag{2.1.73}
$$

である。また、$i = 1$ の場合は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
&\bar{u}^j\bar{u}^k\bar{\Gamma}^1_{jk} = \\
&\quad -\bar{u}\bar{u}\frac{1}{m_1}\frac{\partial m_1}{\partial \bar{x}} - \bar{u}\bar{v}\frac{1}{m_1}\frac{\partial m_1}{\partial \bar{y}} - \bar{u}\bar{w}\frac{1}{m_1}\frac{\partial m_1}{\partial \bar{z}} \\
&\quad -\bar{v}\bar{u}\frac{1}{m_1}\frac{\partial m_1}{\partial \bar{y}} + \bar{v}\bar{v}\frac{m_1^2}{m_2^3}\frac{\partial m_2}{\partial \bar{x}} - \bar{w}\bar{u}\frac{1}{m_1}\frac{\partial m_1}{\partial \bar{z}} \\
&= -u\hat{u}\frac{\partial m_1}{\partial \hat{x}} - u\hat{v}\frac{\partial m_1}{\partial \hat{y}} - u\hat{w}\frac{\partial m_1}{\partial \hat{z}} \\
&\quad -vum_2\frac{\partial m_1}{\partial \bar{y}} + vv\frac{m_1^2}{m_2}\frac{\partial m_2}{\partial \bar{x}} - wu\frac{\partial m_1}{\partial \bar{z}} \\
&= -u\hat{u}^j\frac{\partial m_1}{\partial \hat{x}^j} - vum_2\frac{\partial \hat{x}^n}{\partial \bar{y}}\frac{\partial m_1}{\partial \hat{x}^n} \\
&\quad +vv\frac{m_1^2}{m_2}\frac{\partial \hat{x}^n}{\partial \bar{x}}\frac{\partial m_2}{\partial \hat{x}^n} - wu\frac{\partial \hat{x}^n}{\partial \bar{z}}\frac{\partial m_1}{\partial \hat{x}^n}
\end{aligned}
\tag{2.1.74}
$$

さらに、shallow assumption を導入してマップファクターの鉛直微分項をゼロとすると、

$$
\bar{u}^j\bar{u}^k\bar{\Gamma}^1_{jk} = -u\hat{u}^j\frac{\partial m_1}{\partial \hat{x}^j} - vum_2\frac{\partial m_1}{\partial \hat{y}} + vv\frac{m_1^2}{m_2}\frac{\partial m_2}{\partial \hat{x}} \tag{2.1.75}
$$

同様にして $i = 2$ の場合は、

$$
\bar{u}^j\bar{u}^k\bar{\Gamma}^2_{jk} = -v\hat{u}^j\frac{\partial m_2}{\partial \hat{x}^j} - uvm_1\frac{\partial m_2}{\partial \hat{x}} + uu\frac{m_2^2}{m_1}\frac{\partial m_1}{\partial \hat{y}} \tag{2.1.76}
$$

さらに $i = 3$ の場合は、

$$
\bar{u}^j\bar{u}^k\bar{\Gamma}^3_{jk} = 0 \tag{2.1.77}
$$

となるので、以上を用いて移流項と曲率項の和を変形すると次式が得られる。

$$
\begin{aligned}
&(i = 1) \\
&\frac{\partial}{\partial \hat{x}^j}\left(\frac{1}{J}\rho\bar{u}^1\hat{u}^j\right) + \frac{1}{J}\rho\bar{u}^j\bar{u}^k\bar{\Gamma}^1_{jk} \\
&= m_1\frac{\partial}{\partial \hat{x}^j}\left(\frac{1}{J}\rho u\hat{u}^j\right) + \frac{1}{J}\rho u\hat{u}^j\frac{\partial m_1}{\partial \hat{x}^j} \\
&\quad + \frac{1}{J}\rho\left(-u\hat{u}^j\frac{\partial m_1}{\partial \hat{x}^j} - vum_2\frac{\partial m_1}{\partial \hat{y}} + vv\frac{m_1^2}{m_2}\frac{\partial m_2}{\partial \hat{x}}\right) \\
&= m_1\frac{\partial}{\partial \hat{x}^j}\left(\frac{1}{J}\rho u\hat{u}^j\right) \\
&\quad + m_1\frac{1}{J}\rho v\left(-u\frac{m_2}{m_1}\frac{\partial m_1}{\partial \hat{y}} + v\frac{m_1}{m_2}\frac{\partial m_2}{\partial \hat{x}}\right)
\end{aligned}
\tag{2.1.78}
$$

$(i=2)$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}^j}\left(\frac{1}{J}\rho \bar{u}^2 \hat{u}^j\right) + \frac{1}{J}\rho \bar{u}^j \bar{u}^k \bar{\Gamma}^2_{jk}$$
$$= m_2 \frac{\partial}{\partial \hat{x}^j}\left(\frac{1}{J}\rho v \hat{u}^j\right) + \rho \frac{1}{J} v \hat{u}^j \frac{\partial m_2}{\partial \hat{x}^j}$$
$$+ \frac{1}{J}\rho\left(-v\hat{u}^j \frac{\partial m_2}{\partial \hat{x}^j} - uvm_1 \frac{\partial m_2}{\partial \hat{x}} + uu\frac{m_2^2}{m_1}\frac{\partial m_1}{\partial \hat{y}}\right)$$
$$= m_2 \frac{\partial}{\partial \hat{x}^j}\left(\frac{1}{J}\rho u \hat{u}^j\right)$$
$$+ m_2 \frac{1}{J}\rho u\left(+u\frac{m_2}{m_1}\frac{\partial m_1}{\partial \hat{y}} - v\frac{m_1}{m_2}\frac{\partial m_2}{\partial \hat{x}}\right) \tag{2.1.79}$$

$(i=3)$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}^j}\left(\frac{1}{J}\rho \bar{u}^3 \hat{u}^j\right) + \frac{1}{J}\rho \bar{u}^j \bar{u}^k \bar{\Gamma}^3_{jk} = \frac{\partial}{\partial \hat{x}^j}\left(\frac{1}{J}\rho w \hat{u}^j\right) \tag{2.1.80}$$

以上を用いて運動量保存の式を表すと次のようになる。ただし、shallow assumption を適用した場合は角運動量を保存させるために Ω_1, Ω_2 の項を省略する必要があるため、以下の式ではこれらの項を省略している。

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho u\right) + \frac{\partial}{\partial \hat{x}^j}\left(\frac{1}{J}\rho u \hat{u}^j\right)$$
$$+ \frac{1}{J}\rho v\left(-u\frac{m_2}{m_1}\frac{\partial m_1}{\partial \hat{y}} + v\frac{m_1}{m_2}\frac{\partial m_2}{\partial \hat{x}}\right) \tag{2.1.81}$$
$$+ \frac{1}{J}\frac{\partial \hat{x}^n}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial \hat{x}^n} - \frac{1}{J}2\rho\Omega_3 v = \frac{1}{J}F^1$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho v\right) + \frac{\partial}{\partial \hat{x}^j}\left(\frac{1}{J}\rho v \hat{u}^j\right)$$
$$+ \frac{1}{J}\rho u\left(+u\frac{m_2}{m_1}\frac{\partial m_1}{\partial \hat{y}} - v\frac{m_1}{m_2}\frac{\partial m_2}{\partial \hat{x}}\right) \tag{2.1.82}$$
$$+ \frac{1}{J}\frac{\partial \hat{x}^n}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial \hat{x}^n} + \frac{1}{J}2\rho\Omega_3 u = \frac{1}{J}F^2$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho w\right) + \frac{\partial}{\partial \hat{x}^j}\left(\frac{1}{J}\rho w \hat{u}^j\right)$$
$$+ \frac{1}{J}\frac{\partial \hat{x}^n}{\partial z}\frac{\partial p}{\partial \hat{x}^n} + \frac{1}{J}\rho g = \frac{1}{J}F^3 \tag{2.1.83}$$

参考文献

石田純一, 2008: 気象庁非静力学モデルの支配方程式系と地形に沿う鉛直ハイブリッド座標の導入. 数値予報課報告・別冊第 54 号, 気象庁予報部, 27–43.

Klemp, J. B. and R. B. Wilhelmson, 1978: The simulation of three-dimensional convective storm dynamics. *J. Atmos. Sci.*, **35**, 1070–1096.

Ooyama, K., 2001: A Dynamic and Thermodynamic Foundation for Modeling the Moist Atmosphere with Parameterized Microphysics. *J. Atmos. Sci.*, **58**, 2073–2102.

斉藤和雄, 2003: 支配方程式. 数値予報課報告・別冊第 49 号, 気象庁予報部, 16–25.

Skamarock, W. C., J. B. Klemp, J. Dudhia, D. O. Gill, D. M. Barker, M. G. Duda, X. Y. Huang, W. Wang, and J. G. Powers, 2008: *A Description of the Advanced Research WRF Version 3*. NCAR TECHNICAL NOTE, 113pp.

2.2　空間離散化 [1]

2.2.1　格子配置

asuca の格子系は、水平方向には Arakawa-C 格子 (Arakawa and Lamb 1977)、鉛直方向には Lorenz 格子 (Lorenz 1960; Arakawa and Konor 1996) を採用している。すなわち、ρ, $\rho\theta_m$ などのスカラー量はセルの中心に定義し、u, v, w はセル中心からそれぞれ x 方向、y 方向、z 方向に半格子だけずらして配置する。以後、セル中心を p ポイントと呼ぶこととし、格子の x, y, z 方向の番号を i, j, k とした場合にそこから半格子ずらした位置を表すため、例えば i と $i+1$ 間の格子境界を $i+\frac{1}{2}$ と表すこととする。また、$\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k\right)$ のように x 方向、y 方向に半格子ずれた点を q ポイントと呼ぶこととする。この格子配置の模式図を図 2.2.1、図 2.2.2、図 2.2.3 に示す。

このように格子系をとることで、移流計算における空間差分誤差を減らすことができるだけでなく、u, v, w が格子境界に配置されることにより、後に述べる有限体積法におけるフラックス計算が容易となる [2]。

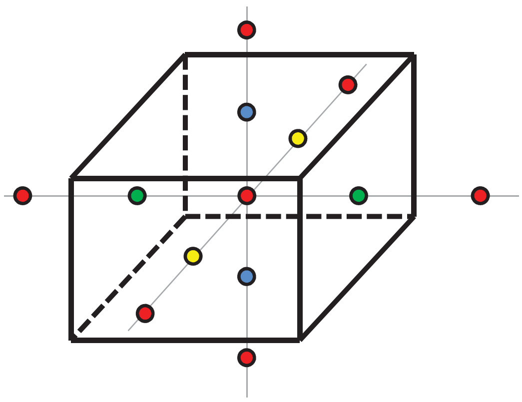

図 2.2.1　3 次元で見た格子配置の模式図。スカラー量はセルの中心となる赤点に定義する。緑色、黄色、水色の点がそれぞれ u, v, w を定義するポイントとなる。

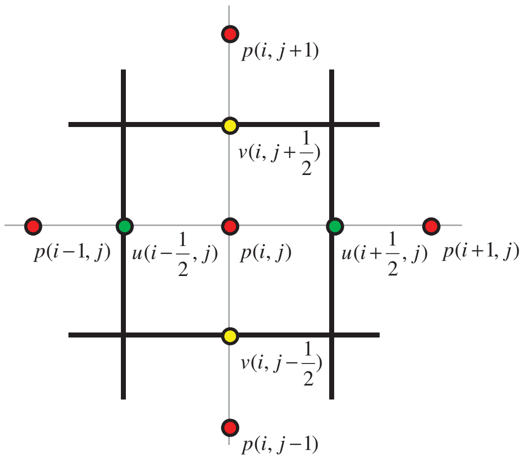

図 2.2.2　図 2.2.1 を x-y 方向の 2 次元で見た場合の模式図。

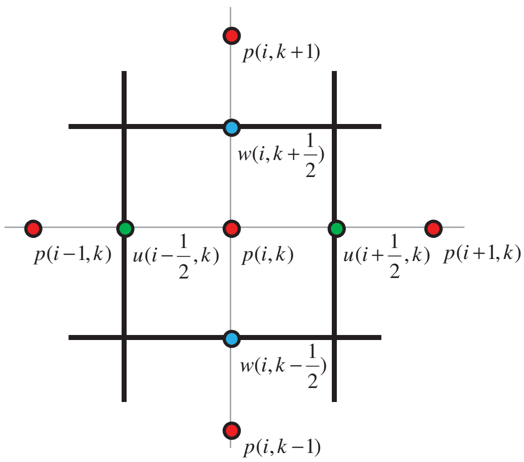

図 2.2.3　図 2.2.1 を x-z 方向の 2 次元で見た場合の模式図。

2.2.2　鉛直層配置

asuca では一般座標系を採用しているが、物理空間における鉛直方向の層配置は Ishida (2007)、石田 (2008) による鉛直ハイブリッド座標系となるように設定している。鉛直ハイブリッド座標系は、下層では地形に沿い、高度が上がるにしたがって地形の影響が小さくなり、ある高度より上空では水平になるという座標系である。この座標系の利点として、下部境界において風の鉛直速度が 0 となるため扱いが容易である、第 2.1.2 項で課せられた重力加速度と鉛直座標が平行であるという条件を満たす、鉛直方向の差分誤差を減らすことができる、といった点が挙げられる。鉛直ハイブリッド座標に関する詳しい説明は、石田 (2008) を参照いただきたい。

2.2.3　有限体積法

asuca では、保存性を保ちなおかつ可変格子への対応が容易なように、有限体積法を採用している。離散化するにあたり、セル中心に定義したスカラー量は、そのセル内の平均値であるとする。有限体積法ではセル内のスカラー量の総量の時間変化を、側面からのフラックスの流出入によって求める。例えば、(i, j, k) を中心とするセル考えた場合、x 方向に半格子ずれた $i+\frac{1}{2}$ 格子境界における流出は、そのまま隣の $(i+1, j, k)$ を中心とするセルにおける流入とする。このようにすることで、保存性を損なうことなく計算を行うことができる。以下では、有限体積法による方程式系の定式化を行う。

[1] 松林 健吾、河野 耕平、石田 純一、室井 ちあし

[2] ただし、風自体の移流計算においては、u, v, w を格子中心へ内挿する必要がある。

あるセル内の物理量 Q の時間変化を、境界から流出入するフラックスで考えると、積分型ではある閉曲面 S によって囲まれた体積要素 Ω の物理量 Q の時間変化が、境界を通じた Q の流出入でもたらされるとすると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\int QdV = -\int \vec{F}\cdot\vec{n}dS \tag{2.2.1}$$

が導かれる。ここで $\vec{F}$ はフラックスであり、$\vec{n}$ はこのセルの表面に垂直な単位ベクトル、$\int dV$ はセルの体積積分、$\int dS$ はセルを囲む閉曲面の表面積分である。

ここで、(2.2.1) 式を離散化すると、次式のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t}Q\Delta\xi\Delta\eta\Delta\zeta = -\left(F_1\Delta\eta\Delta\zeta\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} - \left(F_2\Delta\xi\Delta\zeta\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - \left(F_3\Delta\xi\Delta\eta\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \tag{2.2.2}$$

ここで、$\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$ はセルの ξ, η, ζ 方向の長さを、$()_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}}$ は、$i-\frac{1}{2}$ 境界と $i+\frac{1}{2}$ 境界に直交するフラックス流出入の和を表す。第 2.1.2 項で述べたように、asuca では一般座標変換により、計算空間上では各格子は辺の長さ 1 の六面体として扱うことができる。このため、

$$\Delta\xi = \Delta\eta = \Delta\zeta = 1 \tag{2.2.3}$$

となり、有限体積法で記述した積分型の方程式は簡単に

$$\frac{\partial}{\partial t}Q = -\left(F_1\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} - \left(F_2\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - \left(F_3\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \tag{2.2.4}$$

となる。

以上より、(2.1.64) 式から (2.1.69) 式はそれぞれ以下のように離散化することができる。

連続の式

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho'\right) = -\left(\frac{1}{J}\rho U\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{J}\rho V\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{J}\rho W\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{1}{J}F'_\rho \tag{2.2.5}$$

運動量保存の式

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho u\right) = -\left(\frac{1}{J}\rho uU\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{J}\rho uV\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{J}\rho uW\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - \gamma R_d\pi\left\{\left(\frac{1}{J}\xi_x(\rho\theta_m)'\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{J}\eta_x(\rho\theta_m)'\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{J}\zeta_x(\rho\theta_m)'\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\right\} + \frac{1}{J}F'_u \tag{2.2.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho v\right) = -\left(\frac{1}{J}\rho vU\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{J}\rho vV\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{J}\rho vW\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - \gamma R_d\pi\left\{\left(\frac{1}{J}\xi_y(\rho\theta_m)'\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{J}\eta_y(\rho\theta_m)'\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{J}\zeta_y(\rho\theta_m)'\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\right\} + \frac{1}{J}F'_v \tag{2.2.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho w\right) = -\left(\frac{1}{J}\rho wU\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{J}\rho wV\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{J}\rho wW\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - \gamma R_d\pi\left\{\left(\frac{1}{J}\xi_z(\rho\theta_m)'\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{J}\eta_z(\rho\theta_m)'\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{J}\zeta_z(\rho\theta_m)'\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\right\} - \left(\frac{\rho'}{J} - \frac{\pi'}{\pi}\frac{\overline{\rho}}{J}\right)g + \frac{1}{J}F'_w \tag{2.2.8}$$

温位の式

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}(\rho\theta_m)'\right) = -\left(\frac{1}{J}\rho\theta_m U\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{J}\rho\theta_m V\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{J}\rho\theta_m W\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{1}{J}F_{\rho\theta_m} \tag{2.2.9}$$

水物質の式

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho q_\alpha\right) = -\left(\frac{1}{J}\rho q_\alpha U\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{J}\rho q_\alpha V\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{J}\rho q_\alpha (W + W_{t_\alpha})\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{1}{J}F_{\rho\alpha} \tag{2.2.10}$$

参考文献

Arakawa, A. and C. S. Konor, 1996: Vertical Differencing of the Primitive Equations Based on the Charney - Phillips Grid in Hybrid σ-p Vertical Coordinates. *Mon. Wea. Rev.*, **124**, 511–528.

Arakawa, A. and V. R. Lamb, 1977: Computational design of the basic dynamical processes of the UCLA general circulation model. *Methods in Computational Physics*, Academic Press, Vol. 17, 173–265.

石田純一, 2008: 気象庁非静力学モデルの支配方程式系と地形に沿う鉛直ハイブリッド座標の導入. 数値予報課報告・別冊第 54 号, 気象庁予報部, 27–43.

Ishida, J., 2007: Development of a hybrid terrain-following vertical coordinate for JMA Non-hydrostatic Model. *CAS/JSC WGNE Res. Activ. Atmos. Oceanic Modell.*, **37**, 309–310.

Lorenz, E. N., 1960: Energy and Numerical Weather Prediction. *Tellus*, **12**, 364–373.

2.3 時間離散化 [1]

2.3.1 はじめに

この節では、これまでに定式化した方程式系を時間積分する手法について説明する。まず、第 2.3.2 項で asuca で採用している時間積分スキームとその性質について述べる。次に、完全圧縮方程式系では解に音波が含まれるため、これを効率的かつ安定に解くために用いている split-explicit 法について第 2.3.3 項で述べる。第 2.3.4 項では水物質の落下計算の手法について、第 2.3.5 項では時間積分における時間変化率の扱いについて説明する。

2.3.2 時間積分スキーム

ある予報変数 f の時間変化率を $F(f)$ とした場合、方程式は

$$\frac{\partial f}{\partial t} = F(f) \tag{2.3.1}$$

で表される。この式の左辺の時間微分をどのように離散化するかによって、精度や計算安定性、計算速度、計算に必要なメモリの量が変わる。例えば、簡単な例として前進差分スキームの場合は、

$$\frac{f^{t+\Delta t} - f^t}{\Delta t} = F(f^t) \tag{2.3.2}$$

のように離散化を行う。ここで f^t, $f^{t+\Delta t}$ は、それぞれ時刻 t と $t+\Delta t$ における f を表す。ただし、このスキームは対象となる方程式が移流方程式などの振動系の場合は、安定に解けないという問題がある。

高精度で高速、安定かつ必要なメモリ量が少なくて済む、といった全ての要求を満たす時間積分スキームは存在しないため、目的に応じた時間積分スキームを選択する必要がある。

JMA-NHM では時間積分スキームに次式で表されるリープフロッグ法を採用している。

$$\frac{f^{t+\Delta t} - f^{t-\Delta t}}{2\Delta t} = F(f^t) \tag{2.3.3}$$

リープフロッグ法は 2 次精度であり、1 回の時間積分に必要となる計算量が少ないという利点はあるが、計算モードという偽の数値解が現れる。このため、計算モードを抑えるために Asselin のタイムフィルター (Asselin 1972) を導入しており、これにより時間積分スキームの精度は 1 次となっている。なお、リープフロッグ法については、Durran (2010) が詳しい。

asuca では、時間積分スキームとして Wicker and Skamarock (2002) による 3 段階ルンゲクッタ法 (以下、RK3) を採用している。ルンゲクッタ法では、Δt より短い積分時間間隔で仮積分を行い、その仮積分値を用いて時間積分を行う。一般に 3 段階ルンゲクッタ法では、仮積分値を f^*, f^{**} とすると、以下の 3 ステップにより計算を行う。

$$f^* = f^t + F(f^t, t)c_2\Delta t \tag{2.3.4}$$

$$\begin{aligned} f^{**} = f^t + \Delta t[&a_1F(f^t, t) \\ &+a_2F(f^*, t+c_2\Delta t)] \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

$$\begin{aligned} f^{t+\Delta t} = f^t + \Delta t[&b_1F(f^t, t) \\ &+b_2F(f^*, t+c_2\Delta t) \\ &+b_3F(f^{**}, t+c_3\Delta t)] \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

であり、a, b, c はそれぞれ定数で、a, b, c のとり方により精度が変わる。例えば、

$$f^* = f^t + \frac{\Delta t}{3}F(f^t, t) \tag{2.3.7}$$

$$f^{**} = f^t + \frac{2\Delta t}{3}F\left(f^*, t+\frac{\Delta t}{3}\right) \tag{2.3.8}$$

$$\begin{aligned} f^{t+\Delta t} = f^t + \frac{\Delta t}{4}\bigg[&F(f^t, t) \\ &+3F\left(f^{**}, t+\frac{2\Delta t}{3}\right)\bigg] \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

とする方法は、3 次精度のホイン法として知られている。

このような、3 段階 3 次精度のルンゲクッタ法は計算安定性が高いことが知られているが、t から $t+\Delta t$ への時間積分を行うために 3 段階の時間積分を行う必要があり、計算コストがかかる。また、3 段階の各ステップに置ける状態をメモリ上に残しておく必要があるため、メモリの使用量が多い。この他に、複数のステップの状態を元に計算を行うため、プログラムの構造が複雑になるといった欠点がある。

一方、asuca で採用した RK3 では以下の 3 ステップにより時間積分を行う。

$$f^* = f^t + \frac{\Delta t}{3}F(f^t, t) \tag{2.3.10}$$

$$f^{**} = f^t + \frac{\Delta t}{2}F\left(f^*, t+\frac{\Delta t}{3}\right) \tag{2.3.11}$$

$$f^{t+\Delta t} = f^t + \Delta tF\left(f^{**}, t+\frac{\Delta t}{2}\right) \tag{2.3.12}$$

この方法も、1 回の時間積分を実行するのに 3 段階の計算を行う必要があるものの、前述の 3 段階 3 次精度

[1] 松林 健吾、河野 耕平、石田 純一、室井 ちあし

のルンゲクッタ法と比べて、計算に必要となるメモリが2ステップ分のみであるため、メモリの使用量が少なくてすみ、プログラムも簡便であるという利点がある。精度は通常は2次精度、F が f に対して線形となる問題では3次精度となり、JMA-NHMで採用しているリープフロッグ法とAsselinのタイムフィルターの組み合わせより時間差分精度が高い。なお、RK3の精度に関する説明は、付録2.3.Aに記す。

また、RK3は計算安定性も高い。格子間隔を Δx、積分時間間隔を Δt、風速を U としたとき、

$$\nu = U\frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{2.3.13}$$

で表される ν はクーラン数と呼ばれる量で、RK3ではリープフロッグ法に比べてより大きなクーラン数でも安定に計算を行うことができる。すなわち、Wicker and Skamarock (2002) に示されているように、RK3はリープフロッグ法に比べて安定性が高く、積分時間間隔を大きく取れる。なお、RK3の安定性に関する詳しい説明は付録2.3.Bに記す。

このことから、RK3はリープフロッグ法より1ステップあたりの計算量は多いが、RK3の方がリープフロッグ法より積分時間間隔を長くとることができるため、効率的に計算を行える。

最後に、asucaで採用しているRK3とJMA-NHMで採用しているAsselinフィルターを用いたリープフロッグ法(以下、Asselin-LF)、また参考のために3次ホイン法の利点・欠点を表2.3.1にまとめる。この表から分かるように、RK3を採用することでAsselin-LFより計算量こそ増えるものの、プログラム構造を複雑化させることなく精度・計算安定性を向上させ、使用メモリを削減することができる。

以上の結果を踏まえ、asucaではRK3を時間積分スキームとして採用している。

2.3.3 split-explicit 法

asucaでは完全圧縮方程式系を採用しており、解には音波が含まれる。音波は非常に高速であるため、音波を安定に解くために積分時間間隔を決めると、積分時間間隔を非常に短くする必要がある。特に、鉛直層間隔は水平格子間隔に比べて小さく、下層ほど層間隔が小さくなるため、条件は更に厳しくなる。天気予報において重要な移流や、ロスビー波といった現象は音波に比べると低速であるため、気象学的に重要でない音波に合わせて積分時間間隔を決めると、計算効率が極めて悪い。また、音波ほど高速ではないものの、重力波もその他の現象に比べて高速であり、安定に解くための工夫が必要になる。このため、asucaでは効率的に計算を行うために、音波や重力波に関する項は短い積分時間間隔に分割して積分を行い、その他の項については積分時間間隔を分割せずに積分を行うsplit-explicit法 (Klemp and Wilhelmson 1978; Klemp et al. 2007) を採用している。split-explicit法では、積分時間間隔 Δt に対し、音波を安定に解ける積分時間間隔を $\Delta\tau = \Delta t/n$ とした場合[2]、音波と重力波に関連する項は積分時間間隔 $\Delta\tau$ の時間積分を n 回繰り返して行い、その他の項については Δt の時間積分を1回行う。

ただし、鉛直方向については水平方向より格子間隔が非常に小さく、鉛直方向の層間隔に合わせて短い積分時間間隔を定めると、結果として積分回数が非常に多くなり、効率が極めて悪い[3]。このため、鉛直方向の音波と重力波の関連項についてはインプリシットに計算を行うこととしている。インプリシットスキームとは、前項の (2.3.2) 式において、時間変化率の計算に時刻 $t+\Delta t$ における f を用いる方法である。すなわち、

$$\frac{\partial f}{\partial t} = F(f^{t+\Delta t}) \tag{2.3.14}$$

とするスキームである。これに対し、(2.3.2) 式のように時刻 t における f を用いて時間変化率を見積るスキームをイクスプリシットスキームという。イクスプリシットスキームの場合、前項で述べたように計算安定性が積分時間間隔の影響を受けるのに対し、インプリシットスキームは長い積分時間間隔でも安定に解くことができる。ただし、積分時間間隔が大きくなるほど精度の劣化が大きく、また連立方程式を解く必要があるためイクスプリシットスキームより計算量が多い。また、水平方向にインプリシットスキームを用いると大規模な連立方程式を解く必要があり、並列計算機においては他ノードとの通信が必要となり、非常に計算コストがかかる。これらを踏まえ、asucaではsplit-explicit法により、短い時間間隔への分割回数が少なくて済む[4]水平方向はイクスプリシットに計算し、鉛直方向はインプリシットに計算するようにしている。インプリシットスキーム、イクスプリシットスキームに関する詳しい説明はDurran (2010) や荒波ほか (2012) を参照頂きたい。

JMA-NHMでも同様にsplit-explicit法を採用しているが、asucaでは密度を予報変数にしているのに対し、JMA-NHMでは気圧を予報変数としている。このため、以降に述べる定式化はJMA-NHMにおけるものとは異なる。

(1) 離散化

運動量保存の式、温位の式及び連続の式において、気圧傾度力項、発散項、温位移流項が音波を安定に解

[2] 音波のほうが重力波より高速であるため、短い積分時間間隔は音速を元に決める。

[3] 例えば、LFMと同じ仕様でasucaを実行する場合、水平格子間隔は2 kmであるのに対し、鉛直方向の格子間隔は最下層では40 mとなる。

[4] asucaでは音速を大まかに400 m/sとし、これを安定に解けるように短い積分時間間隔を定めている。現時点ではasucaを水平格子間隔2 kmで実行する場合、積分時間間隔は $\Delta t = 50/3$ 秒で実行している。この場合は、Δt は最大4回に分割することとなる。

表 2.3.1　Asselin-LF、RK3 と 3 次ホイン法の性能比較表

	Asselin-LF	RK3	3 次のホイン法
精度	1 次精度	2 次精度 ($F(f)$ が線形の場合は 3 次精度)	3 次精度
計算安定性	RK3 と 3 次ホイン法は同じであり、Asselin-LF より安定。		
1 ステップあたりの計算量の比	1	3	3
必要メモリ量の比	3	2	3
プログラムの構造	分かりやすい	分かりやすい	複雑

くために短い積分時間間隔で扱うべき項であり、これに浮力項を追加することで重力波も安定に解くことができる (Klemp et al. 2007)。そこで、その他の項 (摩擦項や運動量の移流項など) をそれぞれ R_u, R_v, R_w と書き、短い積分時間間隔で評価する項とその他を整理すると、(2.2.5) 式から (2.2.9) 式は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho u\right) = -\gamma R_d \pi \left\{ \left(\frac{1}{J}\xi_x(\rho\theta_m)'\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{J}\eta_x(\rho\theta_m)'\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{J}\zeta_x(\rho\theta_m)'\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right\} + R_u \tag{2.3.15}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho v\right) = -\gamma R_d \pi \left\{ \left(\frac{1}{J}\xi_y(\rho\theta_m)'\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{J}\eta_y(\rho\theta_m)'\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{J}\zeta_y(\rho\theta_m)'\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right\} + R_v \tag{2.3.16}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho w\right) = -\gamma R_d \pi \left\{ \left(\frac{1}{J}\xi_z(\rho\theta_m)'\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{J}\eta_z(\rho\theta_m)'\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{J}\zeta_z(\rho\theta_m)'\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right\} - \left(\frac{\rho'}{J} - \frac{\pi'}{\overline{\pi}}\frac{\overline{\rho}}{J}\right) g + R_w \tag{2.3.17}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}(\rho\theta_m)'\right) = -\left(\frac{1}{J}(\rho\theta_m)'U\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{J}(\rho\theta_m)'V\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{J}(\rho\theta_m)'W\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{1}{J}F_{\rho\theta_m} \tag{2.3.18}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho'\right) = -\left(\frac{1}{J}\rho U\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{J}\rho V\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{J}\rho W\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{1}{J}F'_\rho \tag{2.3.19}$$

ただし、

$$R_u = -\left(\frac{1}{J}\rho u U\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{J}\rho u V\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{J}\rho u W\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{1}{J}F'_u \tag{2.3.20}$$

$$R_v = -\left(\frac{1}{J}\rho v U\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{J}\rho v V\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{J}\rho v W\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{1}{J}F'_v \tag{2.3.21}$$

$$R_w = -\left(\frac{1}{J}\rho w U\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{J}\rho w V\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{J}\rho w W\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{1}{J}F'_w \tag{2.3.22}$$

である。

まず、(2.3.15) 式と (2.3.16) 式から u, v の未来値を次のようにしてイクスプリシットに求める。以下では、分割した短い積分時間間隔を $\Delta\tau$ とし、分割した時間積分における未来時刻及び現在時刻における値を上付き添字の $\tau+\Delta\tau$ と τ で表す。短い積分時間間隔で評価を行わない項に関しては、短い時間積分を繰り返す間は不変であるため、現在時刻における値を上付き添字 t で表す。

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{J}\rho u\right)^{\tau+\Delta\tau} =& \left(\frac{1}{J}\rho u\right)^{\tau} \\
& - \gamma R_d \pi^t \left\{ \left(\frac{1}{J}\xi_x (\rho\theta_m)'^{\tau}\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \right. \\
& \quad + \left(\frac{1}{J}\eta_x (\rho\theta_m)'^{\tau}\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} \\
& \quad \left. + \left(\frac{1}{J}\zeta_x (\rho\theta_m)'^{\tau}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right\} \Delta\tau \\
& + R_u^t \Delta\tau
\end{aligned}
\tag{2.3.23}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{J}\rho v\right)^{\tau+\Delta\tau} =& \left(\frac{1}{J}\rho v\right)^{\tau} \\
& - \gamma R_d \pi^t \left\{ \left(\frac{1}{J}\xi_y (\rho\theta_m)'^{\tau}\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \right. \\
& \quad + \left(\frac{1}{J}\eta_y (\rho\theta_m)'^{\tau}\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} \\
& \quad \left. + \left(\frac{1}{J}\zeta_y (\rho\theta_m)'^{\tau}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right\} \Delta\tau \\
& + R_v^t \Delta\tau
\end{aligned}
\tag{2.3.24}
$$

ここで、π はエクスナー関数である。計算コスト削減のために [5] 時刻 t の値をそのまま用いることとしている。

(2.3.23) 式と (2.3.24) 式の右辺の変数は全て既知の値であるため、この式から $\tau+\Delta\tau$ における u, v が求まる。

次に、インプリシットに計算するために (2.3.17) 式、(2.3.18) 式、(2.3.19) 式 の ρ', ρu, ρv, ρw, $(\rho\theta_m)'$ を未来値を用いて表す。

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{J}\rho w\right)^{\tau+\Delta\tau} =& \left(\frac{1}{J}\rho w\right)^{\tau} \\
& - \left\{ \gamma R_d \pi^t \left(\frac{1}{J}\zeta_z (\rho\theta_m)'^{\tau+\Delta\tau}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\rho'^{\tau+\Delta\tau} g}{J} - \frac{\pi'^t}{\overline{\pi}} \frac{\overline{\rho}}{J} g \right\} \Delta\tau \\
& - \left\{ \gamma R_d \pi^t \left(\frac{1}{J}\xi_z (\rho\theta_m)'^{\tau+\Delta\tau}\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \right. \\
& \quad \left. + \gamma R_d \pi^t \left(\frac{1}{J}\eta_z (\rho\theta_m)'^{\tau+\Delta\tau}\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} \right\} \Delta\tau \\
& + R_w^t \Delta\tau
\end{aligned}
\tag{2.3.25}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{J}(\rho\theta_m)'\right)^{\tau+\Delta\tau} =& \left(\frac{1}{J}(\rho\theta_m)'\right)^{\tau} \\
& - \left\{ \left(\frac{1}{J}\zeta_z \theta_m^{\tau} (\rho w)^{\tau+\Delta\tau}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right\} \Delta\tau \\
& - \left\{ \left(\frac{1}{J}\theta_m^{\tau} \widetilde{(\rho U)}\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{J}\theta_m^{\tau} \widetilde{(\rho V)}\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} \right. \\
& \left. + \left(\frac{1}{J}\theta_m^{\tau} \widetilde{(\rho W)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right\} \Delta\tau + \frac{1}{J} F_{\rho\theta_m}^t \Delta\tau
\end{aligned}
\tag{2.3.26}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{J}\rho'\right)^{\tau+\Delta\tau} =& \left(\frac{1}{J}\rho'\right)^{\tau} \\
& - \left\{ \left(\frac{1}{J}\zeta_z (\rho w)^{\tau+\Delta\tau}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right\} \Delta\tau \\
& - \left\{ \left(\frac{1}{J}\widetilde{(\rho U)}\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{J}\widetilde{(\rho V)}\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{1}{J}\widetilde{(\rho W)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right\} \Delta\tau \\
& + \frac{1}{J} F_{\rho}^t \Delta\tau
\end{aligned}
\tag{2.3.27}
$$

ただし $\widetilde{(\rho U)}, \widetilde{(\rho V)}, \widetilde{(\rho W)}$ は

$$
\begin{aligned}
\widetilde{(\rho U)} =& \xi_x (\rho u)^{\tau+\Delta\tau} + \xi_y (\rho v)^{\tau+\Delta\tau} + \xi_z (\rho w)^{\tau+\Delta\tau} \\
\widetilde{(\rho V)} =& \eta_x (\rho u)^{\tau+\Delta\tau} + \eta_y (\rho v)^{\tau+\Delta\tau} + \eta_z (\rho w)^{\tau+\Delta\tau} \\
\widetilde{(\rho W)} =& \zeta_x (\rho u)^{\tau+\Delta\tau} + \zeta_y (\rho v)^{\tau+\Delta\tau}
\end{aligned}
$$

である。

ここで、第 2.1.2 項で述べたように、z 軸と ζ 軸を平行となるように座標系をとることにより、$\xi_z = \eta_z = 0$ となる。

[5] エクスナー関数の計算にはべき乗が必要であり、計算コストがかかる。

これにより、$\widetilde{(\rho U)}, \widetilde{(\rho V)}, \widetilde{(\rho W)}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\widetilde{(\rho U)} =& \xi_x(\rho u)^{\tau+\Delta\tau} + \xi_y(\rho v)^{\tau+\Delta\tau} \\
\widetilde{(\rho V)} =& \eta_x(\rho u)^{\tau+\Delta\tau} + \eta_y(\rho v)^{\tau+\Delta\tau} \\
\widetilde{(\rho W)} =& \zeta_x(\rho u)^{\tau+\Delta\tau} + \zeta_y(\rho v)^{\tau+\Delta\tau}
\end{aligned}$$

また、(2.3.25) 式の右辺第 3 項が消える。つまり、(2.3.25) 式、(2.3.26) 式、(2.3.27) 式がインプリシットに扱えるようになる。

鉛直方向の運動量保存の式、温位の式及び連続の式において、時刻 t, τ で評価される項及び時刻 $\tau + \Delta\tau$ の u, v を使って評価される項、すなわち既知の項をまとめて $R'_w, R'_{\theta_m}, R'_\rho$ と書き直すと (2.3.25) 式から (2.3.27) 式は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{J}\rho w\right)^{\tau+\Delta\tau} =& \left(\frac{1}{J}\rho w\right)^{\tau} \\
&-\left\{\gamma R_d \pi^t \left(\frac{1}{J}\zeta_z(\rho\theta_m)'^{\tau+\Delta\tau}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right. \\
&\left. +\frac{\rho'^{\tau+\Delta\tau}g}{J}\right\}\Delta\tau \\
&+ R'_w\Delta\tau
\end{aligned} \tag{2.3.28}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{J}(\rho\theta_m)'\right)^{\tau+\Delta\tau} =& \left(\frac{1}{J}(\rho\theta_m)'\right)^{\tau} \\
&-\left\{\left(\frac{1}{J}\zeta_z\theta_m^\tau(\rho w)^{\tau+\Delta\tau}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\right\}\Delta\tau \\
&+ R'_{\theta_m}\Delta\tau
\end{aligned} \tag{2.3.29}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{J}\rho'\right)^{\tau+\Delta\tau} =& \left(\frac{1}{J}\rho'\right)^{\tau} \\
&-\left\{\left(\frac{1}{J}\zeta_z(\rho w)^{\tau+\Delta\tau}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\right\}\Delta\tau \\
&+ R'_\rho\Delta\tau
\end{aligned} \tag{2.3.30}$$

ただし、

$$R'_w = \frac{\pi'^t}{\overline{\pi}}\frac{\overline{\rho}}{J}g + R_w = -\left(1-\frac{\pi^t}{\overline{\pi}}\right)\frac{\overline{\rho}}{J}g + R_w \tag{2.3.31}$$

$$\begin{aligned}
R'_{\theta_m} =& -\left\{\left(\frac{1}{J}\theta_m^\tau\widetilde{(\rho U)}\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{J}\theta_m^\tau\widetilde{(\rho V)}\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}\right. \\
&\left. + \left(\frac{1}{J}\theta_m^\tau\widetilde{(\rho W)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\right\} + \frac{1}{J}F^t_{\rho\theta_m}
\end{aligned} \tag{2.3.32}$$

$$\begin{aligned}
R'_\rho =& -\left\{\left(\frac{1}{J}\widetilde{(\rho U)}\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{J}\widetilde{(\rho V)}\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}\right. \\
&\left. + \left(\frac{1}{J}\widetilde{(\rho W)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\right\} + \frac{1}{J}F^t_{\rho}
\end{aligned} \tag{2.3.33}$$

これらの式から、まず ρw を求めるために、(2.3.28) 式における $((\rho\theta_m)'/J)^{\tau+\Delta\tau}$ と $(\rho'/J)^{\tau+\Delta\tau}$ を消去することを考える。さらに表記を簡便にするために

$$\left(\frac{1}{J}\rho w\right)^{\tau+\Delta\tau} = \omega \tag{2.3.34}$$

とおき、w はセル中心から半格子ずれた位置に定義したことを考慮して、(2.3.28) 式を w ポイントを中心として書き直すと、

$$\begin{aligned}
\omega_{k+\frac{1}{2}} =& \left(\frac{1}{J}\rho w\right)^{\tau}_{k+\frac{1}{2}} \\
&- \gamma R_d \pi^t_{k+\frac{1}{2}}\left\{\left(\zeta_z\frac{(\rho\theta_m)'}{J}^{\tau+\Delta\tau}\right)_{k+1}\right. \\
&\left. - \left(\zeta_z\frac{(\rho\theta_m)'}{J}^{\tau+\Delta\tau}\right)_k\right\}\Delta\tau \\
&- \left(\frac{\rho'^{\tau+\Delta\tau}}{J}\right)_{k+\frac{1}{2}}\Delta\tau g + R'_{w k+\frac{1}{2}}\Delta\tau
\end{aligned} \tag{2.3.35}$$

となる。さらに、$(\rho\theta_m)', \rho'$ がセル中心で定義されることを考慮すると、

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{J}(\rho\theta_m)'\right)^{\tau+\Delta\tau}_k =& \left(\frac{1}{J}(\rho\theta_m)'\right)^{\tau}_k \\
&-\left\{(\zeta_z\theta_m^\tau\omega)_{k+\frac{1}{2}} - (\zeta_z\theta_m^\tau\omega)_{k-\frac{1}{2}}\right\}\Delta\tau \\
&+ (R'_{\theta_m})_k\Delta\tau
\end{aligned} \tag{2.3.36}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{J}\rho'\right)^{\tau+\Delta\tau}_k =& \left(\frac{1}{J}\rho'\right)^{\tau}_k \\
&-\left\{(\zeta_z\omega)_{k+\frac{1}{2}} - (\zeta_z\omega)_{k-\frac{1}{2}}\right\}\Delta\tau \\
&+ (R'_\rho)_k\Delta\tau
\end{aligned} \tag{2.3.37}$$

が得られる。

以上から $((\rho\theta_m)'/J)^{\tau+\Delta\tau}$ と $(\rho'/J)^{\tau+\Delta\tau}$ を消去して、次の ω に対する代数方程式が導き出せる。

$$C_m\omega_{k-\frac{1}{2}} + C_0\omega_{k+\frac{1}{2}} + C_p\omega_{k+\frac{3}{2}} = R \tag{2.3.38}$$

ただし、

$$\begin{aligned}
C_m =& \\
&\Delta\tau^2(\zeta_z)_{k-\frac{1}{2}}\left(-\gamma R_d\pi^t_{k+\frac{1}{2}}(\zeta_z)_k(\theta_m^\tau)_{k-\frac{1}{2}} + \frac{g}{2}\right)
\end{aligned} \tag{2.3.39}$$

$$C_0 = 1 + \gamma R_d \Delta\tau^2 \left(\zeta_z \pi^t \theta_m^\tau\right)_{k+\frac{1}{2}} \{(\zeta_z)_{k+1} + (\zeta_z)_k\} \tag{2.3.40}$$

$$C_p = \Delta\tau^2 (\zeta_z)_{k+\frac{3}{2}} \left\{ -\gamma R_d \pi^t_{k+\frac{1}{2}} \zeta_{z\,k+1} (\theta_m)^\tau_{k+\frac{3}{2}} - \frac{g}{2} \right\} \tag{2.3.41}$$

$$\begin{aligned} R = & \left(\frac{1}{J}\rho w\right)^\tau_{k+\frac{1}{2}} \\ & - \gamma R_d \pi^t_{k+\frac{1}{2}} \Delta\tau \left[(\zeta_z)_{k+1} \left\{ \left(\frac{1}{J}(\rho\theta_m)'\right)^\tau \right.\right. \\ & \left. + R'_{\theta_m}\Delta\tau \right\}_{k+1} \\ & \left.- (\zeta_z)_k \left\{ \left(\frac{1}{J}(\rho\theta_m)'\right)^\tau + R'_{\theta_m}\Delta\tau \right\}_k \right] \\ & - \Delta\tau \frac{g}{2} \left\{ \left(\frac{1}{J}\rho'^\tau + R'_\rho \Delta\tau\right)_{k+1} \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{J}\rho'^\tau + R'_\rho \Delta\tau\right)_k \right\} \\ & + (R'_w)_{k+\frac{1}{2}} \Delta\tau \end{aligned} \tag{2.3.42}$$

である。

(2.3.38) 式は ω についての連立一次元方程式となっており、その係数行列は 3 重対角行列となる。これに適当な上部・下部境界条件を与えることで ω を求めることができる。次に、上部・下部境界条件について説明する。

(2) 上部・下部境界条件

上部・下部境界条件としてフラックスが 0 となるとして、$W = 0$ ととる [6] 。すなわち、

$$\frac{d\zeta}{dt} = 0 \tag{2.3.43}$$

であるため、

$$u\zeta_x + v\zeta_y + w\zeta_w = 0 \tag{2.3.44}$$

となる。これにより、上部・下部境界における ω は、

$$\omega = \frac{1}{J}\rho w = -\frac{1}{J}\frac{\rho u \zeta_x + \rho v \zeta_y}{\zeta_z} \tag{2.3.45}$$

と表される。

まず、上部境界では等 ζ 面が水平となるとする。このとき、$\zeta_x = \zeta_y = 0$ であるため、$\omega = 0$ となる。

[6] 上部境界の扱いについては、第 2.5.2 項でも述べる。

次に、下部境界条件について考える。asuca では鉛直方向には Lorenz 格子を採用しており、下部境界における u, v の位置と、u, v を定義した位置が異なることに注意が必要となる。

摩擦がある場合は、下部境界における風の全ての成分がゼロとなるため、上部境界と同様に $\omega = 0$ となる。

一方、摩擦無しの場合はさらに、

$$u_{k=\frac{1}{2}} = u_{k=1}, \quad v_{k=\frac{1}{2}} = v_{k=1} \tag{2.3.46}$$

という条件を追加して、

$$\begin{aligned} \omega_{k=\frac{1}{2}} &= \frac{1}{J}(\rho w)_{k=\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{J}\frac{(\rho u)_{k=1}\zeta_x + (\rho v)_{k=1}\zeta_y}{\zeta_z} \end{aligned} \tag{2.3.47}$$

としている。

これらの境界条件をもとに (2.3.38) 式を解くことで、$(\rho w)^{\tau+\Delta\tau}/J$ が求まる。

(3) $(\rho\theta_m)', \rho'$ の計算

以上で時刻 $\tau + \Delta\tau$ での $\rho u, \rho v, \rho w$ が求められたので、(2.3.18) 式、(2.3.19) 式から、$(\rho\theta_m)', \rho'$ を以下の通り求める。

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{J}(\rho\theta_m)'\right)^{\tau+\Delta\tau} = & \left(\frac{1}{J}(\rho\theta_m)'\right)^\tau \\ & - \Delta\tau \left\{ \left(\frac{1}{J}\theta_m^\tau (\rho U)^{\tau+\Delta\tau}\right)^{i+\frac{1}{2}}_{i-\frac{1}{2}} \right. \\ & + \left(\frac{1}{J}\theta_m^\tau (\rho V)^{\tau+\Delta\tau}\right)^{j+\frac{1}{2}}_{j-\frac{1}{2}} \\ & \left. + \left(\frac{1}{J}\theta_m^\tau (\rho W)^{\tau+\Delta\tau}\right)^{k+\frac{1}{2}}_{k-\frac{1}{2}} \right\} + \Delta\tau \frac{1}{J} F^t_{\rho\theta_m} \end{aligned} \tag{2.3.48}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{J}\rho'\right)^{\tau+\Delta\tau} = & \left(\frac{1}{J}\rho'\right)^\tau \\ & - \Delta\tau \left\{ \left(\frac{1}{J}(\rho U)\right)^{i+\frac{1}{2}}_{i-\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{J}(\rho V)\right)^{j+\frac{1}{2}}_{j-\frac{1}{2}} \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{J}(\rho W)\right)^{k+\frac{1}{2}}_{k-\frac{1}{2}} \right\}^{\tau+\Delta\tau} + \Delta\tau \frac{1}{J} F^t_\rho \end{aligned} \tag{2.3.49}$$

右辺の値は全て既知であるため、$(\rho\theta_m)'/J$, $(\rho)'/J$ が求まる。これにより、時刻 $\tau + \Delta\tau$ における $\rho u, \rho v, \rho w, (\rho\theta_m)', \rho'$ が求められた。

このように、分割した短い時間積分を繰り返して水平方向にはイクスプリシットに計算し、鉛直方向にはインプリシットに計算する split-explicit 法を用いることで、音波関連項を安定に、かつ効率的に計算することができる。

(4) $(\rho\theta_m)'$ の移流項の計算

R'_{θ_m} は物理空間における水平風の移流に伴う変化率と、物理過程等による変化率の和とみなせる。また、実際の $(\rho\theta_m)'$ の時間積分においても移流の計算があり、R'_{θ_m} に関する (2.3.32) 式と、分割した時間積分における $(\rho\theta_m)'$ の (2.3.48) 式で同じ定式化となっていることが分かる。$(\rho\theta_m)'$ の時間積分における移流の計算では第 2.4.3 項で述べる流束制限関数等の単調性を保つためのスキームが必要であるが、R'_{θ_m} の計算においては、精度・安定性の面で影響は小さい。現時点では、高速化を目的として R'_{θ_m} における移流の計算では中央 2 次差分を用いている。

2.3.4 水物質の落下の扱い

(1) 水物質の式の鉛直移流項

この項では、(2.2.10) 式における鉛直移流項の扱いについて述べる。

水物質の大気速度からの相対的な落下速度 W_{t_α} は、水物質の比湿 q_α の関数として診断される。W_{t_α} は q_α が増えるに従って大きくなり、特にあられや雹においては最大で 10 m/s を超えることがある。鉛直方向の層間隔は下層ほど小さくなるため、音波と同様の理由により、水物質の鉛直移流項を安定に解くように積分時間間隔を決めると、非常に効率が悪い。

前項で説明したように、このような場合は短い積分時間間隔に分割してイクスプリシットに解く方法と、インプリシットに解く方法の 2 通りが考えられる [7] 。

asuca では精度と計算コストを考慮し、短い積分時間間隔に分割してイクスプリシットに計算を行う time-split 法を採用している。

鉛直方向の移流項を分割した短い時間間隔 $\Delta\tau$ で積分を行い、その他の項 (水平移流項など) は分割せずに Δt で計算を行う。Δt で計算を行う項を $R_{q\alpha}$ とおくと、(2.2.10) 式は次式のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho q_\alpha\right) = -\left(\frac{1}{J}\rho q_\alpha (W + W_{t_\alpha})\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} + R_{q\alpha} \tag{2.3.50}$$

ただし、

$$R_{q\alpha} = -\left(\frac{1}{J}\rho q_\alpha U\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{J}\rho q_\alpha V\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} + \frac{1}{J}F_{\rho\alpha} \tag{2.3.51}$$

上記の式から ρq_α の未来値を求める。短い時間積分における未来時刻及び現在時刻の値をそれぞれ上付き添字の $\tau+\Delta\tau$ と τ で表し、$R_{q\alpha}$ に関しては、短い時間積分を繰り返す間は不変であるとして、現在値を上付き添字 t で表す。

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{J}\rho q_\alpha\right)^{\tau+\Delta\tau} &= \\ \left(\frac{1}{J}\rho q_\alpha\right)^{\tau} &- \Delta\tau\left\{\left(\frac{1}{J}\rho^t q_\alpha^\tau (W^t + W_{t_\alpha}^\tau)\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\right\} \\ &+ R_{q_\alpha}^t \Delta\tau\end{aligned} \tag{2.3.52}$$

短い時間間隔 $\Delta\tau$ は、各カラム毎に鉛直移流のクーラン数 $(\nu = (W^t + W_{t_\alpha}^\tau)\Delta t/\Delta z)$ から以下のように決める。

$$\Delta\tau = \begin{cases}\Delta t & (\max(\nu) \le 1) \\ c\dfrac{\Delta t}{\max(\nu)} & (\max(\nu) > 1)\end{cases} \tag{2.3.53}$$

ここで、c はクーラン数に対してどの程度の割合で短い積分時間間隔をとるかを決める定数であり、asuca の場合は、$c = 0.9$ として計算を行なっている。

短い積分時間間隔 $\Delta\tau$ で 1 回時間積分すると、残りの積分すべき時間は $\Delta t' = \Delta t - \Delta\tau$ となる。$\Delta t'$ についても短い積分時間間隔を診断し、その上で時間積分する。残りの時間がゼロになるまでこれを繰り返す。

ここで、落下速度 W_{t_α} は短い時間積分毎に更新している。これは、W_{t_α} を更新しないと、短い時間積分を繰り返すうちに ρq_α と W_{t_α} が次第に乖離してしまい、精度が低下する可能性があるためである。

(2) 連続の式、運動量保存の式における降水粒子の落下による項

水物質の落下と整合するように、連続の式 (2.2.5) 式に表れる降水粒子の落下による質量変化の項 (以下、PRC 項とする) を評価する。たとえば長い積分時間間隔 Δt を水物質の落下を扱う上で $\Delta\tau_1$ と $\Delta\tau_2$ に分割した場合、PRC 項は以下のように求める。

$$\begin{aligned}\mathrm{FLUX} &\equiv \\ &\frac{\frac{1}{J}\rho^t q_\alpha^t W_{t_\alpha}^t \Delta\tau_1 + \frac{1}{J}\rho^t q_\alpha^{t+\Delta\tau_1} W_{t_\alpha}^{t+\Delta\tau_1}\Delta\tau_2}{\Delta t} \\ \mathrm{PRC} &= (\mathrm{FLUX})_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{2.3.54}$$

FLUX は水物質の落下により各セル境界を通過するフラックスを表す。PRC 項は長い積分時間間隔 Δt の時間変化率として連続の式の時間積分に反映される。運動量保存の式 (2.2.6)、(2.2.7)、(2.2.8) に表れる降水粒子の落下による変化の項は、(2.3.54) 式から求める。

水物質の式における鉛直移流項の評価については、単調性を保つために第 2.4.3 項で述べる流束制限関数を用いるが、連続の式、運動量保存の式における PRC 項の影響は小さい。このため、実際の計算では高速化

[7] この他にもセミラグランジュ法などを用いる方法があるが、それについては第 2.6.3 項で紹介する。

```
timestep_long: do                          ! 時間積分のループ開始
  call diagnose_run_long                   ! 診断変数の計算
  call physics_run_long                    ! 物理過程の Fl の計算（現状；放射・境界層・地表面過程）
  call dynamics_run_long                   ! 力学過程の Fl の計算（現状：無し）
                                           !
  RK_long: do rk_count = 1, 3              ! ルンゲクッタ法 (long) のループ開始
    call diagnose_run_rk_long              ! 診断変数の計算
    call physics_run_rk_long               ! 物理過程の Frk の計算（現状：現業想定仕様では無）
    call dynamics_run_rk_long              ! 力学過程の Frk の計算（現状：移流、コリオリ力、曲率、レイリーダンピング）
    call sediment_run                      ! 力学過程の Frk の計算（現状：降水粒子の鉛直移流）
                                           !
    short: do count_s = 1, nsound          ! ショートタイムステップのループ開始
      call diagnose_run_short              ! 診断変数の計算
      call physics_run_short               ! 物理過程の Fs_l の計算（現状：無し）
      call dynamics_run_short              ! 力学過程の Fs_l の計算（現状：無し）
                                           !
      RK_short: do rk_count_s = 1, 3       ! ショートタイムステップの中のルンゲクッタ法のループ開始
        call diagnose_run_rk_short         ! 診断変数の計算
        call physics_run_rk_short          ! 物理過程の Fs_rk の計算（現状：無し）
        call dynamics_run_rk_short         ! 力学過程の Fs_rk の計算（現状：split-explicit 法による時間積分）
      end do RK_short                      ! ショートタイムステップの中のルンゲクッタ法のループ終了
    end do short                           ! ショートタイムステップのループ終了
    call tmanage_post_short                ! ショートタイムステップ後の時間積分（現状：水物質）
                                           !
  end do RK_long                           ! ルンゲクッタ法 (long) のループ終了
  call tmanage_post_long                   ! ロングタイムステップ後の時間積分（現状：地表面温度、蒸発散効率）
                                           !
  call diagnose_adjust_long                ! 診断変数の計算
  call dynamics_adjust_long                ! 力学過程の Fa の計算（現状：無し）
  call physics_adjust_long                 ! 物理過程の Fa の計算（現状：雲物理過程）
  call tmanage_post_adjust                 ! 時間積分（現状：水物質、温位、密度）
                                           !
end do timestep_long                       ! 時間積分のループ終了
```

図 2.3.1 時間積分の順序を表す模式図。図中 Fl，Frk，Fa はそれぞれ (2.3.55) 式–(2.3.58) 式の $F_{\mathrm{l}}, F_{\mathrm{rk}}, F_{\mathrm{a}}$ を表す。また、Fs_l，Fs_rk はショートタイムステップで時間積分を行う場合の $F_{\mathrm{l}}, F_{\mathrm{rk}}$ を表す。

を目的として PRC 項の計算には中央 2 次差分を用いている。

2.3.5 asuca における時間変化率の扱い

この項では、asuca による時間積分において時間変化率をどのように扱うかについて説明する。なお、物理過程の時間変化率の扱いに関しては、第 4.1.1 項で詳しく述べる。

asuca の中で計算される時間変化率には、移流や音波、水物質の落下のように RK3 時間積分によって評価するものや、物理過程のように RK3 ループの外で扱うものがある。また、それらの時間変化率は、各過程の時間変化率を独立に求めるパラレルスプリッティングとして扱うものと、その他の過程による時間変化率を足しあわせた後の状態から時間変化率を求めるシーケンシャルスプリッティングとして扱うものに分けられる[8]。雲物理過程等の反応の早い項については、シーケンシャルスプリッティングとして別途解いた方が、時間変化率のバランスを取りやすい。

これら時間変化率の扱いを整理するため、パラレルスプリッティングとして扱う時間変化率のうち RK3 ループの外で扱うものを F_{l}、RK3 ループ中で計算するものを F_{rk}、シーケンシャルスプリッティングとして計算する時間変化率を F_{a} で表した上で、RK3 の時間積分を改めて書くと、

$$
\begin{aligned}
f^{*} &= f^{t} + F(f^{t})\cdot\frac{1}{3}\Delta t \\
&= f^{t} + \{F_{\mathrm{rk}}(f^{t}) + F_{\mathrm{l}}(f^{t})\}\cdot\frac{1}{3}\Delta t
\end{aligned}
\tag{2.3.55}
$$

$$
\begin{aligned}
f^{**} &= f^{t} + F(f^{*})\cdot\frac{1}{2}\Delta t \\
&= f^{t} + \{F_{\mathrm{rk}}(f^{*}) + F_{\mathrm{l}}(f^{t})\}\cdot\frac{1}{2}\Delta t
\end{aligned}
\tag{2.3.56}
$$

$$
\begin{aligned}
f^{***} &= f^{t} + F(f^{**})\cdot\Delta t \\
&= f^{t} + \{F_{\mathrm{rk}}(f^{**}) + F_{\mathrm{l}}(f^{t})\}\cdot\Delta t
\end{aligned}
\tag{2.3.57}
$$

$$
f^{t+\Delta t} = f^{***} + F_{\mathrm{a}}(f^{***})\cdot\Delta t \tag{2.3.58}
$$

となる。

F_{l} は時間積分ループの初めに計算を行い、RK3 ループ内 F_{rk} の計算を繰り返し、これらの時間変化率を加えた後に F_{a} を計算する。これら一連の計算により、1 回の時間積分を行う。最後に、asuca における時間積分の模式図を図 2.3.1 に示す。

[8] パラレルスプリッティングとシーケンシャルスプリッティングについては、第 4.1.1 項で詳しく述べる。

2.3.6 まとめ

本節では、asuca における時間離散化手法について説明した。

asuca では、精度と安定性、計算効率、必要メモリ量を考慮し、Wicker and Skamarock (2002) による 3 段階ルンゲクッタ法を時間積分スキームとして採用している。また、音波を安定に効率良く計算するために、音波に関連する項のみを短い積分時間間隔で計算し、鉛直方向にはインプリシットに計算する split-explicit 法を採用している。

しかし、数値計算法全般に言えることであるが、どのような問題に対しても精度、安定性、計算効率、必要とするメモリ量の全てに優れる手法は存在しない。今後も各手法の利点欠点を見極め、現業モデルとして必要な要件を踏まえた上で精査していく必要がある。

付録 2.3.A Wicker and Skamarock (2002) による 3 段階ルンゲクッタ法 (RK3) の差分精度

ここでは、RK3 の差分精度について調べる。(2.3.12) 式に (2.3.10) 式、(2.3.11) 式を代入して RK3 を展開すると、

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{rk}}^{t+\Delta t} =& f^t + F\left[f^t + F\left(f^t + F(f^t)\frac{\Delta t}{3}\right)\frac{\Delta t}{2}\right]\Delta t \\ =& f^t + F(f^t)\Delta t + \frac{1}{2}\frac{dF}{df}F(f^t)\Delta t^2 \\ &+ \left[\frac{1}{6}\left(\frac{dF}{df}\right)^2 + \frac{1}{8}\frac{d^2F}{df^2}F(f)^2\right]\Delta t^3 \\ &+ O(\Delta t^4) \end{aligned} \tag{2.3.59}$$

となる。$f(t+\Delta t)$ を t のまわりでテイラー展開した式は、

$$\begin{aligned} f(t+\Delta t) =& f^t + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\Delta t^2 \\ &+ \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial t^3}\Delta t^3 + O(\Delta t^4) \\ =& f^t + F(f^t)\Delta t + \frac{1}{2}\frac{dF}{df}F(f^t)\Delta t^2 \\ &+ \left[\frac{1}{6}\left(\frac{dF}{df}\right)^2 + \frac{1}{6}\frac{d^2F}{df^2}F(f)^2\right]\Delta t^3 \\ &+ O(\Delta t^4) \end{aligned} \tag{2.3.60}$$

であるため、(2.3.59) 式と (2.3.60) 式の差は、

$$\begin{aligned} & f_{\mathrm{rk}}^{t+\Delta t} - f(t+\Delta t) \\ &= -\frac{1}{24}\frac{d^2F}{df^2}F(f)^2\Delta t^3 + O(\Delta t^4) \end{aligned} \tag{2.3.61}$$

となる。すなわち、

$$\frac{d^2F}{df^2} = 0 \tag{2.3.62}$$

となるような問題に対しては (2.3.59) 式と (2.3.60) 式が等しくなるため、3 次精度であるものの、通常の問題に対しては 2 次精度となることが分かる。

付録 2.3.B RK3(Wicker and Skamarock 2002) の計算安定性について

ここでは、RK3 の計算安定性について von Neumann 法を用いて調べる。

次のような 1 次元の移流方程式を考える。

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -U\frac{\partial f}{\partial x} \tag{2.3.63}$$

ここで U は風速を表し、空間一様であるとする。k を波数とし、f を三角関数で展開すると、

$$f = \sum_k \tilde{f}_k e^{ikx} \tag{2.3.64}$$

となるため、各波数成分 $\tilde{f}_k$ 毎に式を整理すると、

$$\frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial t} = -ikU\tilde{f}_k \tag{2.3.65}$$

となる。$kU = \omega$ とおくと、

$$\frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial t} = -i\omega\tilde{f}_k \tag{2.3.66}$$

となり、これはいわゆる振動系の式となる。$\omega\Delta t = \nu$ とおくと (2.3.10) 式、(2.3.11) 式、(2.3.12) 式は、

$$\tilde{f}_k{}^{*} = \tilde{f}_k{}^{t} - \frac{i\nu}{3}\tilde{f}_k{}^{t} \tag{2.3.67}$$

$$\tilde{f}_k{}^{**} = \tilde{f}_k{}^{t} - \frac{i\nu}{2}\tilde{f}_k{}^{*} \tag{2.3.68}$$

$$\tilde{f}_k{}^{t+\Delta t} = \tilde{f}_k{}^{t} - i\nu\tilde{f}_k{}^{**} \tag{2.3.69}$$

となる。$\tilde{f}_k{}^{*}, \tilde{f}_k{}^{**}$ を消去すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \tilde{f}_k{}^{t+\Delta t} &= \tilde{f}_k{}^{t}\left[1 - i\nu\left\{1 - \frac{i\nu}{2}\left(1 - \frac{i\nu}{3}\right)\right\}\right] \\ &= \tilde{f}_k{}^{t}\left\{\left(1 - \frac{\nu^2}{2}\right) + i\left(-\nu + \frac{\nu^3}{6}\right)\right\} \end{aligned} \tag{2.3.70}$$

ここで、

$$\begin{aligned} |\lambda| =& \sqrt{\left(1 - \frac{\nu^2}{2}\right)^2 + \left(-\nu + \frac{\nu^3}{6}\right)^2} \\ =& \sqrt{1 - \frac{\nu^4}{12} + \frac{\nu^6}{36}} \end{aligned} \tag{2.3.71}$$

とおく。

$|\lambda|$ は解の振幅の増幅率を表し、$|\lambda| > 1$ の場合は計算を繰り返すに従って振幅が増幅してしまうため、安定に計算を行うことができない。安定に計算を行うためには、$|\lambda| \leq 1$ となるように ν を設定する必要がある。

ν はクーラン数と呼ばれる数で、(2.3.71) 式から、RK3 の場合は $\nu < \sqrt{3}$ のときに安定となることが分かる。

参考文献

荒波恒平, 氏家将志, 原旅人, 2012: 物理過程の数値計算. 数値予報課報告・別冊第 58 号, 気象庁予報部, 111–119.

Asselin, A., 1972: Frequency filter for time integrations. *Mon. Wea. Rev.*, **100**, 487–490.

Durran, R., 2010: *Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer, 516 pp.

Klemp, J. B., W. C. Skamarock, and J. Dudhia, 2007: Conservative split-explicit time integration methods for the compressible nonhydrostatic equations. *Mon. Wea. Rev.*, **135**, 2897–2913.

Klemp, J. B. and R. B. Wilhelmson, 1978: The simulation of three-dimensional convective storm dynamics. *J. Atmos. Sci.*, **35**, 1070–1096.

Wicker, L. J. and W. C. Skamarock, 2002: Time-Splitting Methods for Elastic Models Using Forward Time Schemes. *Mon. Wea. Rev.*, **130**, 2088–2097.

2.4 移流スキーム[1]

2.4.1 移流スキームの特徴

移流は、いずれの予測方程式にも現れる基本的な項であるが、非線形であり計算手法により精度や安定性が大きく変わる。この節では、asuca で採用している移流スキームについて説明する。

まず、簡単のため一様流とした場合の 1 次元の移流方程式を考える。物理量を f、風速を u とすると方程式は、

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial (fu)}{\partial x} = 0 \tag{2.4.1}$$

と表される。これを、空間離散化すると、

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_{i-\frac{1}{2}}u_{i-\frac{1}{2}} - f_{i+\frac{1}{2}}u_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \tag{2.4.2}$$

となる。これは、図 2.4.1 のように、格子境界 $i - \frac{1}{2}$ からの流入と格子境界 $i + \frac{1}{2}$ からの流出により、格子内の物理量の総量が変わることを表す。

第 2.2.1 項で述べたように、asuca では物理量はセル中心に、u, v, w はセル境界に定義している。このため、セル境界におけるフラックスを計算する際、u, v, w はそのまま用いることができるが、物理量については周辺の格子点を元にした近似値を用いることになる。しかし、この近似値は厳密解とは異なるため、打ち切り誤差と呼ばれる誤差が生じることになり分散性や保存性に影響する。

移流スキームを選択する際に注意する点を以下に挙げる。

精度及び計算効率

セル境界のフラックスを計算するにあたって参照する格子点を増やせば、高精度のスキームを得ることができる。しかし、高精度のスキームほど演算量が多くなり、また参照格子点が増えるために隣接ノードとの通信量が増加し、計算時間がかかることを意味する。このように、精度と計算効率はトレードオフの関係にある。第 1.4.2 項で述べたとおり、asuca ではトータルとしての精度を向上させていくことが必要であるとしているため、移流スキームとして他のモデルでも広く使われている 3 次精度から 5 次精度を目安としており、移流スキームのみをより高精度にすることは考えていない。

単調性

移流は、ただある量を別の場所へ移動させる性質しかないため、移流自体が新たな極値を生じさせることはない。しかし、数値計算においては新たな極値が発生し、例えば質量が負となるような場合が生じうる。このため、新たな極値を生まないような単調性を保証するスキームであることが望ましい。ただし、2 次以上の高次精度差分スキームは解の単調性が保てずに、新たな極値を生じる性質があるという事が Godunov の定理として知られている。単調性を保つためには、1 次差分スキームを用いる、または 2 次以上の差分スキームに対して補正処理を行うといった方法が挙げられる。しかし、1 次差分スキームは精度が低く、スキーム自体に拡散性があるという欠点がある。補正処理を行う場合は、ただ対象となるセルを補正するだけでなく、全体としての総量が変わることがないように周辺セルも含めて補正を行う必要がある。

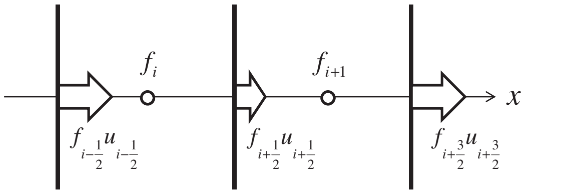

図 2.4.1 1 次元移流スキームの概念図。f は格子中心に定義された物理量、$u_{i-\frac{1}{2}}, u_{i+\frac{1}{2}}, u_{i+\frac{3}{2}}$ は格子境界の風速で、この図ではいずれも正であるとしている。i 番目の格子から流出するフラックス $f_{i+\frac{1}{2}}u_{i+\frac{1}{2}}$ は、$(i+1)$ 番目の格子における流入となる。

保存性

例えば乾燥大気の質量の移流を考えた場合、現実大気においてその質量が消えたり生じたりすることはないものの、数値計算においては保存するとは限らない。asuca では有限体積法を採用することで、移流スキームによって計算したあるセル境界におけるフラックスの流出 (流入) は、同じセル境界を持つ隣のセルの流入 (流出) として扱う。これにより保存性は満たされるため、以後は保存性については特に議論しない。

これらの要件を満たし、なおかつ必要メモリ量の少ないスキームが望ましいが、全てにおいて優れているスキームというものはこれまでに見つかっていない。このため、様々なスキームの性質を見極め、必要に応じたスキームを選択する必要がある。

asuca では、これらの要件を勘案し、移流スキームには 3 次精度風上差分を基本とし、単調性を保つために 1 次精度差分を併用する Koren (1993) の流束制限関数を用いている。この節では、まず第 2.4.2 項で Koren (1993) において基本となる 3 次精度風上差分について述べ、第 2.4.3 項で Koren (1993) の流束制限関数による単調性の保証について説明する。

[1] 松林 健吾、河野 耕平、石田 純一、室井 ちあし

2.4.2 3 次精度風上差分

ここでは MUSCL(Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws) 法に基づいて高次精度の差分スキームを組み立てる。なお、以下の議論は藤井 (1994) を大いに参考にしている。

MUSCL 法とは、セル境界の値 $f_{i+\frac{1}{2}}$ を周辺のセル中心の値 f_i, f_{i-1}, f_{i+1}, f_{i+2} などから内挿して求め、それによりフラックスを計算する方法である。これにより高次精度の差分法を得ることができるが、そのままでは新たな極値が生じてしまう。これを避けるため、流束制限関数を導入する。まず、この項では流束制限関数を用いずに高次精度の差分法を導出し、次項で流束制限関数について述べる。

はじめに、$x_{i-\frac{1}{2}} \le x \le x_{i+\frac{1}{2}}$ における f の分布関数 $f(x)$ を考える。$f(x)$ を x_i のまわりでテイラー展開すると次のようになる。

$$
\begin{aligned}
f(x) =& f(x_i) \\
&+ \frac{1}{1!}(x-x_i) f^{(1)}(x_i) \\
&+ \frac{1}{2!}(x-x_i)^2 f^{(2)}(x_i) \\
&+ O(\Delta x^3)
\end{aligned}
\tag{2.4.3}
$$

ただし、$f^{(n)}(x)$ は $f(x)$ の n 階の導関数を表わし、

$$
\Delta x = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}} \tag{2.4.4}
$$

である。

有限体積法においては、f_i は格子点 i における値ではなく、$x_{i-\frac{1}{2}} \le x \le x_{i+\frac{1}{2}}$ の区間におけるセル平均である ($f(x_i)$ が格子点 i における値である)。このことから次式が成り立つ。

$$
f_i = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x) dx \tag{2.4.5}
$$

ここで、格子間隔が等間隔であり、セル境界はちょうどセル中心同士の中間にあるとすると、

$$
x_{i+\frac{1}{2}} - x_i = x_i - x_{i-\frac{1}{2}} = \frac{\Delta x}{2} \tag{2.4.6}
$$

となるため、(2.4.5) 式に (2.4.3) 式を代入すると、

$$
\begin{aligned}
f_i =& \frac{1}{\Delta x}\Bigg[f(x_i)x + \frac{1}{2}(x-x_i)^2 f^{(1)}(x_i) \\
&\quad + \frac{1}{6}(x-x_i)^3 f^{(2)}(x_i) + O(\Delta x^3) x \Bigg]_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \\
=& f(x_i) + \frac{\Delta x^2}{24} f^{(2)}(x_i) + O(\Delta x^3)
\end{aligned}
\tag{2.4.7}
$$

となる。

この式の導関数について、次のように 2 次精度で近似できると仮定する (具体的な形は後で与える)。

$$
\begin{aligned}
f^{(1)}(x_i) =& f_i^{(1)} + O(\Delta x^2) \\
f^{(2)}(x_i) =& f_i^{(2)} + O(\Delta x^2)
\end{aligned}
\tag{2.4.8}
$$

次に、(2.4.8) 式、(2.4.7) 式を (2.4.3) 式に代入し、$f(x_i), f^{(1)}(x), f^{(2)}(x)$ を消去すると、$|x - x_i| < \Delta x$ であるため、

$$
\begin{aligned}
f(x) =& f_i + (x - x_i) f_i^{(1)} \\
&+ \frac{1}{2}\left\{ (x-x_i)^2 - \frac{\Delta x^2}{12} \right\} f_i^{(2)} \\
&+ O(\Delta x^3)
\end{aligned}
\tag{2.4.9}
$$

となる。従って、セル境界の値は、

$$
\begin{aligned}
f_{i+\frac{1}{2}} &= f(x_{i+\frac{1}{2}}) \\
&= f_i + \frac{\Delta x}{2} f_i^{(1)} + \frac{\Delta x^2}{12} f_i^{(2)} + O(\Delta x^3)
\end{aligned}
\tag{2.4.10}
$$

と求まる。ここから、3 点の f を用いて導関数を表すことを考える。3 点を用いて計算を行う場合、風上 2 点、風下 1 点を用いるいわゆる風上差分としなければ、計算が安定に行えないことが知られている。このため、$u > 0$ と $u < 0$ で場合分けして扱う必要がある。

まず $u > 0$ であるとして、f_{i-1}, f_i, f_{i+1} を用いて導関数 $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ を表すと、

$$
f^{(1)}(x_i) = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \tag{2.4.11}
$$

$$
f^{(2)}(x_i) = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \tag{2.4.12}
$$

となり、これらを、(2.4.10) 式に代入すると、

$$
\begin{aligned}
f_{i+\frac{1}{2}} =& f_i + \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{4} + \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{12} \\
&+ O(\Delta x^3) \\
=& \frac{1}{3} f_{i+1} + \frac{5}{6} f_i - \frac{1}{6} f_{i-1} + O(\Delta x^3)
\end{aligned}
\tag{2.4.13}
$$

が得られる。これによりセル境界の物理量を 3 次精度で求めることができた。

$u < 0$ の場合は、$f_{i+\frac{1}{2}}$ を f_i, f_{i+1}, f_{i+2} の値を用いて評価すればよい。すなわち、(2.4.9) 式から、

$$
f_{i+\frac{1}{2}} = f_{i+1} - \frac{\Delta x}{2} f_{i+1}^{(1)} + \frac{\Delta x^2}{12} f_{i+1}^{(2)} + O(\Delta x^3) \tag{2.4.14}
$$

として、導関数 $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ も同様に f_i, f_{i+1}, f_{i+2} から求める。

$$
f^{(1)}(x_{i+1}) = \frac{f_{i+2} - f_i}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \tag{2.4.15}
$$

$$
f^{(2)}(x_{i+1}) = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \tag{2.4.16}
$$

これらを (2.4.14) 式に代入し、

$$f_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}f_i + \frac{5}{6}f_{i+1} - \frac{1}{6}f_{i+2} + O(\Delta x^3) \quad (2.4.17)$$

が得られる。

このようにして求めたセル境界の物理量からセル境界のフラックス $f_{i+\frac{1}{2}}u_{i+\frac{1}{2}}$ を計算すると、移流スキームは 3 次精度の風上差分となる。これは、Wicker and Skamarock (2002) で示されている WRF(Weather Research and Forecasting model) の差分スキームと同じ形である。

2.4.3 流束制限関数を使った高精度風上差分

第 2.4.2 項では 3 次精度風上差分によるフラックスを求めた。しかし、前述のとおり 2 次以上の高次精度スキームは解の単調性を維持できず、1 次差分は単調性を維持できるものの精度が低く、スキーム自体に拡散性があるという欠点がある。

単調性を保ちつつ高精度の計算を行うには、物理量の分布に注目し、周囲の格子と比べて物理量の変化が大きく、新たな極値が生じやすい格子のフラックス計算には 1 次差分を用い、物理量の変化がなめらかな格子では高次精度の差分スキームを用いればよい。このように、物理量の変化のなめらかさに応じて高次と 1 次のスキームを連続的に扱うために用いるのが流束制限関数である。精度の高い高次差分を基本とし、物理量の変化が大きい場合に単調性を保つためにフラックス (流束) を 1 次精度へ制限することから、このように呼ばれている。asuca では、Koren (1993) による流束制限関数を採用しており、この流束制限関数では前項の 3 次精度差分と 1 次精度差分を連続的に接続する関数となっている [2]。

以下に Koren (1993) による移流スキームについて説明する。

まずは $u > 0$ であるとして、セル境界の物理量 $f_{i+\frac{1}{2}}$ が次式のように書けるとする。

$$f_{i+\frac{1}{2}} = f_i + \frac{1}{2}\phi(r_{i+\frac{1}{2}})\left(f_i - f_{i-1}\right) \quad (2.4.18)$$

$$r_{i+\frac{1}{2}} = \frac{f_{i+1} - f_i}{f_i - f_{i-1}}$$

ここで、r は場の滑らかさを表し、$r = 1$ のときは f_{i-1}, f_i, f_{i+1} が直線上に並び、もっとも滑らかな状態に対応する。$r < 0$ の場合は極値を持つ状態に対応する。この式における ϕ が流束制限関数であり、場のなめらかさ r に応じて変化することよりセル境界の物理量の計算方法、すなわち差分スキームが変わることになる。次に、この ϕ として、$f_{i+\frac{1}{2}}$ が単調性を維持しつつなるべく高精度となるような関数を考える。

[2] 流束制限関数については、Durran (2010) にも詳しく書かれている。

ここで、ある係数 c_1, c_0 を用いて $\phi(r) = c_1 r + c_0$ と表されるとすると、f は、

$$\begin{aligned} f_{i+\frac{1}{2}} =& f_i + \frac{1}{2}(c_1 r_{i+\frac{1}{2}} + c_0)\left(f_i - f_{i-1}\right) \\ =& f_i + \frac{1}{2}c_1\left(f_{i+1} - f_i\right) + \frac{1}{2}c_0\left(f_i - f_{i-1}\right) \\ =& \frac{1}{2}c_1 f_{i+1} + \left(1 + \frac{1}{2}c_0 - \frac{1}{2}c_1\right) f_i - \frac{1}{2}c_0 f_{i-1} \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

となる。ここで、(2.4.13) 式と比較して、$c_1 = 2/3, c_0 = 1/3$ であれば (2.4.19) 式は (2.4.13) 式と一致する。すなわち、

$$\phi(r) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}r \quad (2.4.20)$$

とすれば (2.4.13) 式の 3 次精度風上差分が実現される。

引き続き、単調性を満たすために ϕ に必要な条件を検討する。速度 u を定数とすると、

$$\frac{f_i^{t+1} - f_i^t}{\Delta t} = -u\frac{f_{i+\frac{1}{2}}^t - f_{i-\frac{1}{2}}^t}{\Delta x} \quad (2.4.21)$$

であるから、クーラン数 $\nu = u\Delta t/\Delta x$ を導入して、

$$\begin{aligned} &\frac{f_i^{t+1} - f_i^t}{f_{i-1}^t - f_i^t} \\ &= \nu\left\{1 + \frac{1}{2}\phi(r_{i+\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2}\phi(r_{i-\frac{1}{2}})\frac{1}{r_{i-\frac{1}{2}}}\right\} \end{aligned} \quad (2.4.22)$$

と変形できる。

ここで、(2.4.22) 式の左辺が 0 から 1 の間の値をとることは、単調であることの必要十分条件となる。この条件を満たせば、f_i^t と f_{i-1}^t が単調増加 (減少) であれば、f_i^{t+1} と f_{i-1}^{t+1} も単調増加 (減少) となることが保証され、単調性が保たれることになる。このことから、

$$0 \le \nu\left\{1 + \frac{1}{2}\phi(r_{i+\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2}\phi(r_{i-\frac{1}{2}})\frac{1}{r_{i-\frac{1}{2}}}\right\} \le 1 \quad (2.4.23)$$

となり、$\nu > 0$ であるから、ϕ の満たすべき条件は次のようになる。

$$-2 \le \phi(r_{i+\frac{1}{2}}) - \phi(r_{i-\frac{1}{2}})\frac{1}{r_{i-\frac{1}{2}}} \le 2\left(\frac{1}{\nu} - 1\right) \quad (2.4.24)$$

単調性を保証するために 1 次精度差分を用いるため、付録 2.4.A に記した CFL 条件により $0 < \nu < 1$ でなくてはならない。このため、

$$-2 \le \phi(r_{i+\frac{1}{2}}) - \phi(r_{i-\frac{1}{2}})\frac{1}{r_{i-\frac{1}{2}}} \le 0 \quad (2.4.25)$$

が得られる。このような条件を満たす ϕ の範囲を求めることは容易ではないが、十分条件として

$$\begin{cases} 0 \le \phi \le 2, \quad \phi \le 2r, & r \ge 0 \\ \phi = 0, & r < 0 \end{cases} \quad (2.4.26)$$

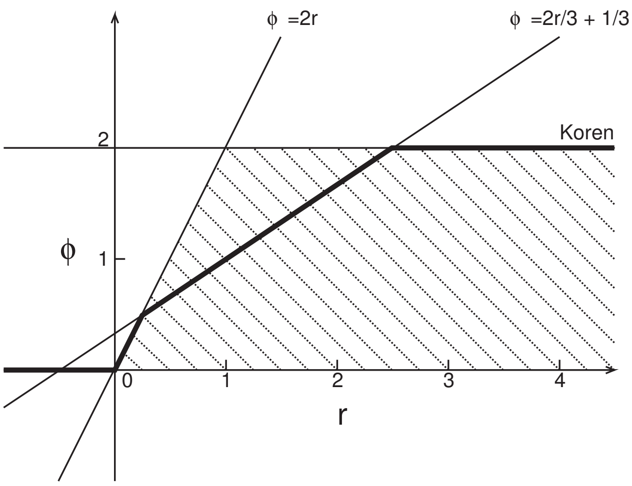

図 2.4.2　Koren (1993) による流束制限関数。ハッチの領域は単調性を保つための十分条件であり、ϕ がこの領域にあればよい。

を取れば上式を満たし、従って単調性を満たすことが保証される。

単調性を満たす流束制限関数はいくつも提案されているが、asuca では、第 2.4.2 項で求めた高次精度風上差分を用いるため、(2.4.26) 式を満たし、多くの r に対して (2.4.20) 式となるような流束制限関数を用いている。これは Koren (1993) の流束制限関数として知られており、

$$\phi(r) = \max\left[0, \min\left\{2r, \min\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}r, 2\right)\right\}\right] \tag{2.4.27}$$

という関数で表される。図 2.4.2 にこの関数の形を示す。

ここで例えば、極値を持つような格子点においては $r < 0$ となり、このとき $\phi = 0$ となる。この場合、(2.4.18) 式から、

$$f_{i+\frac{1}{2}} = f_i \tag{2.4.28}$$

となり、隣接格子点値をセル境界で使う 1 次差分となることが分かる。1 次差分は精度は劣るものの単調性は保たれる。

一方、場がなめらかな場合は、$\phi = 1/3 + 2/3r$ となり、前述の高精度の 3 次精度風上差分となることが分かる。なお、$u < 0$ のときについても同様に計算を行うことで、単調性に関する条件として同じ式が求まる。

このように、asuca では Koren (1993) の流束制限関数を用いることで、場のなめらかさに応じて単調性を保ちつつ高精度の差分スキームを用いることが可能となった。ただし、単調性を保証するために 1 次精度風上差分を用いているため、CFL 条件により $0 < \nu < 1$ を満たす必要がある点に注意が必要である。

また、この移流スキームでは、極値や急峻な分布がある格子点では 1 次差分が用いられるため、拡散性を持つことになる。この移流スキーム自体が拡散性を内包する性質については、第 2.6.2 項で具体例と共に詳しく述べる。

付録 2.4.A　CFL 条件

差分スキームにおいて、例えば 1 次精度差分を用いる場合は隣接 1 格子の情報を元にする。この場合、$u\Delta t$ が Δx より大きくなると、隣接 1 格子より遠くの位置を参照することになり、隣接格子点値の外挿値を用いるため、計算不安定となることが知られている。このため、1 次精度差分を安定に計算するための条件は、

$$0 < u\frac{\Delta t}{\Delta x} < 1 \tag{2.4.29}$$

となる。すなわちクーラン数 ν は $0 < \nu < 1$ である必要があり、この条件を CFL 条件という。

CFL 条件は参照格子点の数、すなわち差分スキームによって変わり、例えば周囲 5 格子を参照する場合は、CFL 条件は $0 < \nu < 2$ となる。ただし、CFL 条件は付録 2.3.B で示した von Naumann の安定解析による安定条件とは別であり、von Naumann の安定解析では参照格子点数の多い高精度差分ほど安定性が低くなる。

参考文献

Durran, R., 2010: *Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer, 516 pp.

藤井孝藏, 1994: 流体力学の数値計算法. 東京大学出版会, 234pp.

Koren, B., 1993: A Robust Upwind Discretization Method For Advection, Diffusion And Source Terms. *CWI Technical Report NM-R 9308*, 1 – 22, URL `http://oai.cwi.nl/oai/asset/5293/05293D.pdf`.

Wicker, L. J. and W. C. Skamarock, 2002: Time-Splitting Methods for Elastic Models Using Forward Time Schemes. *Mon. Wea. Rev.*, **130**, 2088–2097.

2.5 側面・上部境界条件 [1]

2.5.1 はじめに

数値予報は、これまでに述べたように時間と空間に依存する予報変数に対する偏微分方程式を解くことによって、未来の状態を予想しようとするものである。この偏微分方程式を解くには、初期条件と境界条件が必要であり、このうち境界条件の与え方には、境界上の値を規定する方法や境界における勾配等の性質を規定する方法等 [2] がある。

asuca は有限体積法で離散化しており、個々のセルではそのセル境界におけるフラックスを介して物理量が流入・流出する。計算領域の境界においても同様に領域境界におけるフラックスを介して物理量が流入・流出することを考え、この境界上のフラックスを計算するために必要な値を境界条件として与える。本節では asuca を領域モデル（以下、内側モデルと呼ぶ）として、それより広い領域のモデル（以下、外側モデルと呼ぶ）にネスティングするという利用方法を想定して、その場合の境界付近のフラックスの計算について、第 2.5.2 項で説明する。

外側モデルの計算結果を境界値として利用する際に考慮すべき点として、外側モデルの時空間の解像度が内側モデルよりも一般に粗いこと、また、外側モデルの出力値から境界値を用意することを想定すると、外側モデルの情報は時間方向に間引かれていることが挙げられる。そのため、側面・上部境界値は外側モデルからモデルの空間・時間分解能に応じた内挿処理を行って用意する。このことに関連して、計算領域平均の質量変化が外側モデルのそれに追随するように側面境界の質量フラックスを調節する手法（質量フラックスの時間方向の内挿手法）について、第 2.5.3 項で説明する。

外側モデルの情報を反映させる際に、人為的に設定した（自然界には存在しない）境界において、不自然な波を生成しないことや波を反射させないことに注意が必要となる。境界での波の生成・反射を抑えるために導入するレイリーダンピングについて、第 2.5.4 項で説明する。

なお、本節で用いる各変数の定義は第 2.1 節と同じである。

2.5.2 境界付近におけるフラックスの計算

ここでは、asuca における側面および上部境界の設定内容（格子配置・条件）を説明し、境界付近のフラックスの計算について述べる。第 2.2.1 項で説明したとおり、スカラー変数を配置する p で示したポイントに対し、u, w で示した x, z 方向の風を配置するポイントは

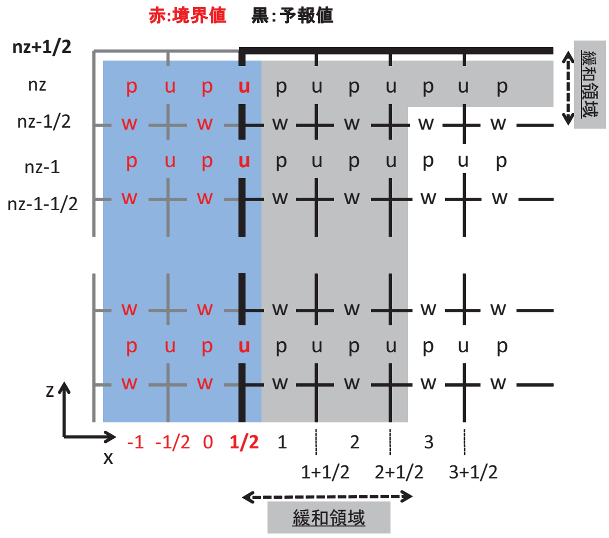

図 2.5.1　asuca の側面・上部境界の格子配置の模式図。計算領域の西端と上端を描いた $x-z$ 断面。スカラー変数を配置するポイント (図中の p) に対して、u, v, w は半格子ずれたポイントに配置される（図中の u, w)。太線が計算領域境界を示し、黒字の格子点値は予報値、赤字の格子点値は境界値である。青色と灰色の塗りつぶしの範囲で境界値が必要である。青色の塗りつぶしの境界値は、境界付近のフラックスの計算に使われる。灰色の塗りつぶしの境界値は、「緩和領域」におけるレイリーダンピングの参照値として用いられる（ここでは側面境界から 2 格子、上部境界から 1 格子を緩和領域に想定した)。数字は格子番号を示す。

半格子ずれることを図 2.5.1 で示している。側面および上部境界は太線で示しており、フラックスの計算のために使う境界値の範囲は図中の青色の塗りつぶしの範囲であり、値の使い方の詳細はこの後で述べる。黒字で示した格子では予報変数を時間積分し、赤字で示した格子は外側モデルから値 [3] を与える。

asuca の側面境界は、図 2.5.1 に示すように、x 方向には u ポイント（y 方向には v ポイント）に設定される。この側面境界格子（格子番号 (1/2)）におけるフラックスを介して、境界において物理量 ϕ が流入・流出する。ϕ のフラックスの評価に必要な格子数は、移流スキームの精度に依存し、Koren (1993) のスキームでは風上に 2 格子、風下に 1 格子である。したがって、境界でのフラックスを評価するため、計算領域の外側に 2 格子分の境界値を用意しておく必要がある。たとえば、格子番号 (1/2) における ϕ のフラックスは、図の左を風上とすると、格子番号 (-1),(0),(1) の ϕ と格子番号 (1/2) に配置する $\rho U/J$ を用いて計算され、格子番号 $(1+1/2)$ における ϕ のフラックスは、格子番号 (0),(1),(2) の ϕ と格子番号 $(1+1/2)$ の $\rho U/J$ を用いて計算される。

[1] 河野 耕平、荒波 恒平

[2] 境界上の値を規定する方法としては、その値を時間的に一定とする固定端条件が、また、境界における勾配等の性質を規定する方法としては、境界における勾配をゼロとする自由端条件が良く知られている。

[3] asuca の予報変数である ρ/J, $\rho u/J$, $\rho v/J$, $\rho w/J$, $(\rho\theta_m)/J$, $\rho q_\alpha/J$ を外側モデルの計算結果から用意する。たとえば、外側モデルが密度ではなく気圧を予報変数とする場合には、状態方程式から密度を診断して求める。

asuca の上部境界は、w ポイントに設定される。この上部境界格子（格子番号 (nz+1/2)）ではフラックスをゼロとする条件を課し、$W = 0$ とする。格子番号 (nz−1/2) における鉛直方向の ϕ のフラックスの評価は、Koren (1993) のスキームではなく、中央 2 次差分で評価し、格子番号 (nz),(nz−1) の ϕ と格子番号 (nz−1/2) の $\rho W/J$ を用いて計算される。したがって、上部境界の外（上）側では外側モデルの値を用意する必要はない。

2.5.3 側面境界のフラックス調節

ここで、側面境界値と領域全体の総質量の時間変化との関係を議論する。

まず、一般座標系での質量保存の式は、(2.1.38) 式より、

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho\right) = \\ &-\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{J}\rho U\right)-\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{J}\rho V\right)-\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{J}\rho W\right) \\ &-\sum_{\alpha}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{J}\rho q_{\alpha} W_{t_{\alpha}}\right)+\frac{1}{J}F_{\rho}\end{aligned} \tag{2.5.1}$$

である。この式について計算領域全体での体積積分をとる。上式の右辺第 3 項の鉛直流の項は、上部・下部境界で $W = 0$ の条件により、カラム全体の積分をとると消える。右辺第 4 項は、上部境界では $W_{t_\alpha} = 0$ の条件により、カラム全体の積分をとると、下部境界でのフラックス（地上降水として領域から流出するフラックス）が残る。また、(2.1.25) 式で定義したように

$$F_{\rho} = Q_{\rho} - \frac{\partial}{\partial x^i}\tilde{f}^i_{\rho} \tag{2.5.2}$$

であり、(2.5.2) 式の右辺第 1 項は全ての水物質の生成・消滅項の和なので通常はゼロである。また、(2.5.2) 式の右辺第 2 項は U, V, W および W_{t_α} によらないフラックスによる質量の時間変化を表し、

$$\tilde{f}^3_{\rho} = \sum_{\alpha}\tilde{f}^3_{\rho\alpha} = \sum_{\alpha}\left(\rho\overline{q'_{\alpha}w'}\right) \tag{2.5.3}$$

であるが、上部境界では $\rho\overline{q'_{\alpha}w'} = 0$ の条件により、下部境界でのフラックス（地表面から流入してくる水蒸気フラックス）が残る [4]。したがって (2.5.1) 式を計算領域全体で体積積分すると

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\iiint\left(\frac{1}{J}\rho\right)d\xi d\eta d\zeta = \\ &-\left\{\iint\left(\frac{1}{J}\rho U\right)d\eta d\zeta\right\}^{\xi=nx+1/2}_{\xi=1/2} \\ &-\left\{\iint\left(\frac{1}{J}\rho V\right)d\xi d\zeta\right\}^{\eta=ny+1/2}_{\eta=1/2} \\ &-\left\{\iint\sum_{\alpha}\left(\frac{1}{J}\rho q_{\alpha}W_{t_{\alpha}}\right)d\xi d\eta\right\}_{\zeta=1/2} \\ &+\left\{\iint\frac{1}{J}\zeta_z\left(\rho\overline{q'_v w'}\right)d\xi d\eta\right\}_{\zeta=1/2}\end{aligned} \tag{2.5.4}$$

となる。ここで、nx は ξ 方向の格子数、ny は η 方向の格子数である（以下、本節において同様）。この式は、

- 計算領域内の総質量の時間変化（左辺）

が、

- 領域側面の質量フラックスの総和（右辺第 1, 2 項）
- 地上降水として領域外に出ていく（地上に落下する）質量の総和（右辺第 3 項）
- 地表面から流入する水蒸気フラックスの総和（右辺第 4 項）

によって決まることを示している。右辺第 1, 2 項の領域側面の質量フラックスは、側面境界値から診断して用意するものである。したがって、内側モデルの計算領域の総質量の時間変化は、右辺第 3 項の降水の項と第 4 項の水蒸気フラックスの項の効果を除いて、予め与えられるものとなる。ここで、右辺第 3, 4 項の効果は、右辺第 1, 2 項に比較して平均的に小さく、かつ右辺第 3, 4 項は平均的には相殺関係にあると考えられる [5]。そのため、「内側モデルの領域平均質量の時間変化が外側モデルのそれに追随する」ためには、「内側モデルの領域平均質量の時間変化を外側モデルのそれに追随させる」ような側面境界の質量フラックスを作成しておく必要がある。なお、このことは質量を直接の予報変数とするモデルに限らず、側面境界で質量の流入・流出を考えるモデルには一般に共通する問題であり、気圧を予報変数とする JMA-NHM においても本項と同じ目的で側面フラックスの調節を行っている (斎藤 2008)。

以下では、側面境界の質量フラックス値の作成方法について示す。ここで、領域総質量を $M(t)$、領域側面の質量フラックスの総和を $F(t)$ と表記する。それぞれ、

$$M(t) = \iiint\left(\frac{1}{J}\rho(t,\xi,\eta,\zeta)\right)d\xi d\eta d\zeta \tag{2.5.5}$$

[4] 第 2.1.2 項 (2) で述べたように、(2.5.2) 式の $\partial\tilde{f}^i_{\rho}/\partial x^i$ の項は、実際には物理過程によって評価された ρ の時間変化率の形で扱うが、(2.5.4) 式では、重力加速度は z 軸及び ζ 軸と平行であるとして $\partial\tilde{f}^i_{\rho}/\partial x^i$ をベクトルの発散として一般座標変換した形での下部境界のフラックスを明示的に示す。

[5] 全球ではよい近似で成立する。

および

$$
\begin{aligned}
&F(t) = \\
&\quad -\left\{\iint\left(\frac{1}{J}\rho U(t,\xi,\eta,\zeta)\right)d\eta d\zeta\right\}_{\xi=1/2}^{\xi=nx+1/2} \\
&\quad -\left\{\iint\left(\frac{1}{J}\rho V(t,\xi,\eta,\zeta)\right)d\xi d\zeta\right\}_{\eta=1/2}^{\eta=ny+1/2}
\end{aligned}
\tag{2.5.6}
$$

である。(2.5.4) 式より、$M(t)$ と $F(t)$ には、地上降水として領域外に出ていく質量および地表面から流入する水蒸気の質量を除いて、

$$
\frac{\partial M(t)}{\partial t} = F(t) \tag{2.5.7}
$$

の関係がある。

ある時刻 t_0 から時刻 t_1 までの外側モデルのフラックス F_{ext} の時間変化を図 2.5.2(左) の曲線で表すとすると、(2.5.7) 式から

$$
M(t_1) - M(t_0) = \int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial M(t)}{\partial t}dt = \int_{t_0}^{t_1}F(t)\,dt \tag{2.5.8}
$$

であるから、その時間で変化した計算領域内の総質量の増減は塗りつぶした領域の面積となる。

一方で、内側モデルを計算するにあたって、外側モデルの情報は時刻 t_0 と t_1 の瞬間値しかない。時刻 t_0 と t_1 の質量フラックス、その間の積算としての質量変化量（図 2.5.2(左) の塗りつぶし域の面積）の情報は得られるが、その間の質量フラックスと質量がどのように時間変化したかの情報はない。したがって、内側モデルの時間積分を考えた場合、その間の時刻のフラックスを推定して作成する必要がある。

asuca では (2.5.7) 式の関係を満たす $\rho U(t)/J$, $\rho V(t)/J$ を各境界格子で設定するために以下の手順をとる。

はじめに、各境界格子で時間方向に線形内挿した値を質量フラックスの推定値 $\rho U_g(t,\xi,\eta,\zeta)/J$, $\rho V_g(t,\xi,\eta,\zeta)/J$ とする。その総和を $F_g(t)$ とすると、

$$
\begin{aligned}
&F_g(t) = \\
&\left\{\iint\left(\frac{1}{J}\rho U_g(t)\right)d\eta d\zeta\right\}_{\xi=1/2} \\
&-\left\{\iint\left(\frac{1}{J}\rho U_g(t)\right)d\eta d\zeta\right\}_{\xi=nx+1/2} \\
&+\left\{\iint\left(\frac{1}{J}\rho V_g(t)\right)d\xi d\zeta\right\}_{\eta=1/2} \\
&-\left\{\iint\left(\frac{1}{J}\rho V_g(t)\right)d\xi d\zeta\right\}_{\eta=ny+1/2}
\end{aligned}
\tag{2.5.9}
$$

である。この場合の内側モデルの領域総質量の時間変化は、図 2.5.2（中）の塗りつぶし域の面積となり、図 2.5.2（左）の塗りつぶし域の面積と一致するとは限らない。そのため、図 2.5.2（左）の塗りつぶし域の面積と一致するように、質量フラックスを調節する必要がある。

次に、(2.5.7) 式の関係を満たすための側面境界の各格子での質量フラックスの推定値 $\rho U_g/J$, $\rho V_g/J$ に対する調節値を $A(t)$ とし、調節後の側面フラックスの総和を

$$
\begin{aligned}
&F(t) = \\
&\left\{\iint\left(\frac{1}{J}\rho U_g(t) + A(t)\right)d\eta d\zeta\right\}_{\xi=1/2} \\
&-\left\{\iint\left(\frac{1}{J}\rho U_g(t) - A(t)\right)d\eta d\zeta\right\}_{\xi=nx+1/2} \\
&+\left\{\iint\left(\frac{1}{J}\rho V_g(t) + A(t)\right)d\xi d\zeta\right\}_{\eta=1/2} \\
&-\left\{\iint\left(\frac{1}{J}\rho V_g(t) - A(t)\right)d\xi d\zeta\right\}_{\eta=ny+1/2} \\
&= F_g(t) + 2\left(S_{\eta\zeta} + S_{\xi\zeta}\right)A(t)
\end{aligned}
\tag{2.5.10}
$$

とする。$S_{\xi\zeta}, S_{\eta\zeta}$ は、計算空間におけるモデル領域の側面の面積である。つまり、$\xi = 1/2$ と $\xi = nx + 1/2$、$\eta = 1/2$ と $\eta = ny + 1/2$ とで調節値の絶対値は同じで逆符号ということを仮定している。$F_g(t), S_{\eta\zeta}, S_{\xi\zeta}$ は既知であるから、$F(t)$ を何らかの方法で決めれば、$A(t)$ が求まり、各側面でのフラックスの調節量が定まる。

ここで、n 個の時刻の境界値毎の領域総質量の値から、その n 時刻間の領域総質量の時間変化を推定して決めることにする。asuca では $M(t)$ がなめらかに変化するように、$M(t)$ を

$$
M(t) = a_j + b_j(t-t_j) + c_j(t-t_j)^2 + d_j(t-t_j)^3 \tag{2.5.11}
$$

の形を仮定し、スプライン補間で係数 a_j, b_j, c_j, d_j を決めて時間方向に内挿する (添字 j は境界値の存在する時刻を表すインデックス)。係数が決まれば (2.5.7) 式の関係から

$$
\begin{aligned}
F(t) &= \frac{\partial M(t)}{\partial t} \\
&= b_j + 2c_j(t-t_j) + 3d_j(t-t_j)^2
\end{aligned}
\tag{2.5.12}
$$

であるから、(2.5.10) 式と (2.5.12) 式から調節値 $A(t)$ を求めることができる。以上のようにしてフラックスを調節した値を側面境界値として用いる。

なお、数値積分の一般的な留意点として、調節した質量フラックスの境界値（時間の関数）を用いて密度を時間積分すると、実際には図 2.5.3 の塗りつぶし領域のように積分時間間隔 Δt ごとに一定の質量変化をする。このため、時刻 t における密度の時間積分をする際のフラックスの境界値は $F(t)$（図 2.5.3 の左図）で

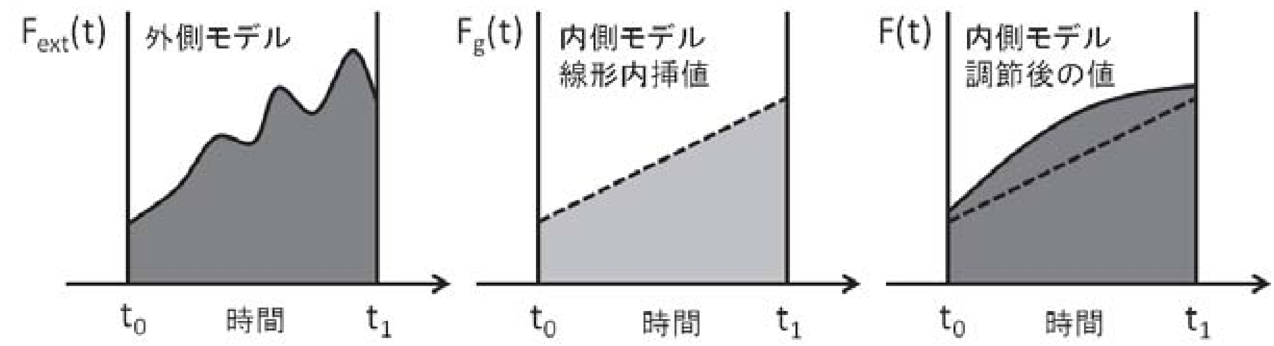

図 2.5.2　側面のフラックス調節の模式図。横軸は時間、縦軸は領域側面の質量フラックスの総和。塗りつぶした面積は、領域総質量の時刻 t_0 からの増分。(左) 外側モデルのフラックスの時間変化、(中) 内側モデルにおいて時刻 t_0 と t_1 のフラックスを線形内挿した場合、(右) 内側モデルにおいて、左図の外側モデルの質量変化に合うように調節した場合。

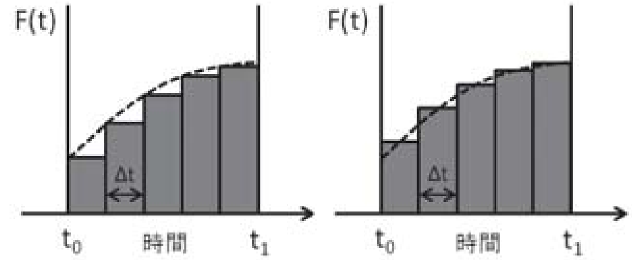

図 2.5.3　調節後の側面フラックスを用いた時間積分の模式図。時刻 t における密度の時間積分に、(左図) 時刻 t における境界の質量フラックスを用いる場合、(右図) 時刻 $t+\Delta t/2$ における質量フラックスを用いる場合。

はなく、$F(t+\Delta t/2)$ の値を用いた方が、外側モデルの質量変化により追随することができる (図 2.5.3 の右図)。

以上で、領域全体の質量変化については、降水や地表面からのフラックスによる影響を除けば、外側モデルに追随できるようになる。ただし、この調節した側面境界値を用いる際、側面境界上の質量フラックスのみを変更すると、その内側の格子とのフラックス差によって音波が生じる[6]ので注意を要する。つまり、調節した側面境界上の質量フラックスとその内側の格子とのフラックス差が大きくならないような措置が必要である。asuca では調節によって生じる隣接の格子間のフラックスの差を、内側領域のすべての格子のフラックスを境界からの距離に応じて線形に変化させることによって軽減させることとし、計算領域内部の質量フラックスに対して (2.5.13) 式の修正を加える。この措置を初期値において施すことによって特定の格子間でフラックス差が大きくならないようにしている。

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{J}\rho U\left(t=0,\xi,\eta,\zeta\right) &= \frac{1}{J}\rho U_a\left(\xi,\eta,\zeta\right) \\
&\quad + \left(1-2\frac{\mathrm{dx}\left(\xi\right)}{\mathrm{DX}}\right)A\left(t=0\right) \\
\frac{1}{J}\rho V\left(t=0,\xi,\eta,\zeta\right) &= \frac{1}{J}\rho V_a\left(\xi,\eta,\zeta\right) \\
&\quad + \left(1-2\frac{\mathrm{dy}\left(\eta\right)}{\mathrm{DY}}\right)A\left(t=0\right)
\end{aligned}
\tag{2.5.13}
$$

ここで、DX は計算領域の幅 ($\xi=1/2$ と $\xi=\mathtt{nx}+1/2$ 間の距離)、$\mathrm{dx}\left(\xi\right)$ は西側境界 ($\xi=1/2$) からの距離を表し $\mathrm{dx}\left(1/2\right)=0$, $\mathrm{dx}\left(\mathtt{nx}+1/2\right)=\mathrm{DX}$ である (η 方向も同様)。また、U_a, V_a は修正前の初期値である。

2.5.4　レイリーダンピング

側面および上部境界において共通して注意すべき点は、人為的に設定した (自然界には存在しない) 境界において、不自然な現象 (波の生成・反射) を起こさないことである。波は何らかの不均質が復元力となって媒質を伝わっていく現象であり、反射は媒質が不連続になる所で起こる。そのため、境界値と一つ内側の格子の値との差が大きい状態になると波の生成・反射が起こりやすい。そのような状態になることを避けるため、asuca では境界の内側にある程度の領域 (緩和領域) を設けて、その領域内では予報値を徐々に境界値に近づけるレイリーダンピングと呼ばれる手法を用いている。

図 2.5.1 は、側面境界から 2 格子、上部境界から 1 格子を緩和領域とした場合の図で、黒字で示した計算領域のうち下線を付した格子でレイリーダンピングが施されることを示す。なお、緩和領域に該当する格子では、それぞれの格子に境界値を用意する必要がある (図中の灰色の塗りつぶしの範囲)。以下、レイリーダンピングの手法について説明する。

[6] 音波は密度の疎密を復元力とする波であるため。

レイリーダンピングは、u, v, w, θ_m の時間変化率[7]に、以下のように徐々に外側モデルの値に近づける効果を加えることにより施される[8]。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= -m(x,y,z)(u - u_{\mathrm{ext}}) \\
\frac{\partial v}{\partial t} &= -m(x,y,z)(v - v_{\mathrm{ext}}) \\
\frac{\partial w}{\partial t} &= -m(x,y,z)\,w \\
\frac{\partial \theta_m}{\partial t} &= -m(x,y,z)(\theta_m - \theta_{m\mathrm{ext}})
\end{aligned} \tag{2.5.14}
$$

ここで下つき添字 ext を付けたものは、外側モデルから内挿で求めた値である。

$m(x,y,z)$ はダンピングの強度を決めるパラメータ[9]であり、側面・上部境界ではダンピングが最も強く、内部ではゼロになるように決める。

$$
m(x,y,z) = \max(m_x, m_y, m_z) \tag{2.5.15}
$$

$$
m_x = \begin{cases} \gamma_h \sin^2\left[\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{d_x}{d_h}\right)\right] & (d_x < d_h) \\ 0 & (d_x \geq d_h) \end{cases} \tag{2.5.16}
$$

$$
m_y = \begin{cases} \gamma_h \sin^2\left[\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{d_y}{d_h}\right)\right] & (d_y < d_h) \\ 0 & (d_y \geq d_h) \end{cases} \tag{2.5.17}
$$

$$
m_z = \begin{cases} \gamma_v \sin^2\left[\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{d_z}{d_v}\right)\right] & (d_z < d_v) \\ 0 & (d_z \geq d_v) \end{cases} \tag{2.5.18}
$$

ここで d_x, d_y, d_z は側面・上部境界からの距離を、また d_h, d_v はそれぞれ、側面と上部でダンピングをかける範囲を表す[10]。また γ_h, γ_v は、外部から経験的に与えられるパラメータである。

レイリーダンピングは、上記の u, v, w, θ_m に加えて、密度 ρ にも施す場合がある。これは質量保存の観点からは望ましいことではないが、内部領域で不自然な波が発生してしまう場合[11]には、密度にレイリーダンピングを施して、その時間変化を境界付近で抑えることによって、反射した波が内部領域に影響を与える状況を防ぐことができる。

2.5.5　まとめ

本節では asuca を領域モデルとして利用する場合に必要となる境界付近のフラックスの計算について述べた。側面境界においては、境界上のフラックスを介して物理量の流入・流出があり、このフラックスの計算で参照する格子数に応じた境界値が、境界の外側に必要である。これらの境界値は、基本的には外側モデルの値を時間方向に線形内挿した値を用意するが、側面境界上の質量フラックスについては、内側モデルの領域総質量の時間変化を外側モデルのそれに追随させるため、線形内挿した値に対し調節を加えている。上部境界においては、フラックスをゼロとする条件を課すとともに境界付近のフラックスの計算では参照格子点を減らしている。

側面および上部境界では、人為的に設けた境界に起因する不自然な波を生成しないことと境界での波の反射が内部領域に悪影響を与えるのを防ぐことを目的に、境界の内側に緩和領域を設けてレイリーダンピングを施している。緩和領域の幅は実験による確認等を通じて経験的に決められるものであり、その幅に応じた境界値を用意する必要がある。

参考文献

Koren, B., 1993: A Robust Upwind Discretization Method For Advection, Diffusion And Source Terms. *CWI Technical Report NM-R 9308*, 1 – 22, URL `http://oai.cwi.nl/oai/asset/5293/05293D.pdf`.

斎藤和雄, 2008: 連続式への水蒸気拡散の導入と側面フラックス計算への海面水蒸気フラックスの考慮. 数値予報課報告・別冊第 54 号, 気象庁予報部, 45–46.

[7] u, v, w, θ_m は予報変数ではないことに注意。例えば u ではなく $\rho u/J$ が予報変数であるため、これらの時間変化率に密度 ρ とヤコビアンの逆数 $1/J$ を乗じたものが予報変数の時間変化率となる。

[8] 境界において $w = 0$ の条件を課しているので、w はゼロに近づける効果を加える。

[9] $\tau = 1/m$ は、(2.5.14) 式の内側モデル値と外側モデル値の差（例えば $u - u_{\mathrm{ext}}$ ）が $1/e$ に減衰する時間 (e-folding time) である。

[10] 側面境界と上部境界での「ダンピング」が別々に加えられることがよく行われるが、それでは側面境界かつ上部境界の部分で想定以上にダンピングが強くなってしまう。

[11] 具体的な経験としては、局地解析から予報を開始した場合がある。局地解析は 3 次元変分法で解析され、変数間のバランス関係についてモデルによる拘束がないことから、各変数の修正の大きい場所から音波が伝わる様子が予報初期に見られる。そのため、局地モデルとして利用する場合は、密度にもレイリーダンピングをかける。

2.6 理想実験を通じたドライモデルとしての評価[1]

2.6.1 はじめに

ここまで力学過程の定式化について述べてきた。一般に、どの非静力学モデルにおいても、予報方程式としての運動方程式、連続の式、熱力学の式に、診断式としての状態方程式を基本として、水物質等を予報変数として追加する毎に、それらに対応する予報方程式を追加していくこととなる。

世の中の様々な非静力学モデルでは、これらの方程式を基本とするものの、その後の定式化や離散化によって様々なバリエーションが存在する。例えば、運動方程式や熱力学の式をそのまま用いるか、それとも連続の式と組み合わせるかどうかで移流形式かフラックス形式かが変わってくる。また、連続の式をそのまま用いるか、気圧方程式に変換するかの違いが生じうる。熱力学の式においては、予報変数として温位、温度等いくつかの物理量が選択肢として挙げられる。離散化においてはさらにバリエーションが広がり、時間積分法、移流スキーム、音波・重力波の扱い等のそれぞれで様々な手法が考案されている。

力学コアは第 1.1 節で述べた通り、数値予報モデルの屋台骨であり基盤である。これに物理過程を組み合わせて実際の数値予報を行うこととなるが、基盤が揺らいでいては正確な予測や安定運用ができない。そのため、力学コア単体として問題がないか十分なテストが必要である。

前述の通り、力学過程のスキームの選択には多くの任意性があり、その様々な手法の違いは、最終的には計算速度（実行速度)、予測精度、計算安定性等に反映される。従って、力学過程の開発者は数値予報モデルの利用方法に応じて最適と思われる手法を組み合わせて力学コアを作り上げていくこととなる。

採用するスキームを検討する段階では計算速度に関しては演算量や必要となるデータ通信量等を見積もることによって見当をつけることができる。また、予測精度や計算安定性については離散化することにより省略される項の精度（打ち切り誤差）を見積もることや安定性解析等の手法によって見当をつける。そして、これらの事前の検討に基づいて採用するスキームを決めた後は、実際に組み込んで期待した結果が得られているかを確認する。一方、計算速度については（将来の計算機における性能はともかく）実際に計測すれば簡単に評価することができる。計算精度も実際にテストを行って評価を行うが、いきなり現業数値予報と同様のテストにより評価を行うことは得策ではない。原 (2012a) が述べているように数値予報モデルの中にある様々な過程の相互作用が問題を複雑化するため、採用しようとするスキーム単体の特性を把握することが困難になるためである。また、開発工程を考えると大幅に力学コアを書き換える場合には物理過程の実装が力学過程の実装の後になることが多く（asuca の開発においてもそうであった)、実際には現業数値予報と比較できる段階に達するまでには時間がかかるという事情もある。そのため、力学過程の開発においては物理過程による時間変化率が無視できるような理想的な（仮想的な）条件を考え[2]、また場合によっては水物質の影響を考えない条件によるテストが行われてきた。

このようなテストは開発初期から行えるので、容易にスキームの特性を把握できる。テストに含まれる項は、移流項、気圧傾度力項、コリオリ力項、重力項、曲率項となり（コリオリ力項と曲率項は無視する場合もある)、評価がしやすいという利点がある。また、現象を理解するための理論的研究の結果として解析解が得られたもの（例えば山岳波）があり、現実とかけ離れた仮想的な条件によるテストではなく、そのような現象に対する数値予報モデルとしての性能評価にもなりうる。そこで、asuca の開発においては開発当初より理想実験による力学コアのテストを行ってきた。

さて、力学コアの理想実験による評価では次のような方法がある。

1. 解析解と比較する方法
2. 高分解能数値予報モデル等の結果をリファレンスとして比較する方法

まず、1 の手法について述べる。基礎方程式系の一般解を求めることは現実的でないと考えられるが、何らかの仮定をおくことにより、解析解を求めることができる場合がある。例えば、非線形項を含む方程式の一般解を求めることは困難であるが，線形化することにより一般解を求められる事がある。ここで、ある物理量 A, B に対して、$\partial(AB)/\partial x$ といった非線形項を含む場合に、(2.6.1) 式のように、物理量 A, B を基本場 $\overline{A}, \overline{B}$ とそこからの摂動 A', B' に分ける。

$$A = \overline{A} + A', \quad B = \overline{B} + B' \tag{2.6.1}$$

ここで、元の方程式系を満たすような基本場を考える。例えば、運動方程式、連続の式、温位の式、状態方程式から成る系を考えた場合、定常状態で風速は全てゼロかつ静力学平衡が成り立っている場を考えると、全ての予測式における時間変化率がゼロとなって定常状態を保つこととなり、基本場となりうる。ここでは、物理量 A, B の基本場が x 方向に一様である場合を考え[3]、また摂動が十分小さくそれらの積を無視することがで

[1] 石田 純一 (第 2.6.1 項、第 2.6.4 項、第 2.6.5 項、第 2.6.7 項、第 2.6.8 項、第 2.6.9 項)、河野 耕平 (第 2.6.2 項、第 2.6.6 項)、松林 健吾 (第 2.6.3 項)

[2] 乱流による輸送は無視しないで考えることもある。

[3] 線形化にあたっては、基本場は必ずしも x 方向に一様である必要はなく、x による微分が定数であれば良い。

きるとすると、(2.6.2) 式のように、

$$\frac{\partial}{\partial x}(AB) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{A} + A'\right)\left(\overline{B} + B'\right) \sim \overline{A}\frac{\partial B'}{\partial x} + \overline{B}\frac{\partial A'}{\partial x} \tag{2.6.2}$$

と、非線形項を線形化することができる。このように非線形方程式系を、ある仮定の下で線形な方程式系に近似することにより、解析解を求められる場合がある。このような場合、仮定が成り立つ範囲においては、解析解をいかに精度良く再現できるかが評価のポイントとなる。また、力学コア全体ではなくその一部のみをテストすることも可能である。例えば、移流スキームの評価においては、1 次元移流方程式を用い、流れの場を一様とすれば解析解は簡単に求められるので、それと比較すればよい。

次に、2 の手法について述べる。1 の手法は解析解といったいわば「正解」を基に評価するものであるが、適用できる条件は限られる。これと異なり、2 は柔軟な条件での評価が可能となる。結果を比較するためのリファレンスは、より高精度の数値計算によって得られると考える。時間積分や空間差分には様々な離散化手法があり、一般に、計算精度と実行速度はトレードオフの関係にある。そして、現業数値予報モデルにおいては、実行時間の制約から多少計算精度を犠牲にしても実行速度が速い手法を採用することが多い。このため、高次精度の離散化手法を用いた数値予報モデルの結果と比較・評価することが有効である。また、分解能は予測精度に大きな影響を与えるが、これも現業数値予報の観点からは計算時間の制約により十分な分解能を取れないこともありうる。そこで、高分解能モデルを実行して、結果を比較用のリファレンスとすることが考えられる。

また、両者いずれにおいても他の数値予報モデルの結果と比較することもできる。既に述べた通り、力学コアの出発点である基礎方程式系は同じであっても、離散化まで含めると様々なバリエーションが存在する。力学コアの構築にあたっては、数値予報モデルの利用目的についての観点が基礎にあり、それを具現化するために様々な手法から開発者が最適と考える手法を選択する。しかし、あらゆる手法を自ら実装することは非常に開発コストがかかる。その場合、異なるスキームを用いている他の数値予報モデルの結果は、自ら実装する前のレビューとして有効であろう。

次項から asuca の力学コアの開発において実施した理想実験の結果について述べる。第 2.6.2 項と第 2.6.3 項は 1 次元移流方程式を用いた理想実験である。第 2.6.4 項以降は乾燥大気の非静力学方程式系全てを含む理想実験である。第 2.6.4 項、第 2.6.5 項では方程式系を線形化して導出した解析解との比較を行い、第 2.6.6 項以降はリファレンスや他のモデルの結果との比較を行った。特に、asuca は JMA-NHM の後継モデルとして開発を進めているため、JMA-NHM との比較も行っている。

なお、asuca の力学コアの設定については、実験の条件に合わせて変更すべき設定（水平格子間隔、鉛直層間隔、積分時間間隔、上部スポンジ層の有無や強さ、下部境界条件として摩擦の有無、側面境界条件）を変更する以外は現業運用で想定する設定と同じに固定している。JMA-NHM の場合は、数値拡散の強さ、移流補正スキームの有無等の力学コアの設定が実験によって異なる場合がある。

2.6.2　一様流による 1 次元移流

(1)　はじめに

本項では、流れの場を一様とした場合の 1 次元移流方程式を用いたテストについて述べる。このテストは移流スキームの基礎的な性質の把握によく用いられ、一例として JMA-NHM の移流スキームの開発においてもその結果が示されている (藤田 2003)。

第 2.1.1 項に述べた基礎方程式は、いずれも移流項を含んでいる。物理量 ϕ の 1 次元移流方程式は流れの速度を u として以下のように表される。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial(\phi u)}{\partial x} = 0 \tag{2.6.3}$$

ここで、流れの場を一様 ($u(x) = c$ で一定) とした場合、その解析解は初期状態 $f(x)$ により $\phi = f(x - ct)$ で与えられ、これは ϕ が時間とともに形を変えずに速度 c で平行移動することを意味する。この解析解をリファレンスとして、第 2.4 節で導入した移流スキームが、第 2.3.2 項で述べた時間積分スキームとの組み合わせにおいて、期待される性質を満たしているかを確認することができる。解析解が得られる単純化した流れの問題において、移流スキームの基礎的な性質を把握しておくことは、より複雑な流れの問題に対する移流スキームの振る舞いを考える上での拠りどころとなる。

第 2.4 節で述べたように、asuca の移流スキームには、なるべく高精度を保ちつつ、単調性を保証するために Koren (1993) の流束制限関数を導入した。以下の実験では、解析解と比較して数値解の精度が保たれているか、単調性が保持されているかに着目して実験結果を見ていく。

(2)　asuca と JMA-NHM のスキームの構成

ここでは、テストの対象とする asuca と JMA-NHM のスキームの構成について説明する。

asuca では時間積分に 3 段階ルンゲクッタ法を用い、Koren (1993) の流束制限関数によって移流項を評価する。Koren (1993) の流束制限関数は、風上 3 次差分をベースとしつつ、局所的な場に応じて風上 1 次差分の単調性を利用することで、なるべく高精度を保ちつつ単調性を維持するように構築されている（第 2.4 節）。

JMA-NHM では時間積分にリープフロッグ法を用い、

Asselin のタイムフィルター[4] (Asselin 1972) を併用し、中央 4 次差分によって移流項を評価する。JMA-NHM の標準的な利用では単調性を満たすために Kato (1998) による移流補正を用いている。さらに、高波数成分を取り除くために、水平 4 次線形拡散[5]、非線形拡散[6] (Nakamura 1978) を併用している。ここで、Asselin のタイムフィルター、水平 4 次線形拡散、非線形拡散はそれぞれパラメータの設定が必要である。

(3) 実験設定

一定の移流速度で矩形波[7]を移流させるテストを行う。移流速度は $u = 20$ m/s で一定とする。格子間隔は LFM を想定して $\Delta x = 2$ km とし、x 方向に 200 格子を配置する。初期の分布として n 格子分の区間 ($n\Delta x$) に矩形波の初期分布（例えば図 2.6.1 の赤線）を与え、周期境界条件を課して時間積分する。以下では、初期分布の矩形波の幅（スケール）と高さ（振幅）によってテストを 3 つに分けて、それぞれの着目点と設定を説明する。

解像できるスケールの移流テスト

一つ目の実験では、$20\Delta x$ の区間に矩形の初期分布を与える。一般に、精度のよい数値解を得るには、扱う対象の空間スケールに対して、ある程度細かく格子間隔を設定する必要がある。ここで与える $20\Delta x$ の幅は、格子間隔に対して十分に大きく、解像できる（精度のよい数値解が得られる）スケールと考えられる。asuca のスキームによる結果について、解析解と比較して数値解の精度が保たれているか、単調性が保持されているかを確認する。また、asuca の開発理念のひとつとして目指している人為的な数値拡散の排除が実現できているかについて JMA-NHM と比較する。

積分時間間隔は LFM を想定して、asuca では $\Delta t = 16$ 秒、JMA-NHM では $\Delta t = 8$ 秒とした。

まず、asuca で採用するスキームである、時間積分に 3 段階ルンゲクッタ法を用い、Koren (1993) の流束制限関数によって移流項を評価する実験を行う。また、Koren (1993) の流束制限関数に対する比較のため、移流項の評価に風上 1 次差分および風上 3 次差分を用いた実験を併せて行う。ここで、各実験の説明の先頭括弧内にはその実験名を記述する（以下、同様）。

- asuca
  - (A1) 時間積分: 3 段階ルンゲクッタ法、移流項: Koren (1993) の流束制限関数
- asuca との比較用
  - (AC1) 時間積分: 3 段階ルンゲクッタ法、移流項: 風上 1 次差分
  - (AC2) 時間積分: 3 段階ルンゲクッタ法、移流項: 風上 3 次差分

JMA-NHM については、(2) で説明した JMA-NHM で用いているそれぞれの手法の効果も見るため、以下の組み合わせで実験を行う。

- JMA-NHM
  - (N1) 時間積分：リープフロッグ法、移流項：中央 4 次差分
  - (N2) 実験 N1 に Asselin のタイムフィルターを併用
  - (N3) 実験 N2 に移流補正を併用
  - (N4) 実験 N3 に水平 4 次線形拡散を併用
  - (N5) 実験 N4 に非線形拡散を併用

ここで、Asselin のタイムフィルター、水平 4 次線形拡散、非線形拡散のそれぞれパラメータはいずれも LFM と同じ設定とする。

解像できるスケールの移流テスト（対象とする振幅を変えるテスト）

二つ目の実験では、$20\Delta x$ の区間に矩形の初期分布を与えるが、その高さ（振幅）を 10 倍に設定する。この実験を通じて、JMA-NHM の非線形拡散の特徴である、同じパラメータ設定でも非線形拡散は物理量分布の振幅の大きさによって拡散のかかり方が異なる[8]（大きな振幅の分布に対してより強い拡散がかかる）ことの影響を考察する。

ここでは、asuca と JMA-NHM について

- 初期値の矩形領域の高さを 10 倍にするテスト
  - (A_10) スキームは実験 A1 に同じ
  - (N_10) スキームおよびパラメータ設定は実験 N5 に同じ

を行う。

対象とするスケールを変えるテスト

三つ目の実験では、初期分布の矩形の幅を変えて実験を行う。ここでは、asuca の移流スキームが、どの程度のスケールの現象に対して精度を保てるか、あるいは単調性を保てるかを確認する。また、精度を保てないスケールに対しては、計算安定性の観点から誤差が

---

[4] Asselin のタイムフィルター (Asselin 1972) は以下の式で表される。

$$\phi(t) = \phi(t) + 0.5\nu \left\{\phi(t - \Delta t) - 2\phi(t) + \phi(t + \Delta t)\right\}$$

[5] 水平 4 次線形拡散は以下の式で表される。

$$\mathrm{D_{2D}} = \frac{1}{16 m_{\mathrm{2D}} \Delta t} \left\{ (\Delta x)^4 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} \right\}$$

[6] 非線形拡散 (Nakamura 1978) は以下の式で表される。

$$\mathrm{D_{NL}} = \frac{1}{8 m_{\mathrm{NL}} \Delta t} \left\{ (\Delta x)^3 \frac{\partial}{\partial x} \left(\left| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right\}$$

[7] 矩形波は単純な形でありながら様々な波長のスペクトルを持っており、波長に依存するような数値解の誤差が現れやすいため、このようなテストでの精度の確認に適している。

[8] 物理要素によって拡散のパラメータ設定を変えることはできる。

表 2.6.1　実験名と設定の一覧表

<table>
<tr><td colspan="5">解像できるスケールの移流テスト
矩形波の幅: 20Δx</td></tr>
<tr><th>テストの対象</th><th>実験名</th><th>時間積分法</th><th>移流スキーム</th><th>数値拡散</th></tr>
<tr><td>asuca</td><td>A1</td><td rowspan="3">3段階ルンゲクッタ法</td><td>Koren(1993)のスキーム</td><td rowspan="3">なし</td></tr>
<tr><td rowspan="2">asucaの比較用</td><td>AC1</td><td>風上1次差分スキーム</td></tr>
<tr><td>AC2</td><td>風上3次差分スキーム</td></tr>
<tr><td rowspan="5">JMA-NHM</td><td>N1</td><td>リープフロッグ法</td><td rowspan="2">中央4次差分スキーム</td><td rowspan="3">なし</td></tr>
<tr><td>N2</td><td rowspan="4">リープフロッグ法
+ Asselinのタイムフィルター</td></tr>
<tr><td>N3</td><td rowspan="3">中央4次差分スキーム
+ 移流補正</td></tr>
<tr><td>N4</td><td>水平4次線形拡散</td></tr>
<tr><td>N5</td><td>水平4次線形拡散
+ 非線形拡散</td></tr>
<tr><td colspan="5">解像できるスケールの移流テスト（対象とする振幅を変えるテスト）
矩形波の幅: 20Δx、ただし、矩形の高さを10倍とする</td></tr>
<tr><th>テストの対象</th><th>実験名</th><th>時間積分法</th><th>移流スキーム</th><th>数値拡散</th></tr>
<tr><td>asuca</td><td>A_10</td><td>3段階ルンゲクッタ法</td><td>Koren(1993)のスキーム</td><td>なし</td></tr>
<tr><td>JMA-NHM</td><td>N_10</td><td>リープフロッグ法
+ Asselinのタイムフィルター</td><td>中央4次差分スキーム
+ 移流補正</td><td>水平4次線形拡散
+ 非線形拡散</td></tr>
<tr><td colspan="5">対象とするスケールを変えるテスト
矩形波の幅: 32Δx, 16Δx, 12Δx, 8Δx, 4Δx, 2Δx</td></tr>
<tr><th>テストの対象</th><th>実験名</th><th>時間積分法</th><th>移流スキーム</th><th>数値拡散</th></tr>
<tr><td>asuca</td><td>A_Δ</td><td rowspan="2">3段階ルンゲクッタ法</td><td>Koren(1993)のスキーム</td><td>なし</td></tr>
<tr><td>asucaの比較用</td><td>AC_Δ</td><td>中央4次差分スキーム</td><td>水平4次線形拡散</td></tr>
</table>

成長しないことが望ましく、その点を確認する。

この実験では、$32\Delta x, 16\Delta x, 12\Delta x, 8\Delta x, 4\Delta x, 2\Delta x$ の矩形を初期値として与える。積分時間間隔は一つ目の実験と同じ $\Delta t = 16$ 秒である。

asuca のスキームおよびその比較のため、以下の実験を行う。

- asuca
  - (A_Δ) 時間積分: 3 段階ルンゲクッタ法、移流項: Koren (1993) の流束制限関数（スキームは実験 A1 に同じ）
- asuca との比較用
  - (AC_Δ) 時間積分: 3 段階ルンゲクッタ法、移流項: 中央 4 次差分、に水平 4 次線形拡散を併用

以上のここまで説明した実験について、実験名とその設定を表 2.6.1 にまとめるので適宜参照いただきたい。

(4)　解像できるスケールの移流テスト

asuca のテスト結果を図 2.6.1 に示す。実験 A1 の Koren (1993) の流束制限関数による数値解（緑線）は、実験 AC1 の風上 1 次差分による数値解（青線）に比較して解析解からの減衰が小さい。また、実験 AC2 の風上 3 次差分による数値解（紫色線）に見られるような元の分布に比較して上下にはみ出すところ（オーバーシュート、アンダーシュート）が見られず、単調性が保持されており良好な結果である。

次に、JMA-NHM のテスト結果について、図 2.6.2 に実験 N1 （緑線）、実験 N2（青線）の結果を示し、図 2.6.3 に実験 N3（緑線）、実験 N4（青線）、実験 N5（紫色線）の結果を示す。

移流補正を加えた実験 N3 の結果（図 2.6.3 の緑線）から分かるように、JMA-NHM ではこの移流補正が単調性の維持に大きく寄与している。この図で実験 N3 の結果の難点をあげれば対称性がやや崩れている点である。また、移流補正をした場合、保存性が厳密には成り立たたず、この実験では総量が 1%程度増加した。水平 4 次線形拡散、非線形拡散を併用した場合の実験 N4, N5 の結果（それぞれ図 2.6.3 の青線、紫色線）は、上流側と下流側の対称性も崩れていない。

JMA-NHM では、実験 N5（図 2.6.3 の紫色線）で良好な結果を得ることができたが、Asselin のタイムフィルター、水平 4 次線形拡散、非線形拡散について、それぞれのパラメータの設定を必要とした。一方、asuca では、実験 A1 の結果（図 2.6.1 の緑線）を得るためにパラメータを設定する必要はなく、人為的な数値拡散を用いなくても良好な結果を得ることができた。

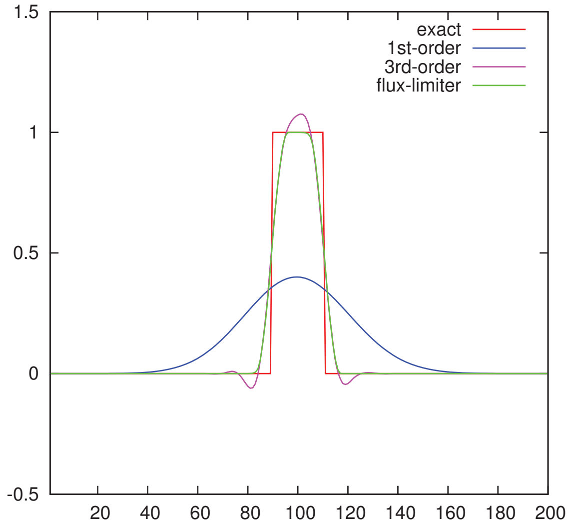

図 2.6.1　1 次元移流方程式の数値解。周期境界条件で 2 周期後の結果。解析解 (exact) を赤線で示した。時間積分法は 3 段階ルンゲクッタ法による。Koren (1993) の流束制限関数（実験 A1、緑線）、風上 1 次差分（実験 AC1、青線）、風上 3 次差分（実験 AC2、紫色線）による計算結果を示す。

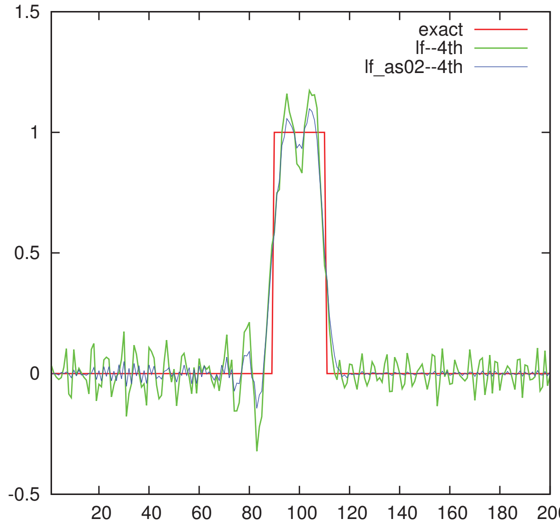

図 2.6.2　図 2.6.1 と同じ。ただし、時間積分法はリープフロッグ法により、中央 4 次差分（実験 N1、緑線）、Asselin のタイムフィルターを適用した結果（実験 N2、青線）。

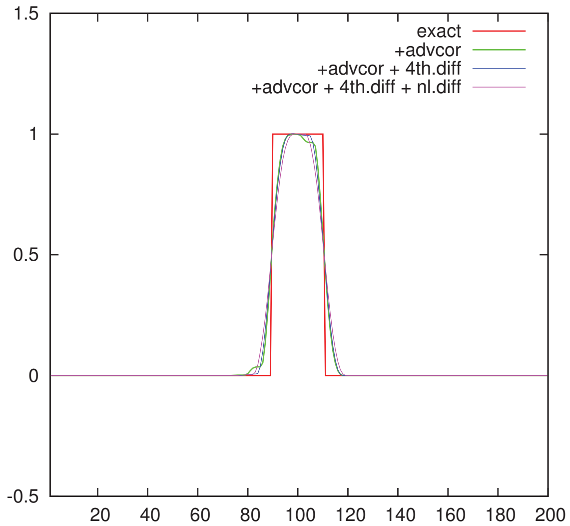

図 2.6.3　図 2.6.2 のつづき。移流補正（実験 N3、緑線）、水平 4 次線形拡散（実験 N4、青線）、非線形拡散（実験 N5、紫色線）を加えた結果。

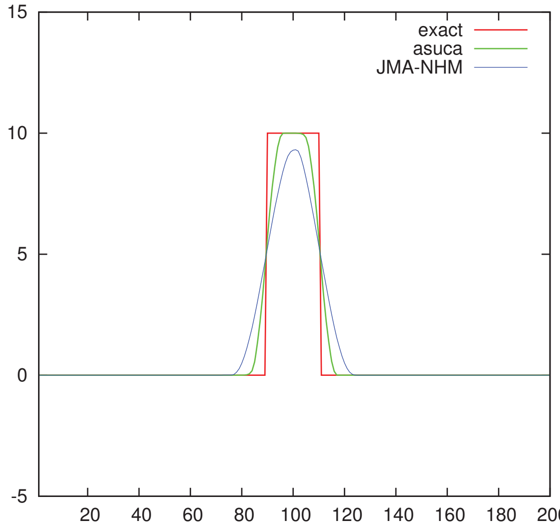

図 2.6.4　1 次元移流方程式の数値解。図 2.6.3 等と比較して、初期値の高さ（振幅）を 10 倍にした。周期境界条件で 2 周期後の結果。解析解 (exact) を赤線で示した。asuca のスキーム（実験 A_10、緑線）、JMA-NHM のスキーム（実験 N_10、青線）の計算結果。

(5)　解像できる空間スケールの移流テスト（対象とする振幅を変えるテスト）

ここでは、これまで (4) に述べた実験（実験 N5、図 2.6.3 等）に比べて初期値の矩形領域の高さを 10 倍にする実験 A_10 および実験 N_10 の結果について述べる。この実験結果を図 2.6.4 に示す。実験 N_10 と実験 N5 は同じパラメータ設定であるが、図 2.6.4 の青線で示した実験 N_10 の JMA-NHM の計算結果は、実験 N5 の結果 (図 2.6.3 の紫色線) に比較して、より強く数値拡散がかかり、減衰が大きくなってしまっている。一方、図 2.6.4 に緑線で示した実験 A_10 の asuca の計算結果は、実験 A1 の結果（図 2.6.1 の緑線）と比較して分かるように、波の振幅の大きさによって元の解に対する結果が変わるという性質はない。

(6)　対象とするスケールを変えるテスト

ここでは初期に与える矩形の空間スケール（幅）を変えて、それに対する移流スキームの振る舞いを確認する。矩形の幅は実験設定で述べたとおり、$32\Delta x, 16\Delta x, 12\Delta x, 8\Delta x, 4\Delta x, 2\Delta x$ とする。

図 2.6.5 は、asuca と同じく、時間積分に 3 段階ルンゲクッタ法を用い、Koren (1993) の流束制限関数によって移流項を評価した結果である（実験 A_Δ）。上段

の左から幅が $32\Delta x$, $16\Delta x$, $12\Delta x$、下段の左から $8\Delta x$, $4\Delta x$, $2\Delta x$ の矩形を初期値として与えた実験の結果を示している。図 2.6.5 の結果は、上段の $12\Delta x$ 以上のスケールの矩形については単調性を維持しつつ減衰が小さい。一方、下段に示した、それ以下のスケールでは数値解の減衰が大きくなっており、$4\Delta x$ の波では解析解の半分程度まで減衰し、$2\Delta x$ の波ではさらに減衰している。

図 2.6.6 に上記の実験 A_Δ の結果を考える上での対比として、時間積分に 3 段階ルンゲクッタ法を用い、移流項を中央 4 次差分で評価して適当な水平 4 次線形拡散をかけた結果を示す（実験 AC_Δ)。図 2.6.6 を見ると、どのスケールの波にもアンダーシュートが見られ、上段の $12\Delta x$ 以上である大きなスケールの矩形についても小さなスケールのオーバーシュート、アンダーシュートが見られるなど、ノイズが生じてしまっている。これは、中央 4 次差分の性質から想定される結果である。$4\Delta x$, $2\Delta x$ の波についてもノイズが見られるが、矩形波のピーク値という観点では、図 2.6.5 の結果よりも減衰が小さいように見える。しかし、実験 AC_Δ（図 2.6.6）の $4\Delta x$, $2\Delta x$ の減衰が小さい結果は、オーバーシュートの性質が適当な数値拡散によって抑えられて、極値としては偶然に元の値に近い結果となったためと考えられる。

$2\Delta x$ の波は、格子点で現象を波として表現するときの限界となるスケールであり、一般に数値拡散はこの程度のスケールの波をノイズと捉えて振幅を抑えるよう設計されている。テスト A_Δ の結果（図 2.6.5）のように asuca ではこのスケールの波をきちんと減衰させる性質があるため別途人為的な数値拡散を加える必要性がない。

(7) まとめ

一様流による 1 次元移流によるテストにおいて asuca の時間積分スキームと移流スキームの特徴を確認した。

「解像できるスケールの移流テスト」(20 格子幅の矩形の物理量分布を移流させるテスト) では、asuca は任意性のあるパラメータを用いないスキームで単調性を維持しつつ解析解に近い計算結果を得た。

「対象とする振幅を変えるテスト」(矩形の物理量分布の高さを 10 倍にするテスト）では、JMA-NHM では非線形拡散を併用することによって、解の絶対値の大きさによって結果の形状が変わる性質があるのに対し、asuca はそのような性質は持たないことが分かった。

「対象とするスケールを変えるテスト」(物理量分布の矩形の幅を小さくしていくテスト）では、asuca で選択したスキームは、解像されるべきスケールの波を良く解像し、一方で解像できないスケールの波は減衰させる性質であることを確認した。このことは、人為的な数値拡散を排除するという asuca の開発理念（第 1.4 節）を実現できていることを意味するものと考えている。

2.6.3 水物質落下の 1 次元テスト

(1) はじめに

asuca では、水物質落下の計算方法を組み込むにあたり、JMA-NHM で採用されている Kato (1995) によるボックスラグランジアンスキームと、短い時間間隔で繰り返し積分を行う time-split 法と Koren (1993) の流束制限関数を用いる方法を比較し、その結果精度と安定性に優れる後者を採用している。また、その後も計算効率改善のために他スキームとの比較を行なっている。

この項では、まず水物質落下計算の特徴について述べ、asuca における計算方法としてこれまでに検討を行った 5 種類の手法について説明する。そして、1 次元テストを元に比較した結果を紹介する。

(2) 降水落下計算の特徴

まず、第 2.3.4 項で述べたように、水物質の落下を含めた鉛直移流は次式で表される。

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho_\alpha\right)+\left\{\frac{1}{J}\rho_\alpha(W+W_{t_\alpha})\right\}_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}=R_{q\alpha} \tag{2.6.4}$$

ここで、ρ_α は水物質の密度、W は大気の鉛直速度、$R_{q\alpha}$ は水平移流や摩擦などその他の項にあたる。W_{t_α} は大気に対する水物質の相対的な落下速度であり、混合比から診断的に計算される (山田 2003; 原 2012b)。移流速度が予報変数となっていた第 2.4 節と異なり、移流速度は移流対象によって診断的に求めている。

(2.6.4) 式の鉛直移流項の計算においては、第 2.4.1 項で述べた移流スキームと同様に、計算効率がよく、安定性が高く、保存性を満たし、高精度で必要メモリ量の少ないスキームが望ましいが、残念ながら全てを満たす手法は見つかっていない。このため、水物質の落下計算に必要な要件を勘案した上でスキームを選択する必要がある。

水物質の落下計算では、移流スキームと異なり次の点にも注意が必要となる。一般に、モデルの鉛直層は下層ほど層間隔が細かくなり、最下層では数 10 m となる。一方、W_{t_α} は混合比が大きくなると 10 m/s を越えることがあるため、CFL 条件を満たすように安定に計算を行うには積分時間間隔を小さくする必要がある。asuca で LFM を実行する場合、現状では積分時間間隔 $\Delta t = 50/3 \simeq 16.67$ 秒としているが、特段の処理を行わない場合は、安定に計算を行うために、例えば積分時間間隔を $\Delta t = 4$ 秒以下にする必要がある [9]。このように、水物質の落下速度に合わせて全体の積分時間間隔を決めると、積分時間間隔を小さくする必要

[9] 鉛直層間隔は山のないところの最下層で 40 m であり、水物質の落下速度を最大 10 m/s として考えた場合。

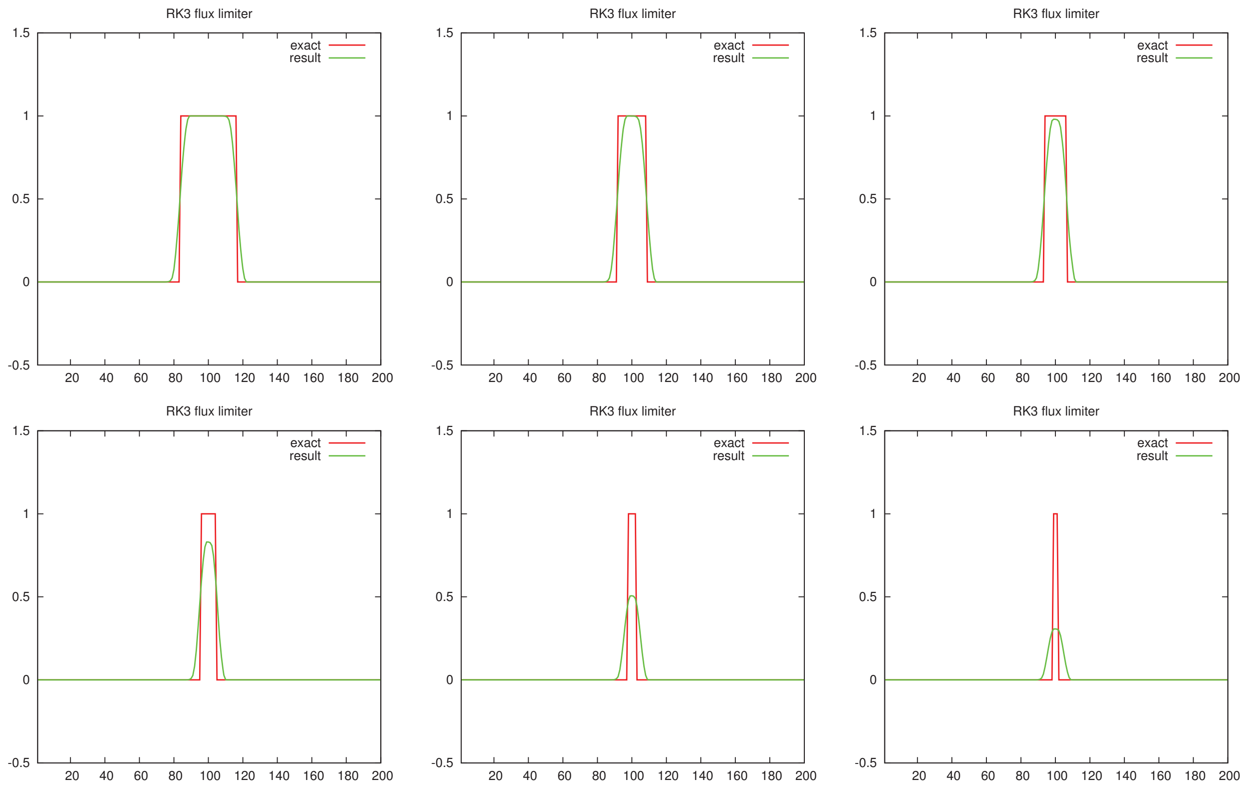

図 2.6.5　対象スケールによる移流スキームの振る舞い。周期境界条件で 2 周期後の結果。Koren (1993) の流束制限関数、時間積分法に 3 段階ルンゲクッタ法を用いた（実験 A_Δ）。（上段）左から $32\Delta x$, $16\Delta x$, $12\Delta x$、（下段）左から $8\Delta x$, $4\Delta x$, $2\Delta x$ の矩形を初期値として与えた結果。

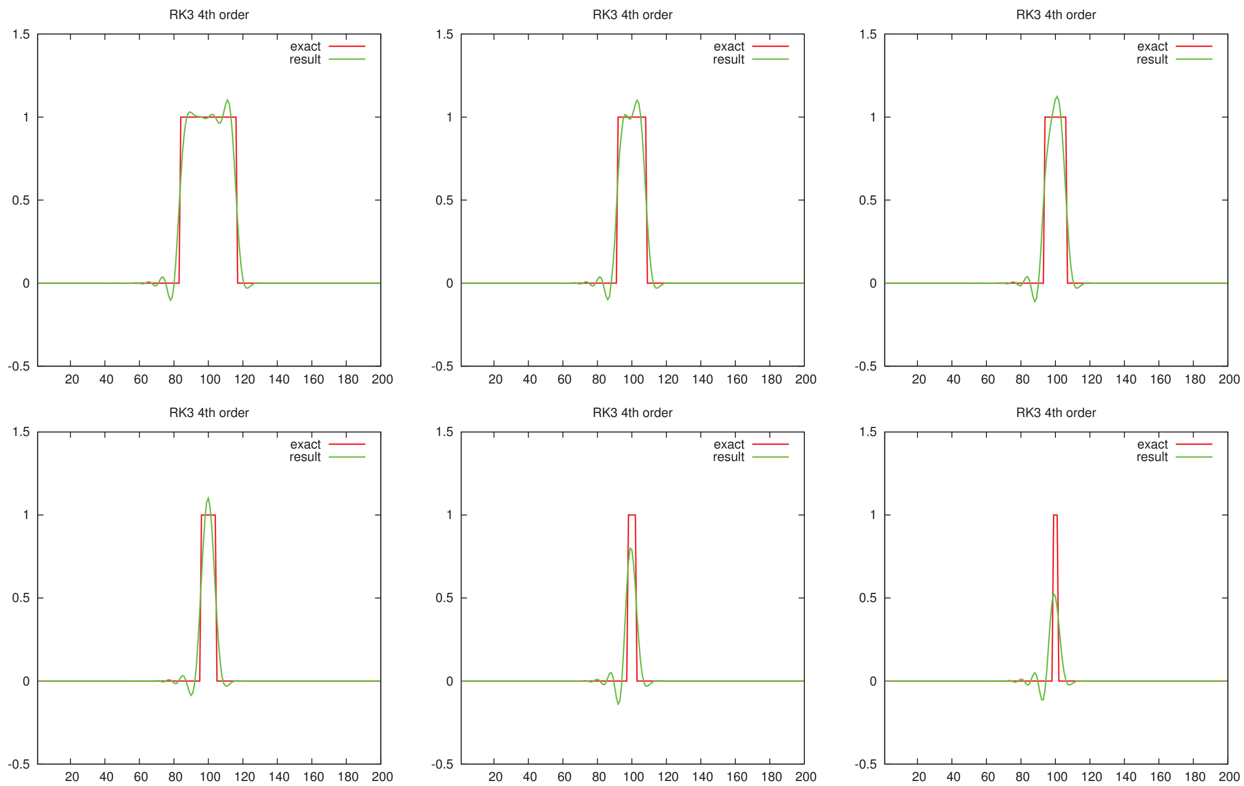

図 2.6.6　図 2.6.5 に同じ。ただし、中央 4 次差分に 4 次水平拡散を併用（実験 AC_Δ）。

があり、非常に計算時間がかかるため、工夫が必要になる。また、移流スキーム同様に水物質の質量が負の値とならないようにする必要がある。この要請は質量の性質から自明であるが、単調性を保証しないスキームでは負の値が生じうる[10]ため、負値補正などの処理を行う必要がある。

(3) これまでに検討したスキーム

移流スキームは、オイラー的に考える方法とラグランジュ的に考える方法の 2 つに大きく分けることができる。オイラー的に考える方法では、第 2.4 節のように、あるセル境界のフラックスを求め、流入・流出を考える。

ラグランジュ的に考える手法では、積分時間間隔の中で、あるセル内の水物質がどこに到達するかを計算する (到達点探索)、あるいはあるセルに到達する水物質はどこから来たものかを計算する (上流点探索)。この手法では、CFL 条件による制約を受けないため大きなクーラン数でも安定して計算を行うことができるものの、積分時間間隔内で水物質及び落下速度は一定であるとの仮定に基づいているため、クーラン数が大きくなるに従って精度が低下する点に注意が必要となる。また、Smolarkiewicz and Pudykiewicz (1992) で示されているように、セミラグランジュ法は CFL 条件による制限を受けないものの、計算安定性を保つために次の条件を満たす必要がある。

$$\frac{(W+W_{t_\alpha})_{k+\frac{1}{2}}-(W+W_{t_\alpha})_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta z_k}\Delta t \le 1 \quad (2.6.5)$$

ただし、Δz_k は、k 層目のセルの鉛直層間隔を表す。この条件を Lipschitz 条件といい、積分する時間の中であるセルを上流点とする水物質を別のセルを上流点とする水物質が追い越してはいけないことを意味する。このため、セミラグランジュ法を用いる場合でも、Lipschitz 条件を満たすように短い積分時間間隔に分割して扱う必要がある。また、水物質の落下計算にセミラグランジュ法を用い、大気の鉛直移流と分けて計算を行う場合は、大気の上昇流により水物質が同じ高度にとどまるような状況になると計算安定性に問題が生じうる点に注意が必要となる。

これまでに、オイラー的な手法としては、

- time-split 法と Koren (1993) を用い、落下速度を線形補間する方法 (以下、asuca の方法と呼ぶ。)

を検討し、ラグランジュ的な手法としては、

- ボックスラグランジアンスキーム (Kato 1995)
- PPM[11], PRM[12] を用いたセミラグランジュ法
- minmod 流束制限関数によるセミラグランジュ法

の検討を行った。以下に、これらのスキームの概要について説明する。

asuca の方法

asuca では、鉛直方向の移流に関する項を安定に計算できるように短い積分時間間隔に分割して扱う time-split 法を用いている。水物質の移流計算には、他の移流計算と同様に Koren (1993) の流束制限関数を用いる。

移流スキームとしては基本的に 3 次精度風上差分（ただし、水物質分布が急峻な場では 1 次精度）を用いることになるため、精度が高いことが利点として挙げられる。しかし、降水により積分時間間隔の分割が多く起こるような状況では計算量が多くなり、降水の状況に応じて実行時間が変わりうる点に注意が必要となる。

ボックスラグランジアンスキーム (Kato 1995)

このスキームは JMA-NHM で採用している手法である。ボックスラグランジアンスキームでは、まず各セル内における水物質と落下速度が平均値により一定であると仮定する。そして、図 2.6.7 のように、Δt の間、落下速度は一定のまま水物質が落下すると考える。すなわち、箱状の水物質が落下するのをラグランジュ的に計算するイメージであり、それがこのスキームの名前の由来となっている。そして、Δt 秒後に落下した水物質を合計することで、Δt 秒後の水物質の分布を求める。

ボックスラグランジアンスキームはセル内の水物質を一様に仮定しているため一次精度であるものの、ラグランジュ的に扱うため積分時間間隔を長くとることができる。ただし、Kato (1995) でも述べられているクーラン数があまり大きくなると安定に計算が行えない点に注意する必要がある。また、水物質の落下と上昇流による移流を別々に計算することになるため、計算安定性に問題が生じうる。

PPM, PRM によるセミラグランジュ法

水物質の落下計算のように、落下速度が大きく CFL 条件が厳しい場合は、セミラグランジュ法を用いることで効率的に計算を行える場合がある。セミラグランジュ法では、セル境界を通過する水物質の上流点を探索し、その上流点からセル境界までの水物質の量の積算値を計算することによってフラックスを求める。ただし、水物質は各セルの平均値として与えられているため、何らかの方法で上流点からセル境界までの水物質分布を求める必要がある。セミラグランジュ法では、このセル間の水物質の分布を決める補間関数に何を用いるかによって精度が左右される。ただし、高精度な補間関数では単調性が保たれずに新たな極値が生じたり、負値が生じる場合があるため、これを抑えるために補正を行うスキームが提案されている。この高精度かつ単調性を保証する補間関数の計算、及び上流点探索には計算コストがかかり、実行時間とのトレードオ

[10] 例えば、差分法により新たな極値が生じることによるものや、セミラグランジュ法の補間関数が 0 以下となることによるものが考えられる。
[11] Piecewise Parabolic Method の略
[12] Piecewise Rational Method の略

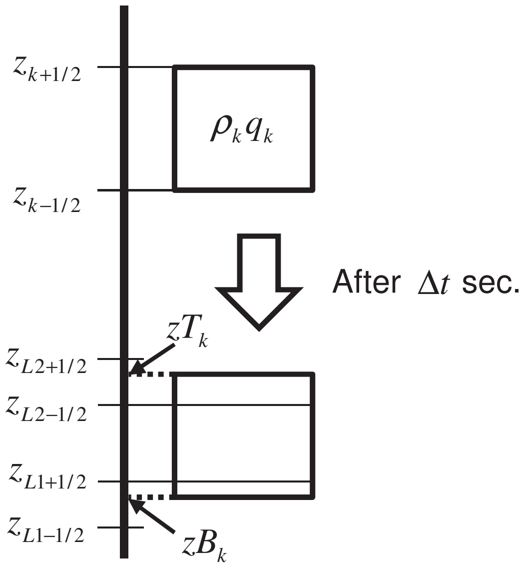

図 2.6.7 ボックスラグランジアンスキームの概念図。Kato (1995) を元に作成。z_k にある水物質が、セル内一定の速度で箱状に落下し、Δt 秒後の水物質の下端が $z_{L1+1/2}$ と $z_{L1-1/2}$ の間の zB_k に、上端が $z_{L2+1/2}$ と $z_{L2-1/2}$ の間の zT_k に到達することを表す。

フとなる。水物質の落下計算に必要な精度を満たしつつ、なるべく高速な補間関数が求められる。

これまでに、高精度の補間関数として Colella and Woodward (1984) による PPM と、Xiao and Peng (2004) による PRM について検討を行った。PPM は、補間関数に 2 次曲線を用い、この関数に対して急勾配な場合の線形化、単調性のための処理を施すことで高精度かつ単調性を得ようとする方法である。PRM は、PPM を元にしている手法で、補間関数に有理関数を用いることで単調性を保つための処理を少なくすることが可能となっている。

これらの方法の利点として、高精度な補間関数を用いるために精度が高いこと、単調性を保証するスキームであることが挙げられる。しかし、上流点探索と高精度補間関数の計算に時間がかかること、水物質の落下の計算と大気の上昇流による移流を別々に計算するため、安定性が損なわれる点が欠点として挙げられる。

minmod 流束制限関数によるセミラグランジュ法

この手法は、前述のスキームに対する検討を踏まえてさらに高速なスキームを得るために、現在東京工業大学と共同で開発しているものである。

この方法では、補間関数として 3 次精度と 1 次精度の関数を考える[13]。第 2.4 節で述べたように、3 次精度の補間関数は精度は高いが単調性が維持できないのに対し、1 次精度の補間関数は精度は低く減衰性があ

[13] 3 次精度補間の場合は 2 次曲線による補間、1 次精度補間の場合はセルの値そのものとなる。

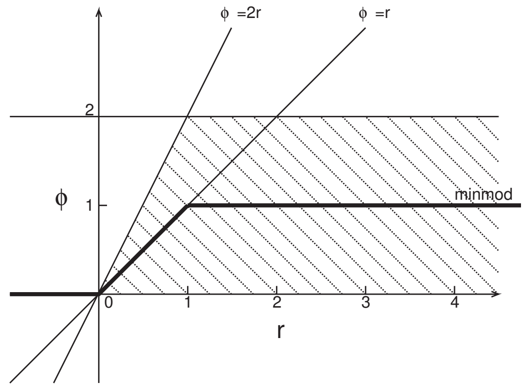

図 2.6.8 minmod 流束制限関数。図 2.4.2 に同じ。

るものの、単調性が維持できる特徴がある。minmod 流束制限関数を使うことで、これらの補間関数を水物質の分布によって切り替え、単調性を維持しつつなるべく高精度の計算を行うものである。minmod 流束制限関数を図 2.6.8 に示す。この方法は補間関数が PPM や PRM に比べ非常に単純であるため、流束制限関数を計算する必要はあるものの、計算コストは低い。ただし、このスキームでは補間関数の計算が単純な反面、補間した値が負値となることがありうる。これにより水物質の無いセルからフラックスの流出が計算される状況がありうるため、フラックス調整などの処理が必要となる。

このスキームは、他のセミラグランジュ法に比べて計算速度が速い。ただし、このスキームは現在もまだ開発中であり、単調性と安定性に課題が残る。

(4) 1 次元テストの設定

前述のスキームを比較する際に用いた 1 次元テストについて説明する。

水物質の鉛直移流のみの振る舞いを調べるため、(2.6.4) 式において、簡単のために大気の鉛直速度 $W = 0$ として、水物質の落下のみを考える。この時、解くべき方程式は、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho_\alpha\right) + \left(\frac{1}{J}\rho_\alpha W_{t_\alpha}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} = 0 \qquad (2.6.6)$$

となる。

1 次元テストとして、Kato (1995) による実験を行う。これは、図 2.6.9 の赤線のような混合比分布の水物質をおき、時間積分を行うにしたがってどのように分布が変化するかを調べるものである。

なお、鉛直層設定は単純化して一定 (70 m 間隔) とし、$\Delta t = 30$ 秒であるとする。この設定で実験を行うと、落下速度の大きい所ではクーラン数が 1 を超える格子が生じるので、計算安定性に関しても調べることができる。理想的な水物質の分布の時間変化を図 2.6.9 に示す。これは、長い計算時間をかけて、高精度スキー

ム[14]により非常に短い積分時間間隔で計算した場合の結果である。このように、新たな極値が現れず、減衰が生じていない分布となることが望ましい。

この理想分布と比較し、積分後の分布が図 2.6.9 と大きく違わないかによって精度を確認する。また新たな極値が生じていないかにより、単調性を確認する。実行時間については、この 1 次元テストを SR16000M1 上で 10000 回繰り返し行った際の実行時間を元に比較した。ただし、このテストは現業時に用いる層間隔や積分時間間隔とは異なるため、単純に実行時間の比較はできない点に注意が必要である[15]。

以下では、この 1 次元テストを用いて各スキームを比較する。

(5) 比較結果

各スキームによる 1 次元テストの結果を図 2.6.10 から図 2.6.14 に、各スキームの結果及び実行時間を表 2.6.2 にまとめる。

以下、各スキームの特徴について詳しく見る。

asuca の方法

図 2.6.10 を見ると、分布の形状は理想的な分布と概ね一致しているものの、水物質の極大値が時間が進むに連れて増加しており、単調性が保たれていないことが分かる。これは、セル境界における落下速度の計算方法に起因する。

第 2.2.3 項で述べたように、有限体積法では水物質の混合比は各セルの平均値としてセル中心に定義される。第 2.4 節で示した移流計算ではセル境界に風速が定義されていたのに対し、水物質の落下速度は水物質の混合比から診断され、セル中心で診断されることになるため、何らかの方法でセル境界の落下速度を求める必要がある。この方法では、セル境界における落下速度を単純内挿により求めているが、これは 2 次精度の補間にあたる。Godunov の定理により、1 次以上のスキームには単調性は保証されない。このため、第 2.4 節で求めた移流スキームを降水落下の移流計算に用いても単調性を保つことはできない。もしセル境界における落下速度の計算に、後述する PPM のような単調性のある高精度補間を用いれば、図 2.6.10 のような数値振動は生じなくなるが、計算コストが増加してしまう。

また、第 2.3.4 項で示したように、この方法ではある鉛直カラム内全体のクーラン数を調べ、その中でクーラン数が条件を破らないように短い積分時間間隔を決める。分割した短い時間積分では、第 2.3.2 項で述べた Wicker and Skamarock (2002) による 3 段階ルンゲクッタ法による計算を行う。このため、分割した短い時間積分内で 3 ステップの計算を行うため、降水により短い積分時間間隔への分割が多く起こる状況では実行時間が長くなる。これは、日々決められた時刻までに実行を終える必要がある現業モデルとしては、運用上問題となりうる。

しかし、この方法では水物質の落下と上昇流を併せて扱うことができるため、後述するボックスラグランジアンスキームやセミラグランジュ法より安定性が高い。また、その他の予報変数の移流計算と同じスキームであるため、予報変数間で不整合が起きにくいといった点も利点として挙げられる。

現在、asuca では安定性と精度、及びその他の移流計算との整合性を考慮し、このスキームを採用している。これまでに特に目立った問題は生じていないものの、ここで示したように実行時間と単調性の面で問題が生じうるため、今後別のスキームへの変更を検討する必要があるだろう。

ボックスラグランジアンスキーム

図 2.6.11 の 1 次元テストの結果をみると、特に目立った新たな極値は生じていないものの、各予想時刻において上部で分布が歪んでいる様子がみえる。

ボックスラグランジアンスキームでは、セル内の水物質がその平均値で一定であるとしており、これは 1 次精度の補間にほかならない。また、本来はその時間内で水物質の分布は絶えず変化し、落下速度も変化しているはずである。水物質の混合比は小さければ小さいほど落下速度は小さいと診断されるため、図 2.6.9 のように時間が経った後も上層に水物質が残った分布となるはずである。しかしながらボックスラグランジアンスキームでは積分時間間隔内は落下速度一定として計算しているために分布が広がらず、初期の分布を保ったまま落ちてくるために歪んだ分布となる。

このようにボックスラグランジアンスキームはクーラン数が 1 より大きい状況でも動作するものの、精度が低下する。実際に、初期の水物質分布を変えてテストを行った際にはノイズが生じることがあった。また、1 次精度であるため、逆に積分時間間隔が短い場合は解の拡散性が大きく、減衰が大きい結果となる (図略)。

ボックスラグランジアンスキームを用いる場合は、水物質の落下計算と鉛直風による移流を分けて計算することになるため、計算安定性の面でも問題となりうる。

PPM, PRM によるセミラグランジュ法

図 2.6.12、図 2.6.13 を見ると、PPM と PRM で共に弱い減衰が生じているが、補間関数に単調性を保つための処理を行っているため、新たな極値は生じておらず、単調性は保たれている。しかし、PPM, PRM によるセミラグランジュ法は、他のラグランジュ的な手法に比べて比較的実行時間が長い (表 2.6.2)。これは、いずれの方法も補間関数が複雑であるがゆえに計算に時間がかかることを表している。このように、これらの

[14] 移流スキームには Koren (1993) を用い、セル境界の落下速度計算に PPM を用いた。

[15] セミラグランジュ的な手法では、格子間隔が可変の場合は到達点または上流点の格子番号を求める処理が複雑になるため、さらに計算時間を要する。

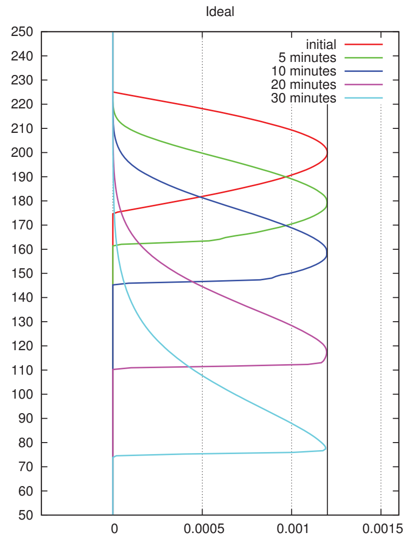

図 2.6.9 水物質落下の 1 次元テストの理想的な結果。各線が予想時刻別の水物質の混合比の分布を表す。縦軸は鉛直方向の格子番号で、格子番号が大きいほど高度が高い。横軸は混合比 [kg/kg] を表す。

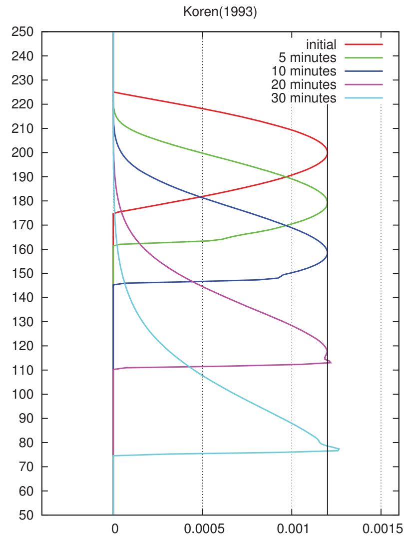

図 2.6.10 Koren (1993) による 1 次元モデルの結果。グラフは図 2.6.9 に同じ。

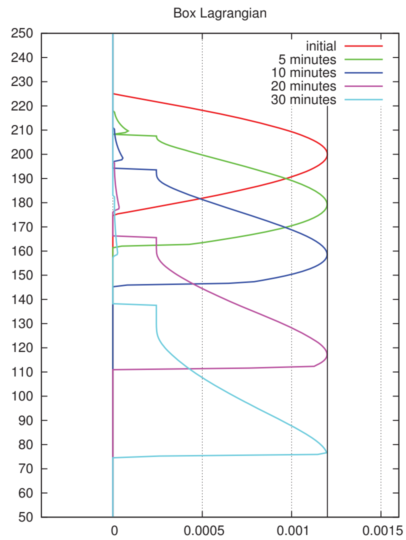

図 2.6.11 図 2.6.9 に同じ。ただし、ボックスラグランジアンスキーム (Kato 1995) による。

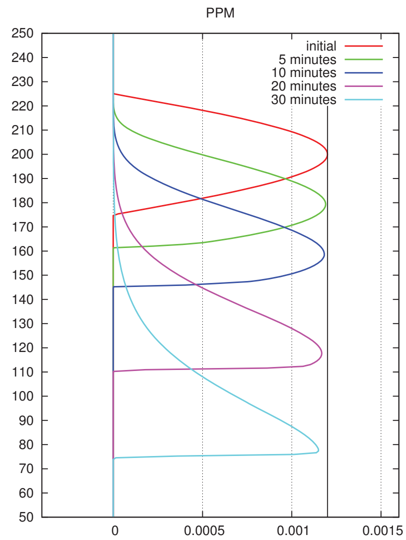

図 2.6.12 図 2.6.9 に同じ。ただし、セミラグランジュ法で補間関数は PPM(Colella and Woodward 1984) による。

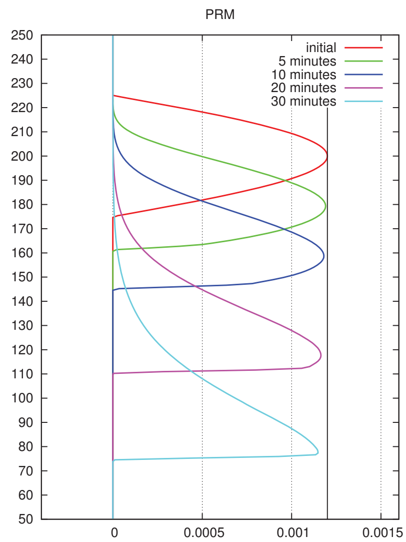

図 2.6.13 図 2.6.9 に同じ。ただし、セミラグランジュ法で補間関数は PRM(Xiao and Peng 2004) による。

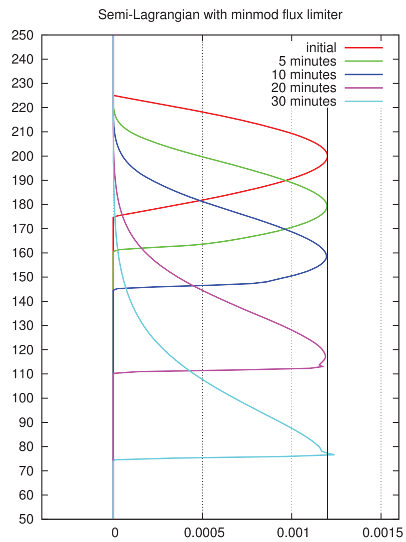

図 2.6.14 図 2.6.9 に同じ。ただし、minmod 流束制限関数によるセミラグランジュ法による。

表 2.6.2　1 次元テストによる各スキームの特性。実行時間は SR16000M1 上で 1 次元テストを 10000 回繰り返すのに要した時間。ただし、現業時に用いる鉛直層の設定とは異なるため、単純な比較ができないことに注意が必要。○ は該当する性質を満たしていること、△ は問題を生じる可能性があることを表す。

スキーム	基本精度	安定性	単調性	保存性	実行時間（単位は秒）	備考
asucaの方法	3次	○	△ セル境界の落下速度を線形内挿により計算	○	144	その他の予報変数の移流と整合
ボックスラグランジアンスキーム(Kato 1995)	1次	△ 大気の鉛直流と別に計算	△ クーラン数が大きくなると保証されない	○	7	
PPM によるセミラグランジュ法	3次	△ 大気の鉛直流と別に計算	○	○	48	
PRM によるセミラグランジュ法	3次	△ 大気の鉛直流と別に計算	○	○	60	
minmod 流束制限関数によるセミラグランジュ法	3次	△ 大気の鉛直流と別に計算	△ セル境界の落下速度を線形内挿により計算	○	32	負値補正を行う

スキームは精度は高く、単調性は保証されているものの、計算コストが大きい。また、ボックスラグランジアンスキーム同様に、水物質の落下と鉛直風による移流を別に扱うために、計算安定性に問題が生じうる。

minmod 流束制限関数によるセミラグランジュ法

1 次元テストの結果 (図 2.6.14) を見ると、精度では問題ないものの、極大値が元より大きくなっており、単調性を保てていないことが分かる。これは、セル境界の落下速度を線形内挿によって求めていることと、前述のフラックス調整を行なっていることが原因と考えられる。この方法では、水物質の質量が負の値となるような場合はフラックスの量を調整し、1 つ上のセルに戻す処理を行っており、これにより極大値が元より大きくなっている。表 2.6.2 に示すように、このスキームは精度、実行速度では概ね問題ないものの、単調性に課題が残る。セル境界の落下速度の計算及びフラックス調整に対して何らかの対応を行う必要があるだろう。

(6)　まとめ

本項では、asuca の水物質の落下計算スキームとしてこれまでに検討した様々なスキームを紹介し、その利点と欠点を示した。

asuca に降水落下スキームを組み込む際には、ボックスラグランジアンスキームと、time-split 法と Koren (1993) の流束制限関数を用い落下速度を線形補間で求める方法を検討した。その結果、安定性と精度、そして他の移流計算との整合性を考慮し、後者の手法を用いることとした。しかし、この方法は事例により実行時間が変わり、単調性が保てないという難点がある。

ここで紹介したように、セミラグランジュ法を用いれば CFL 条件の制約を受けないため、実行時間のばらつきを抑えることが期待できる。しかし、上流点の探索と高精度補間関数は計算に時間がかかり、たとえ高精度の補間関数を用いたとしてもクーラン数が大きな状況では精度が低下し、水物質の質量が負となる場合もありうる。また、水物質落下と大気の上昇流を別に扱うことで、計算安定性に問題が生じうる。

精度と安定性、計算コストはいずれもトレードオフの関係にあり、万能なスキームは存在しない。水物質の落下計算に関わる要件について今後も精査し、要求に沿ったスキームを選択していく必要がある。

謝辞

minmod 流束制限関数によるセミラグランジュ法については、開発にあたり東京工業大学の青木尊之教授、下川辺隆史助教、小野寺直幸特任助教に助言とご支援をいただきました。

2.6.4　2 次元定常山岳波

2 次元定常山岳波は、方程式系を線形化することにより解析解を導くことができる実験として有名である。前項までに述べてきた移流方程式の理想実験と異なり、乾燥大気に対する非静力学方程式系全てを含んでおり、力学過程の性能が端的に表れる。また、この実験では非静力学効果をほとんど無視できるような条件を与えることも、その逆も可能であり、非静力学効果が無視できないような場合には、非静力学モデルと静力学モデルの違いがよく表れる。以上から、非静力学モデルの開発の歴史において、初期の段階から使われてきた実験手法である。第 1.2.1 項で述べてきた郷田・栗原 (1991) や室井 (1998) には 2 次元定常山岳波の実験結果が示されている。また、Ikawa and Saito (1991) には、3 次元定常山岳波のシミュレーション結果が述べられている。JMA-NHM の開発においては力学過程の改良を行った際に、この 2 次元定常山岳波をテストすることもよく行われており、移流スキーム (藤田 2003) や鉛直ハイブリッド座標 (石田 2008) の開発においても利用されている。

ここで、前に述べた線形化の手法を通じて、非静力学方程式系と静力学方程式系の違いを簡単に見る。水

平 1 次元、鉛直 1 次元（z とする）の 2 次元とし、一様な水平風 u_0 を与えたときの定常状態における鉛直風 w は、非静力学方程式系と静力学方程式系を線形化し、$w = \hat{w}\exp(ikx)$ の形の解を考えると、$\hat{w}$ は

$$\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial z^2} + (l^2 - \delta k^2)\hat{w} = 0 \tag{2.6.7}$$

で表される微分方程式の解となる（式の導出は付録 2.6.A を参照）。ここで、l はブラント・バイサラ振動数 N を用いて $l^2 = N^2/u_0^2$ と表される。また、δ は 0 か 1 をとりうるパラメータであり、1 の場合は鉛直方向の運動方程式を解く非静力学方程式系を表し、0 の場合は静力学方程式系を表す。この式において、非静力学系と静力学系との違いは $l^2 - k^2$ と l^2 の違いであるから、水平波数 k の大きさが l と比べて無視できない波数に対しては両系の違いが大きくなる。

上に示した線形微分方程式はブシネスク系から導出しているため、鉛直方向の密度の変化は考慮していない。また、解析解の導出を行うためには境界条件を含める計算がもう少し必要となる。紙幅の関係もあり、郷田・栗原 (1991) を参考に、ここで扱う条件における解析解の結果のみを示す (郷田・栗原 (1991) における境界条件は本項でのテストの条件と同じ）。下部境界条件として高さ h、半値幅 a をパラメータとして $h(x) = h/(1+(x/a)^2)$ で表されるベル型の山を考える。また、上部境界条件として開放境界条件をとる。上記では水平波数 k を持つ波のみを考えたが、様々な波数を持つ波の重ねあわせとして考えると、解析解は次の式で表される。

$$w(x,z) = \left(\frac{\overline{\rho}(0)}{\overline{\rho}(z)}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{Re}\left\{iahu_0 \int_0^\infty e^{ika} e^{i(kx+\mu z)} dk\right\} \tag{2.6.8}$$

ここで、i は虚数単位であり、Re は実部を表す。また、$\overline{\rho}$ は基本場の密度（高度の関数）であり、$\mu = (l^2 - k^2)^{\frac{1}{2}}$ である。非静力学系と静力学系の違いについては前述の議論がそのまま成り立ち、k が l に比べて無視できない場合に違いが大きくなる。この解は様々な水平波数を持つ波の重ね合わせであるが、一番寄与が大きい最大振幅を持つ波数は $k = 1/a$ であるため、l と $1/a$ の比として $al = Na/u_0$ が非静力学効果を見積もるパラメータとなる。すなわち、この値が 1 より十分大きければ、非静力学効果は小さく (従って、静力学近似による違いは小さく)、1 に近ければ非静力学効果を無視できなくなる。

さて、ここでは、いくつかのモデルによる結果とも比較を行うために、“A Standard Test Set for Nonhydrostatic Dynamical Cores of NWP Models” [16] の設定を用いた実験結果を示す (以下ではこのウェブサイトを「非静力学コアの標準テストサイト」という)。このテストセットは、2003 年にドイツで開催された SRNWP ワークショップ [17] における、Bill Skamarock (米国大気研究センター)、Jim Doyle (米国海軍研究事務所) 、Peter Clark、Nigel Wood (英国気象局) の講演が基となっており、上記ウェブサイトに設定が記載されている。

この設定では山岳の高さが 1 m と低いことが一つの特徴である。解析解を見れば分かる通り、山岳の高さは鉛直風の振幅の形状には影響を与えず、単純に振幅は山岳の高さに比例するのみである。線形化することにより解析解と比較する際に、一様な水平風及び鉛直風がゼロの状態を基本場として、そこからの摂動が極めて小さいとして解析解を導いている。そこで、解析解と比較するために水平風の基本場からのずれや鉛直風そのものの大きさがなるべく小さくなるような実験設定が好ましい。しかし、基本場からのずれが小さくなると計算誤差が大きくなりやすくなる。例えば、u の微分項は線形化した方程式系においては u の摂動の微分であるが、asuca においてはそのまま u の微分として扱っている。そのため、微分を差分で近似した場合に、桁落ちが発生しやすくなり、計算結果に誤差の影響が現れやすくなることが考えられる。山岳の高さを低くしてもノイズが少なく解析解を再現できるかどうかの評価は数値予報モデルの計算誤差の評価ともなるであろう。

JMA-NHM の力学過程に関するパラメータは LFM で用いている設定と同じである。なお、既存の論文・報告等で示されている実験結果と今回の結果が異なる場合があることに注意が必要である。

ここでは、「非静力学コアの標準テストサイト」の設定に従い、非静力学効果が小さいケースと、非静力学効果が無視できないケースの 2 例について比較を行う。

この実験においては上部境界条件が解析解を導出する際に用いた条件と異なる（解析解を導出する際には開放境界条件とし、asuca 及び JMA-NHM はスポンジ層を適用して鉛直風をゼロに近づける）ことに注意が必要である。境界条件の違いにより上層では結果の違いが大きくなることが考えられることから、スポンジ層の適用高度より下層について比較を行っている（以下に示す図はスポンジ層より下層のみをプロットしている）。

(1) 非静力学効果が小さいケース

設定として以下を用いる。

- 格子間隔：水平 2 km、鉛直 250 m
- 予報領域：水平 80 km、鉛直 30 km [18]
- 山の半値幅 $a = 10$ km

[16] `http://www.mmm.ucar.edu/projects/srnwp_tests` に設定や結果が掲載されている。

[17] プログラムは `http://srnwp.met.hu/workshops/BadOrb_2003/srnwp2003_program.pdf` を参照のこと。

[18] ウェブサイトには “41 × 121points” と書かれているが、実験においては 40 × 120 格子として、予報領域が一致するようにしている。

- 山の高さ $h = 1$ m
- 水平風速 $u_0 = 20$ m s^{-1}
- ブラント・バイサラ振動数 $N = 0.02$ s^{-1}
- 予報時間：250 分
- 積分時間間隔：asuca は 15 秒、JMA-NHM は 5 秒
- 下部境界条件：摩擦無し
- 上部境界条件：固定条件。ただし、スポンジ層を用いる。
- 側面境界条件：周期境界条件

この設定では $Na/u_0 = 10$ であり、非静力学効果は小さいと見做せる。

図 2.6.15 に解析解、asuca 及び JMA-NHM の結果を示す。JMA-NHM の方が全体的にやや歪んだ形をしている一方で、asuca の方がなめらかな結果が得られている。なお、JMA-NHM の場合は周期境界条件の扱いに問題がある可能性があり、このテストにおいては、水平方向の予報領域が狭いことが悪影響を与えていると考えている。また、鉛直風の強さを比較すると、JMA-NHM ではかなり弱い鉛直風しか計算していないのに対して、asuca の場合はほぼ解析解に近い結果を与えている。

(2) 非静力学効果が無視できないケース

設定として以下を用いる。

- 格子間隔：水平 400 m、鉛直 250 m
- 予報領域：水平 144 km、鉛直 30 km
- 山の半値幅 $a = 2$ km
- 山の高さ $h = 1$ m
- 水平風速 $u_0 = 10$ m s^{-1}
- ブラント・バイサラ振動数 $N = 0.01$ s^{-1}
- 予報時間：150 分
- 積分時間間隔：asuca は 3 秒、JMA-NHM は 1 秒
- 下部境界条件：摩擦無し
- 上部境界条件：固定条件。ただし、スポンジ層を用いる。
- 側面境界条件：周期境界条件

この設定では $Na/u_0 = 2$ であり、非静力学効果は無視できなくなる。

この場合の結果を同様に図 2.6.15 に示す。非静力学効果が無視できる場合は、山岳波は山岳の上方に伝播していくが、非静力学効果が無視できない場合には山岳風下側に広がっていく結果となる。asuca, JMA-NHM ともに、解析解と比較して風下側への広がり具合は同程度であるが、非静力学効果が小さい実験と同様、JMA-NHM では解析解と比較して鉛直風が弱い。一方、asuca の場合は非静力学効果が小さい実験と同様にほぼ解析解と近い結果を与えている。

2.6.5 周期境界条件における重力波

これは Skamarock and Klemp (1994) で示されている実験であり、非静力学ケースと静力学ケースの 2 例がある。前項と同様に、線形化することにより解析解を導いている。asuca のように重力波をインプリシットに扱う非静力学モデルにおいては重力波に対する安定性や予測精度を確認することができる。非静力学ケースにおいては積分時間間隔を短く取り、精度良く重力波を表現できるかどうかを確認する。一方、静力学ケースにおいては、積分時間間隔を長くした場合に、想定通り重力波を安定化できているかを確認する。また、移動する系を与えた場合は、水平方向の対称性を確認することが重要である。

この実験の条件として、水平 1 次元（以下、東西とする）と鉛直 1 次元の 2 次元とする。山岳等の地形は存在せず、地表面 ($z = 0$ m) において、温位 $\theta = 300$ K、気圧 $p = 1000$ hPa とし、ブラント・バイサラ振動数 $N = 0.01$ s^{-1} となるように温位が鉛直方向に変化する状況を考える。モデルトップの高度を H として、この中に (2.6.9) 式 で表される微小な温位偏差 ($\Delta\theta_0 = 0.01$ K) を与える。

$$\theta(x, z) = \Delta\theta_0 \frac{\sin(\pi z/H)}{1 + (x - x_c)^2/a^2} \tag{2.6.9}$$

ここで、x_c は微小な擾乱の中心であり、a は擾乱のサイズを表すパラメータである。また、東西方向には周期境界条件を考えるとともに、東西風は風速ゼロもしくは東向きに一様な風速 U を与える。この設定において、微小な温位偏差により重力波が生じ、東西方向に伝播しつつ、一様流があれば系全体が東へ動いていくこととなる。

この場合の温位の解析解は Skamarock and Klemp (1994) によると次式で表される。

$$\begin{aligned}\theta(\tilde{x}, z, t) &= \theta(\tilde{x}, z, 0) + \Delta\theta_0 a \sin(lz) \\ &\times \int_0^\infty \frac{k^2N^2}{k^2N^2 + l^2f^2} e^{-ak} \left(\cos\lambda t - 1\right) \cos k\tilde{x}\ dk\end{aligned} \tag{2.6.10}$$

ここで、$\tilde{x} = x - Ut$、$l = \pi/H$、f はコリオリパラメータである。また、

$$\lambda^2 = \frac{k^2N^2 + l^2f^2}{k^2 + l^2} \tag{2.6.11}$$

である。

テストは非静力学ケースと静力学ケースの 2 例を行った。以下に、それぞれの設定を示す [19]。

[19] Skamarock and Klemp (1994) は、系全体が動く速度として $U = 20$ m s^{-1} を与えているが、asuca では系全体が動く速度を与えるオプションを持たない。非静力学ケースではコリオリ力がない設定のため、初期値として $u = 20$ m s^{-1} を与えることで代用した。静力学ケースではコリオリ力により東西風 u が変わるために、同様の手段が取れない。そこで初期値として $u = 0$ m s^{-1} とした。

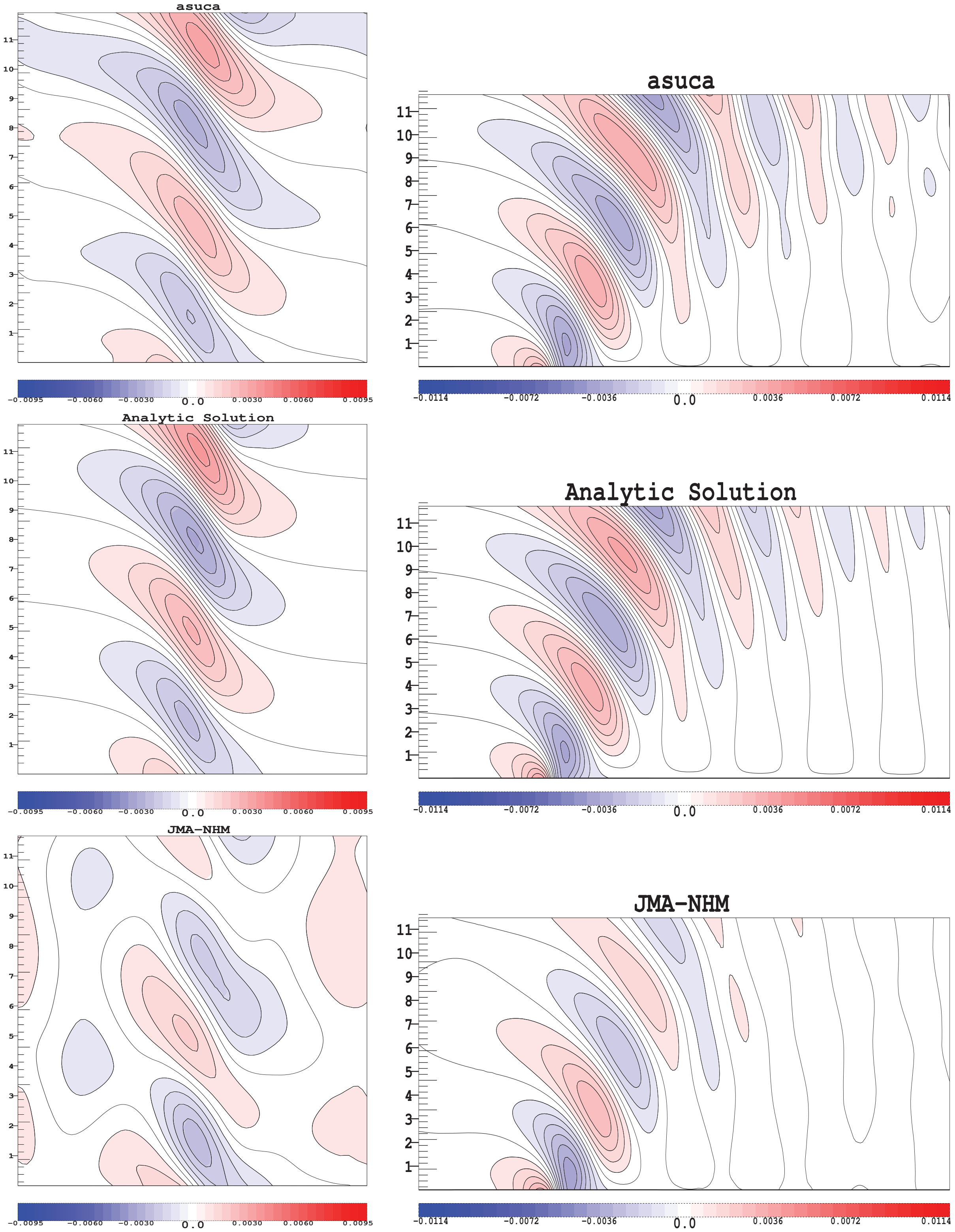

図 2.6.15　2 次元定常山岳波の実験結果。鉛直風の水平・鉛直断面図。左列が非静力学効果が小さいケースによる結果で右列が非静力学効果が無視できないケースによる結果。上段が asuca による結果、中段が解析解、下段が JMA-NHM による結果。等値線間隔は左列は 5.0×10^{-4} m s^{-1}、右列は 6.0×10^{-4} m s^{-1}。

非静力学ケース

- 格子間隔：水平 1000 m、鉛直 1000 m
- 予報領域：水平 300 km、鉛直 10 km
- 積分時間間隔：12 秒
- コリオリパラメータ：$f = 0\ \mathrm{s}^{-1}$
- 東西方向の風速 u の初期値：20 m s^{-1}
- 予報時間：3000 秒
- 初期擾乱の位置：領域中心より 50 km 西側。
- 下部境界条件：摩擦無し
- 上部境界条件：固定条件。スポンジ層は無し。
- 側面境界条件：周期境界条件

静力学ケース

- 格子間隔：水平 20000 m、鉛直 1000 m
- 予報領域：水平 6000 km、鉛直 10 km
- 積分時間間隔：200 秒
- コリオリパラメータ：$f = 10^{-4}\ \mathrm{s}^{-1}$
- 東西方向の風速 u の初期値：0 m s^{-1}
- 予報時間：60000 秒
- 初期擾乱の位置：領域中心。
- 下部境界条件：摩擦無し
- 上部境界条件：固定条件。スポンジ層は無し。
- 側面境界条件：周期境界条件

非静力学ケースでは、重力波が鉛直方向に対称な構造を保ちながら伝播していくことや、東西流があるために移動する系で見れば東西対称になるといった対称性がどの程度保てるか確認することが必要となる。一方、静力学ケースにおいては積分時間間隔が 200 秒と、重力波により制限される積分時間間隔 ($1/N = 100$ 秒) と比べて長いことが問題となる。スプリットして扱う場合とインプリシットに扱う場合は、積分時間間隔を長く取れることの確認と、重力波の予測精度が悪くならないことの確認が必要となる [20] 。

この実験結果を図 2.6.16 に示す。非静力学ケースでは、予報時間 3000 秒時点の結果を示している。結果を解析解と比較すると、東西方向の位相は概ね一致しているものの、東西方向の対称性はわずかに崩れており、東側の温位の振幅の方が西側のそれより小さい。これは、asuca の移流計算において、東側の温位に対しては系の動く速度と自らが伝播する速度の和が用いられるのに対し、西側の温位に対しては両速度の差が用いられるため、移流スキームが内包する拡散させる性質の現れ方が異なったためと考えられる。また、解析解は鉛直方向に対称であるのに対して、asuca による結果は若干非対称となっているが、これは鉛直分解能が粗いためと考えている。この実験の WRF-ARW（ARW は Advanced Research WRF の略）による結果が前述の「非静力学コアの標準テストサイト」に示されており [21] 、鉛直方向の非対称性については同程度の結果となっている。

静力学ケースの結果は、一様流をゼロとしていることもあり、水平方向の対称性は良好である。非静力学ケースと同様に鉛直方向にやや非対称であるものの、概ね解析解に近い結果を与えていると言えるだろう。WRF-ARW の結果と比較しても概ね同等である。静力学ケースの設定は前述の通り、重力波が計算安定条件に関わってくる。asuca においては重力波を split-explicit 法で扱っていることから、積分時間間隔を長くしても安定に計算できることと、重力波の表現について確認が必要である。このテストにおいて、重力波による制限よりも長い積分時間間隔をとっても実際に安定に計算できること (他モデルとの比較のため、本報告では積分時間間隔が 200 秒の結果を示すが、1200 秒でも安定に計算できたことを確認している。) 、また、asuca の split-explicit 法による重力波の扱いには実装を含めて特に大きな問題はないことが確認できたと考えている。

2.6.6 暖気塊のテスト

本項で述べる暖気塊 (warm bubble) のテストは、計算領域内に相対的に高温位の気塊を置いて浮力を強制的に与え、その気塊の上昇が正しく表現できるかを確認するものである。この設定は、現実の対流現象を単純化したものであり、このテストを通じて対流現象の表現に重要な役割を果たす鉛直方向の運動方程式の気圧傾度力と浮力項、移流項に関する定式化・離散化の妥当性を検証することができる。また、一様な水平風速を与えることで、第 2.6.2 項の一様流の 1 次元移流のテストに鉛直方向の運動を加えて拡張したテストと位置づけることもでき、その場合は対流現象と背景場としての水平移流をあわせた、より総合的な力学のテストになる。暖気塊のテストには様々な設定が存在するが、ここでは Wicker and Skamarock (1998) の設定を元に asuca の暖気塊のテストを行う。比較のために JMA-NHM についても同じ実験を行う。

また、積分時間間隔・格子間隔を変更した場合の実験結果の確認も行う。数値計算の誤差は時間・空間の離散化の間隔に依存するため、積分時間間隔・格子間隔を粗くした場合に計算結果が変わらなければ、それは時空間の刻みに依存しない解であり結果の妥当性が高いと考えられる。このテストでは、格子間隔に対してどの程度のスケールまで精度よく気塊の上昇を表現できるかということを確認できる。また、計算結果が変わる場合には、どのように変わるかが重要であり、計算安定性の観点から誤差が成長することは望ましくない。

(1) 実験設定

本実験の計算は $x-z$ の 2 次元で行い、水平 20 km、鉛直 10 km を計算領域とする。初期設定として周囲の

[20] 重力波をイクスプリシットに扱うモデルでは、積分時間間隔を短くすることによる計算時間の増加を評価する。

[21] http://www.mmm.ucar.edu/projects/srnwp_tests/IG_waves/ig_wave.html

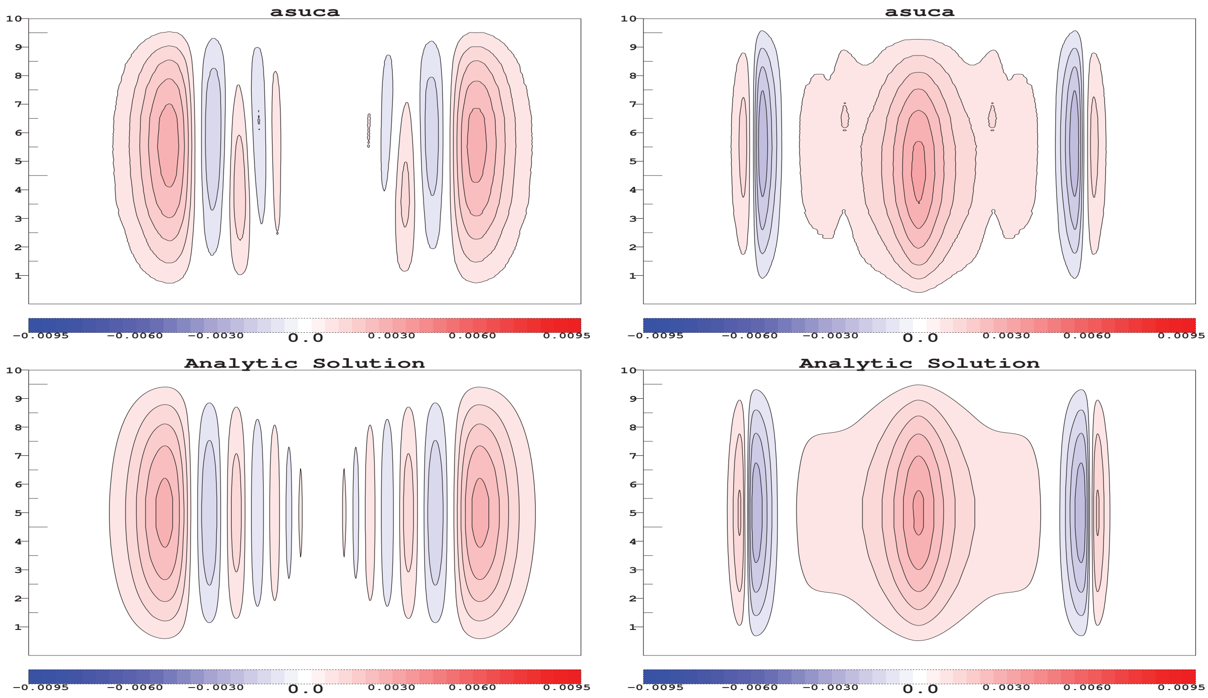

図 2.6.16　asuca による重力波の実験結果。温位の偏差を東西・鉛直断面図。上段は asuca による結果。下段は解析解。左図が非静力学のテストケース、右図が静力学のテストケースの結果。等値線間隔は 5×10^{-4} K である。

中立大気よりも高温位 (+2 K) の直径 4 km の暖気塊を領域中央の高さ 2 km に置く。積分時間は 1020 秒とし、積分時間間隔は $\Delta t = 2$ 秒とする。水平方向には周期境界条件を適用する [22]。

高解像度実験

ここでは、水平格子間隔 $\Delta x = 125$m、鉛直層間隔 $\Delta z = 125$ m の実験を高解像度実験と位置づけて、

- 水平風速をなし (0 m/s) とする実験、
- 一様な水平風速 20 m/s を与える実験、

を行う。

積分時間間隔を変えるテスト

水平風速 20 m/s を与える実験について、積分時間間隔を変更したテストを行う。積分時間間隔を $\Delta t = 1$ 秒から $\Delta t = 5$ 秒まで 1 秒刻みに変更する。

水平格子間隔を変えるテスト

水平格子間隔を変えるテストでは、$\Delta x = 500$ m および $\Delta x = 1000$ m と水平格子間隔を粗くした低解像度実験として、

- 水平風速をなし (0 m/s) とする実験、
- 一様な水平風速 20 m/s を与える実験、

を行う。

一様な水平風速 20 m/s を与える実験では、風速 0 m/s の場合と同じ構造を保ちつつ水平に移流することが期待されるため、水平風速をなし (0 m/s) とする実験結果をリファレンスとすることができる。また、高解像度実験の結果は、低解像度実験のリファレンスとすることができる。高解像度実験の一様な水平風速 20 m/s を与える実験が、Wicker and Skamarock (1998) の設定に一致する。

(2)　高解像度実験

水平風なしの実験

図 2.6.17 に水平風がない場合の asuca の計算結果を示す。また、比較のため図 2.6.18 に JMA-NHM の計算結果を示す。asuca, JMA-NHM の結果から、暖気塊が水平方向に広がりながら周囲の大気を巻き込むようにして真上に上がっていく様子が分かり、気塊の上昇高度も概ね両モデルで一致している。上昇流に二つの極大がある構造も asuca, JMA-NHM ともに概ね同じように表現している。なお、JMA-NHM の力学過程に関する設定は LFM と同じとしているが、数値拡散をかけていない点は LFM と異なる。数値拡散を用いなかった理由は、この実験において数値拡散をかけると、図 2.6.18 に見られる細かなノイズは除去できるものの、上昇流の二つの極大などの細かな構造も失われるためである。

水平風速 20 m/s を与える実験

この実験では Wicker and Skamarock (1998) と同様に、水平一様風速 20 m/s を初期値として与える。asuca, JMA-NHM の結果をそれぞれ図 2.6.19、図 2.6.20 に示す。

[22] 鉛直方向には、上部境界で $w = 0$ m/s の条件となるが、上端の影響を受けないとみなせる範囲で実験を行う。気塊の上昇が早すぎて上端の影響が見られる場合は、鉛直層数を増やして計算領域の上端高度を上げる。

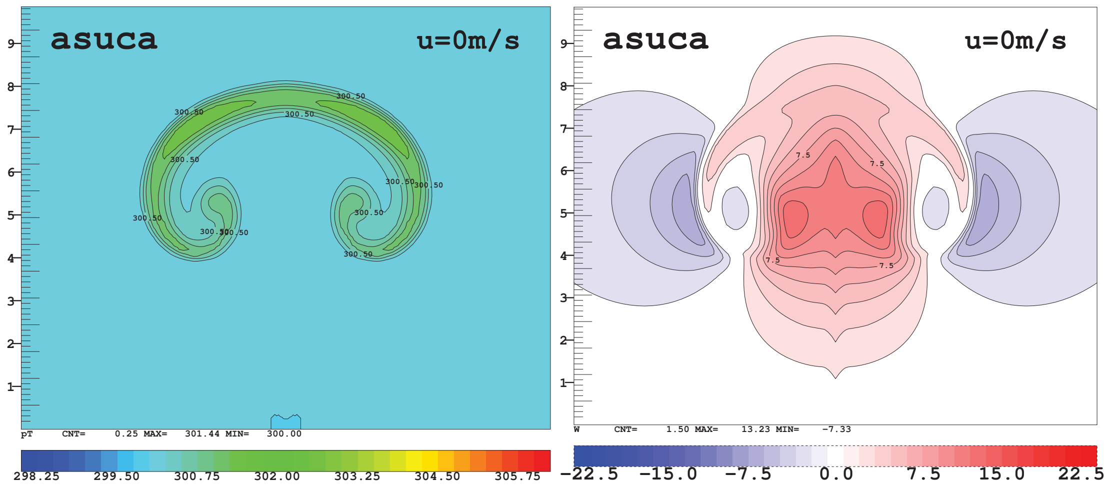

図 2.6.17 asuca の実験結果 (水平風速 0 m/s)。横軸 (x)：4-16 km（計算領域 20 km のうち)、縦軸 (z):0-10 km。（左）温位 (K)、(右) 鉛直速度 (m/s)

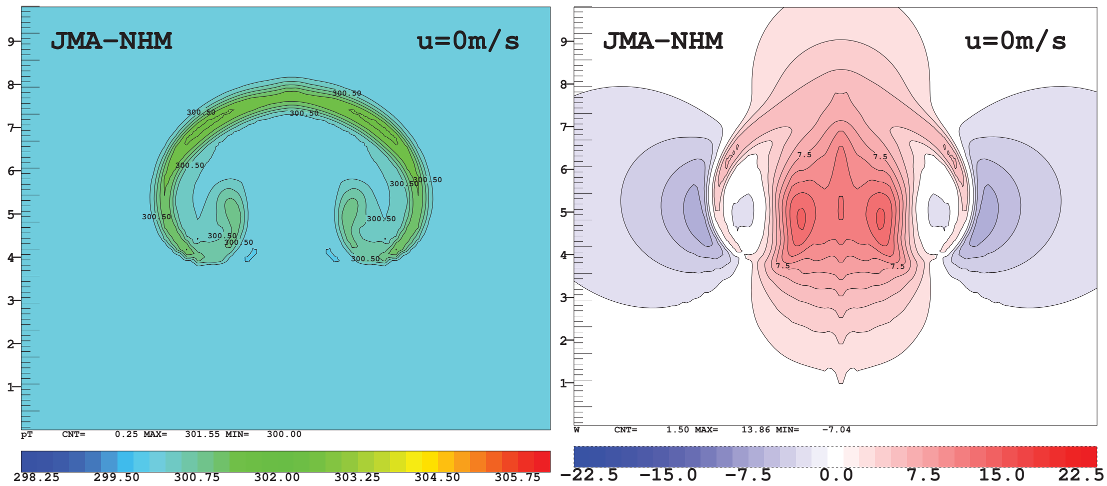

図 2.6.18 JMA-NHM の実験結果 (水平風速 0 m/s)。横軸 (x)：4 km-16 km（計算領域 20 km のうち)、縦軸 (z):0-10 km。（左）温位 (K)、(右) 鉛直速度 (m/s)

図 2.6.19 の asuca の計算結果は、水平風速 0 m/s の場合の図 2.6.17 と同様に気塊の対称性が保たれ、周囲の大気を巻き込む形状も崩れておらず、全体的に良好な結果である。細かく見ると、風速 0 m/s の結果と比べて、やや上部が平たくなって全体に平滑化された構造になっているが、asuca の移流スキームは拡散の性質を持っているため、数格子スケールの分布を減衰させる性質があり、このような結果になっていると考えられる。この結果は、Wicker and Skamarock (1998) の結果と比べても概ね同等の結果である。

一方、図 2.6.20 の JMA-NHM の計算結果を水平風速 0 m/s の場合の図 2.6.18 と比較して見ると、気塊の対称性が崩れ、上昇流に二つの極大がある構造も失われていることが分かる。藤田 (2003) は、移流補正によって波形の歪みが生じることを指摘している。なお、この実験では、JMA-NHM の積分時間間隔を短くして $\Delta t = 1$ 秒とした。このことについては次の (3) で述べる。

(3) 積分時間間隔を変えるテスト

図 2.6.20 に示した水平風速 20 m/s を与える実験において、JMA-NHM の積分時間間隔を短くして $\Delta t = 1$ 秒とした理由は、$\Delta t = 2$ 秒による計算では、図 2.6.20 よりも、さらに対称性が崩れ、気塊の上昇位置も著しく低くなってしまったためである（図 2.6.21)。このことから、JMA-NHM の計算結果は、積分時間間隔への依存性が大きいと言える。また、1 秒刻みに Δt を大きくしていくと $\Delta t = 4$ 秒で計算が計算不安定となった。一方、asuca は $\Delta t = 5$ 秒まで安定に計算することができ [23]、Δt を変更した場合でも $\Delta t = 2$ 秒の場合とほぼ同じ計算結果が得られ、積分時間間隔に依存しないことを示す良好なテスト結果となっている。

[23] 一様水平風速 20 m/s に対流運動に伴う水平風が加わるため、$\Delta t = 6$ 秒では水平のクーラン数が 1 を超える。

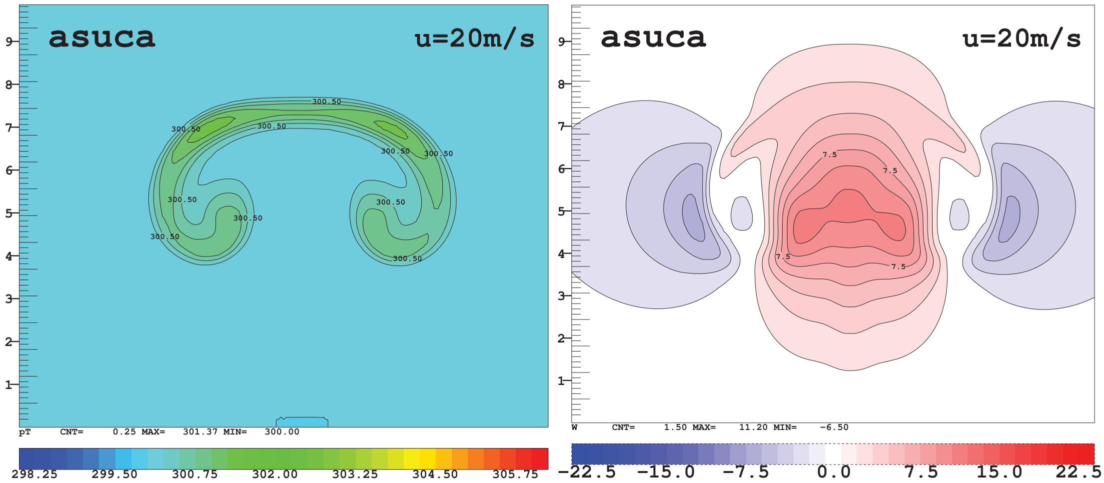

図 2.6.19 asuca の実験結果 (水平風速 20 m/s)。横軸 (x)：4-16 km（計算領域 20 km のうち)、縦軸 (z):0-10 km。(左）温位 (K)、(右) 鉛直速度 (m/s)

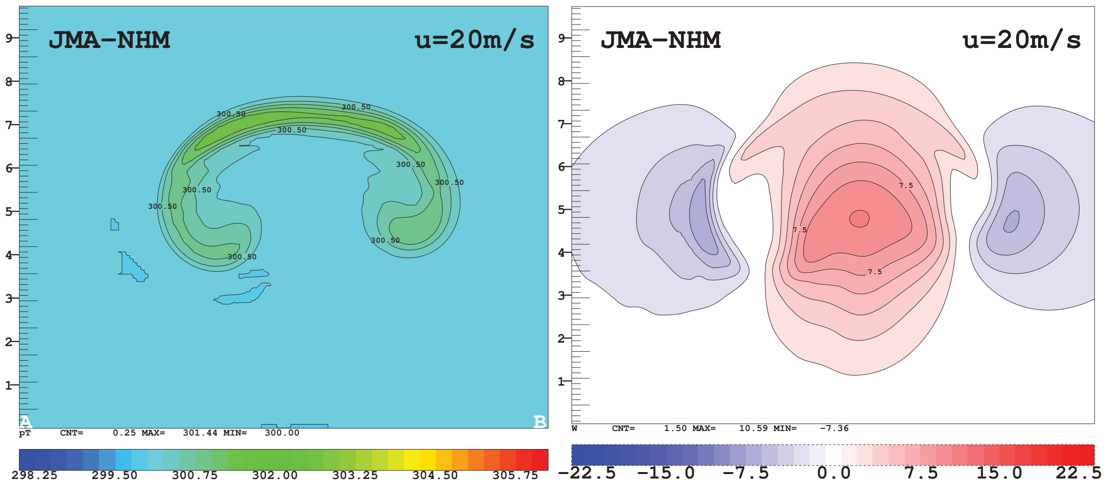

図 2.6.20 JMA-NHM の実験結果 (水平風速 20 m/s)。横軸 (x)：4-16km（計算領域 20km のうち)、縦軸 (z):0-10 km。(左）温位 (K),（右）鉛直速度 (m/s)。積分時間間隔 $\Delta t = 1$ 秒。

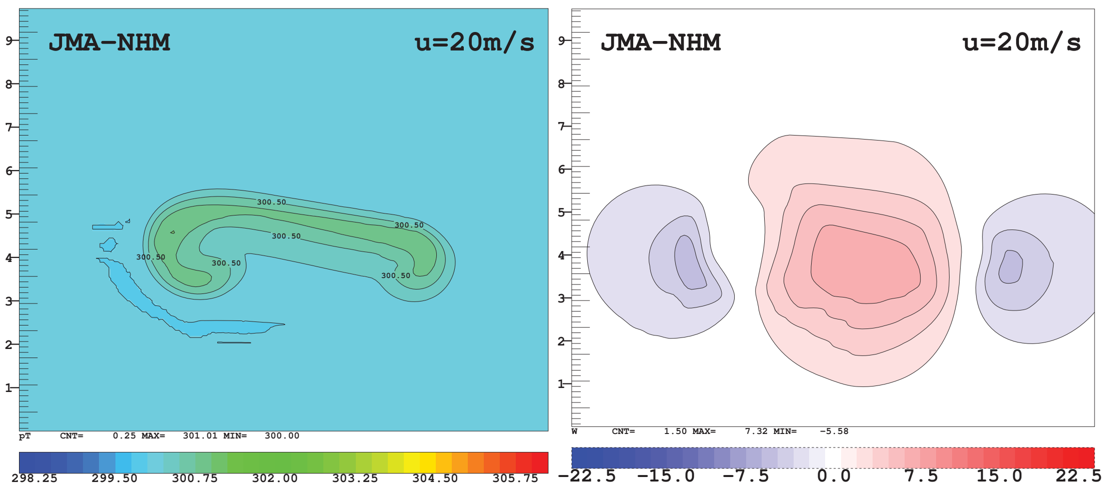

図 2.6.21 JMA-NHM の実験結果 (水平風速 20 m/s)。横軸 (x)：4-16 km（計算領域 20 km のうち)、縦軸 (z):0-10 km。(左）温位 (K)、(右）鉛直速度 (m/s)。積分時間間隔 $\Delta t = 2$ 秒とした場合。

(4) 水平格子間隔を変えるテスト

次に水平格子間隔を変えたときの振る舞いを確認するため、水平格子間隔を粗くしたテストを行う。これまでの $\Delta x = 125$ m の設定では、初期値の暖気塊の直径が 32 格子に相当していたが、ここでは $\Delta x = 500$ m、$\Delta x = 1000$ m と 2 種類の設定で実験する。これらの実験ではそれぞれ、初期値の暖気塊の直径が 8 格子、4 格子に相当する。低解像度実験における理想的な振る舞いとして、高解像度の実験結果を粗視化した結果が得られることが望まれる。

水平風なしの実験

まず、水平風速 0 m/s の場合について確認する。図 2.6.22 を見ると、asuca は解像度を落としていっても気塊の上昇位置が変わらず、高解像度実験と同じ現象を粗視化した表現になっていることが分かる。一方、図 2.6.23 から、JMA-NHM は $\Delta x = 1000$ m まで解像度を落とすと気塊の上昇が速くなってしまう[24] ことが分かる。この計算結果は、高解像度実験を粗視化した表現となっておらず、さらに、このような発達する方向の誤差は計算安定性の観点から望ましくない。この JMA-NHM の低解像度実験に対して数値拡散をかけると、気塊の上昇を抑えることができる（図略）。数格子程度のスケールの現象を扱う場合に、JMA-NHM では人為的な数値拡散が必要があることが、このことからも示唆される。

水平風速 20 m/s を与える実験

次に、水平風速 20 m/s を与えた場合について確認する。asuca の計算結果を図 2.6.24 に示す。asuca では、移流スキームに内包される拡散性によって温位のピークが減衰し、したがって気塊の上昇位置は高解像度の場合に比較して低くなる。この結果は、第 2.6.2 項の図 2.6.5 で見た一様流における 1 次元移流テストにおいて、矩形波のスケールが小さい場合に、波の振幅が減衰した結果からも理解できる。JMA-NHM の場合も asuca と同様に、気塊の上昇位置は高解像度の場合に比較して低くなる。しかし、低解像度の水平風速 0 m/s の実験で見られた気塊上昇が速くなる傾向により、asuca より上昇位置が高い結果が得られている（図略）。

(5) まとめ

ここまで、暖気塊の実験により、asuca の力学による対流表現についての基礎的な特性を確認した。

水平風がない場合の高解像度の実験では、気塊が水平方向に広がりながら周囲の大気を巻き込むようにして真上に上がっていく様子が再現された。水平風速を与えて気塊を水平移流させた場合にも、水平風がない場合とほぼ同じ構造を保って暖気塊が上昇し、全体的に良好な結果であった。細かい構造はやや失われたが、拡散性を内包する移流スキームの性質から理解できる結果であった。

また、JMA-NHM では CFL 条件を満たしている場合でも、積分時間間隔を変更してクーラン数が大きくなると結果が大きく変わってしまう性質があるが、asuca ではこの点が改善されていることを確認できた。

解像度を粗くした実験では、水平風がない場合は、高解像度実験の結果を粗視化した結果が得られた。ただし、水平風を与えて移流スキームの寄与が大きくなる実験では、高解像度実験に比べて気塊の上昇位置が低くなって計算精度を保てなかった。この特徴は、解像できないスケールの波は減衰させるという第 2.6.2 項で確認した移流スキームの性質から理解できるものである。解像できないスケールに対するこの性質は、数値計算の誤差が成長する方向にはないことを示しており、計算安定性の観点では望ましい結果である。

[24] そのため、鉛直層数を増やして計算領域の上端高度を上げている。

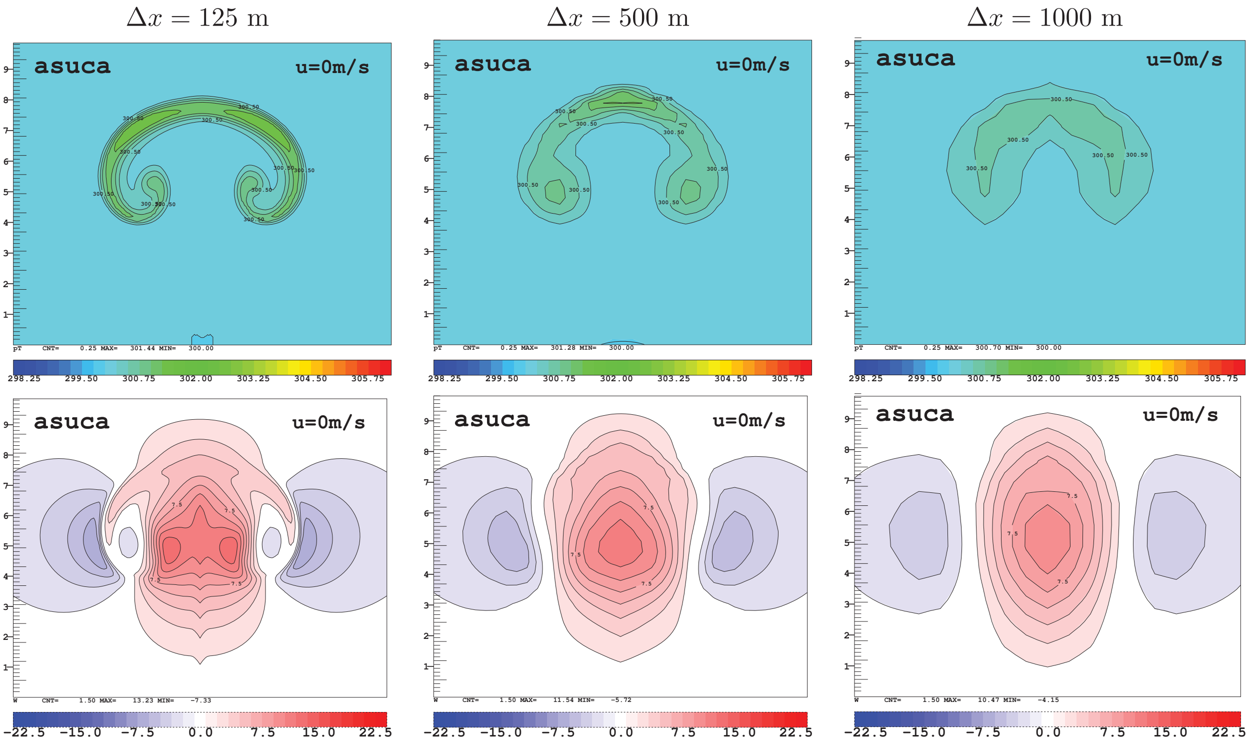

図 2.6.22　asuca の実験結果（水平風速 0 m/s）の解像度依存性。横軸 (x)：4-16 km（計算領域 20 km のうち）、縦軸 (z):0-10 km。（左）$\Delta x = 125$ m,（中）$\Delta x = 500$ m,（右）$\Delta x = 1000$ m。（上段）温位 (K),（下段）鉛直速度 (m/s)。

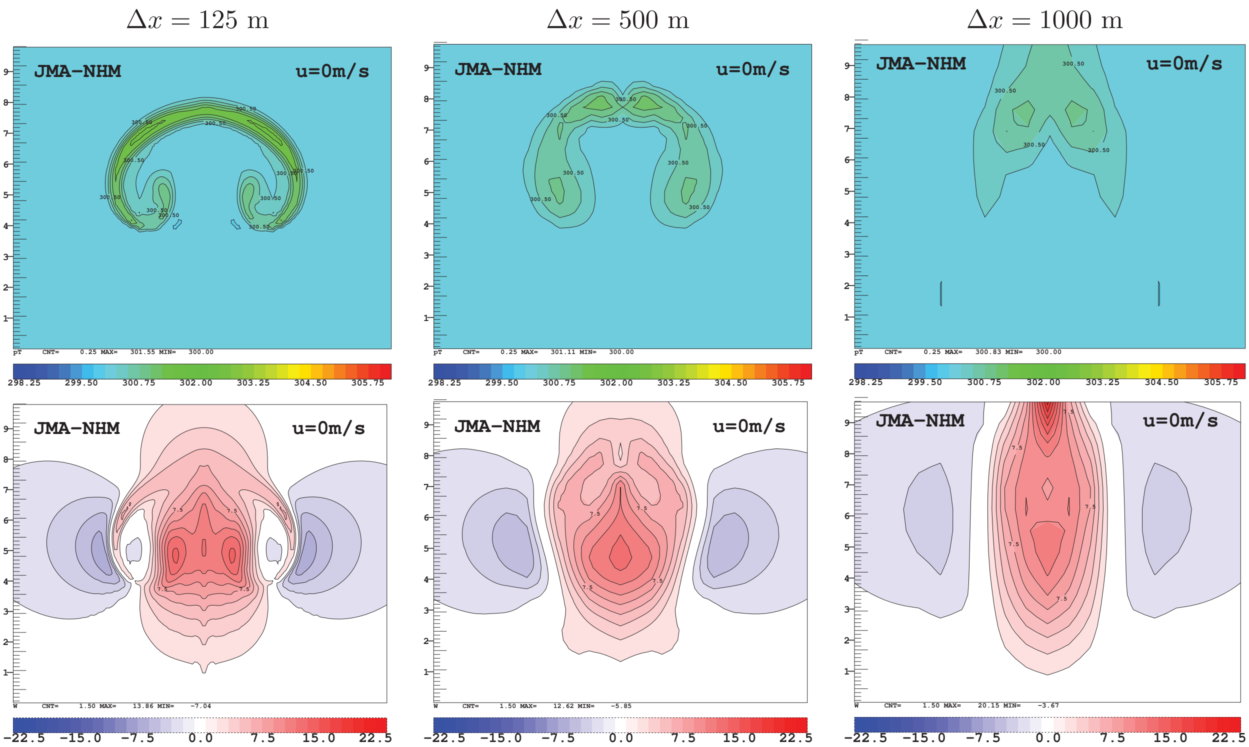

図 2.6.23　JMA-NHM の実験結果（水平風速 0 m/s）の解像度依存性。（左）$\Delta x = 125$ m,（中）$\Delta x = 500$ m,（右）$\Delta x = 1000$ m。（上段）温位 (K),（下段）鉛直速度 (m/s)。

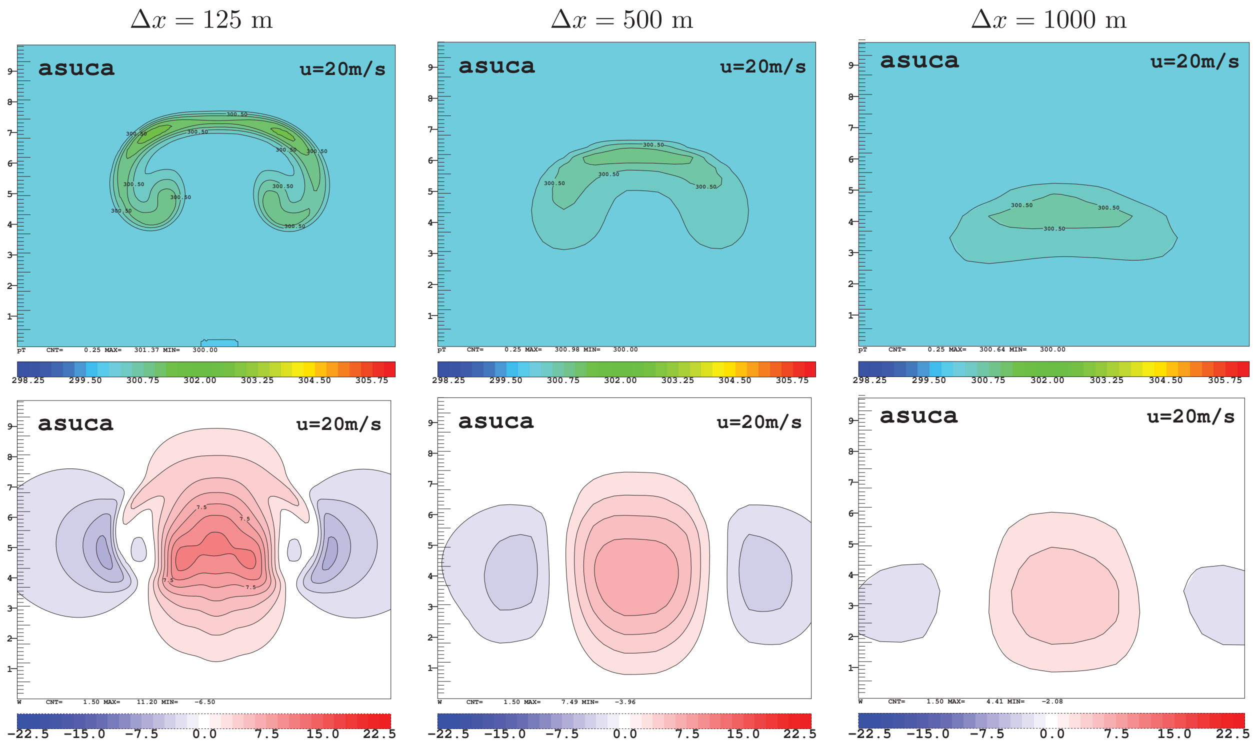

図 2.6.24　asuca の実験結果（水平風速 20 m/s）の解像度依存性。横軸 (x)：4-16 km（計算領域 20 km のうち）、縦軸 (z):0-10 km。（左）$\Delta x = 125$ m,（中）$\Delta x = 500$ m,（右）$\Delta x = 1000$ m。（上段）温位 (K),（下段）鉛直速度 (m/s)。

2.6.7　重力流

この項で説明する実験は、Straka et al. (1993) で示されたものである。計算領域に相対的に低温位の気塊をおいて、その振る舞いを見る。この冷気塊は、予報開始とともに落下し、地表面に達した後に、左右（東西）対称に広がっていく。この実験では大きい温位偏差を持つ冷気塊を置くことにより、強い下降流を生じさせ、素早く東西に広がるような急変する現象に対して、安定かつ精度よく時間積分が可能であるかを確認するものである。第 2.6.4 項、第 2.6.5 項 で示した実験は定常状態から微小な偏差を与えることにより、線形化した方程式の解析解と比較したものであるが、この実験では低温位の気塊の偏差が小さいと見做すことはできず、従って、線形化することによって得られる解析解と比較することができない。このため、リファレンスとして Straka et al. (1993) の結果及び asuca の格子間隔を小さくした結果を用いて比較する。

この実験は水平 1 次元と鉛直 1 次元の 2 次元であり、予報領域は 51.2 km ×6.4 km とする。これにあわせて、例えば格子間隔が 50 m のときは格子数を 1024 × 128 と、格子間隔が 400 m のときは格子数を 128 × 16 と設定する。地形は存在しない。実験では温位 $\theta = 300$ K の一定値とした上で、予報領域の中心に、以下の式で表される温位偏差を与える。

$$\Delta\theta = \begin{cases} 0 & \text{if } L > 1.0 \\ -15.0\left\{\cos(\pi L) + 1.0\right\}/2 & \text{if } L \le 1.0 \end{cases} \tag{2.6.12}$$

ただし、

$$L = \left\{ \left(\frac{x - x_c}{x_r}\right)^2 + \left(\frac{z - z_c}{z_r}\right)^2 \right\}^{0.5} \tag{2.6.13}$$

である。ここで、$x_c = 25.6$ km, $x_r = 4.0$ km, $z_c = 3.0$ km, $z_r = 2.0$ km である。すなわち、領域中心の高度 2 km に最大 −15 K の偏差を持つ冷気塊をおく。また、初期状態における水平風･鉛直風はともにゼロとし、数値粘性として $\nu = 75$ m^2 s^{-1} を与える。

この実験は東西に対称な設定のため全領域の図を示す必要はなく、片側半分だけに着目すれば良い（ほぼ対称であることを確認している）。asuca による実験結果を示したものが図 2.6.25 である。Straka et al. (1993) の Figure 3 にリファレンスとして、格子間隔 25 m の結果が示されており、asuca による格子間隔 50 m 及び 100 m の実験はこれとほぼ同等の結果となっている。また、Straka et al. (1993) では格子間隔が 200 m を超えると計算誤差により後方で冷気塊がちぎれていくよ

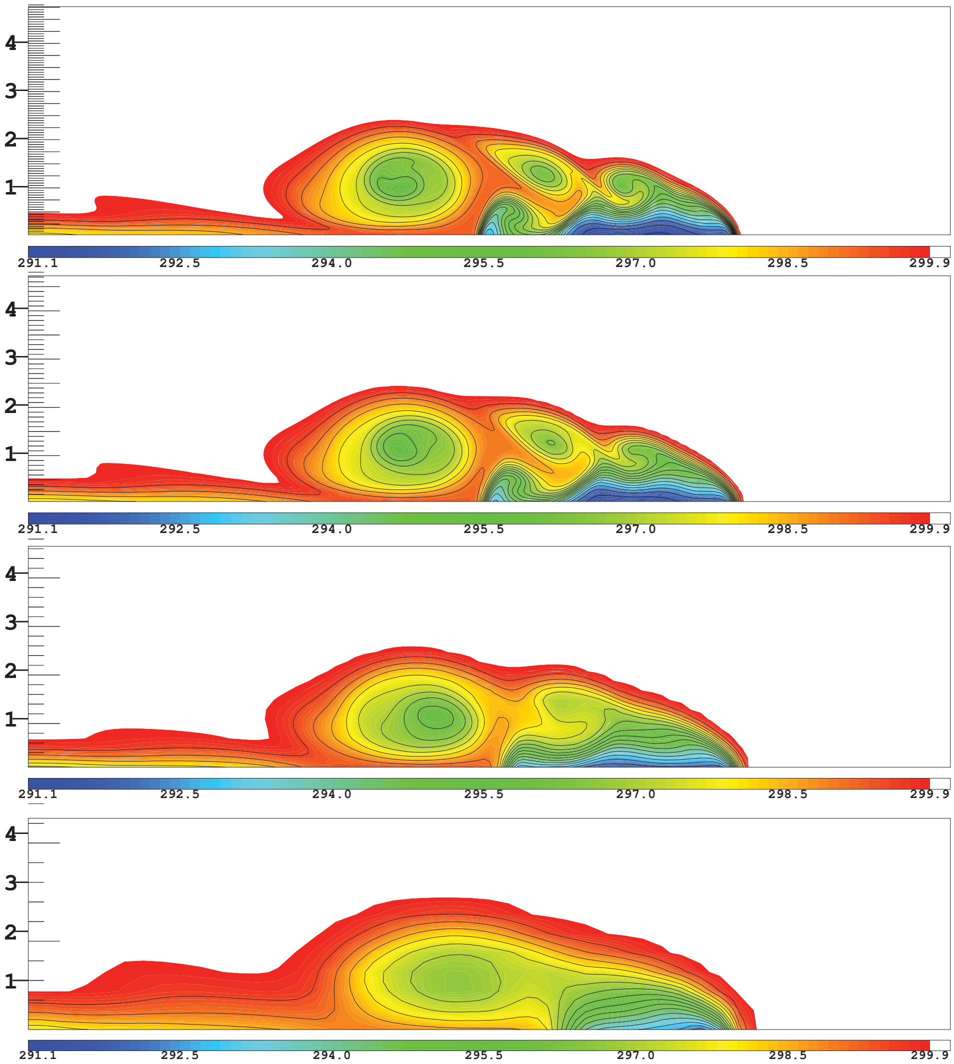

図 2.6.25 asuca による重力流の実験結果。温位の東西・鉛直断面図 (等値線間隔は 0.5 K)。それぞれの予報時間は 15 分。上からそれぞれ格子間隔 50 m, 100 m, 200 m, 400 m の結果。

うな結果となっているが、asuca の場合は格子間隔が 400 m でもそのような状況は見られない。「非静力学コアの標準テストサイト」には移流スキームとして 5 次風上差分及び 2 次中央差分を用いた WRF の結果が掲載されている [25]。それと比較すると、asuca は Koren (1993) による流束制限関数を用いているために、なめらかな場において風上 3 次差分、急変する場では風上 1 次差分の精度しかないものの、WRF の風上 5 次差分による結果と同様になっている。風上 5 次差分スキームと比較した場合、流束制限関数は打ち切り誤差が大きいものの、単調性を保てること、水平方向に参照する格子数が少なくて済むため並列計算効率が高くなることなどの長所がある。この実験において、asuca の移流スキームは精度と計算効率のバランスをうまく保っていることが確認できたと考えている。

また、予報時間が 15 分経過した後の温位の最大値と最小値を表 2.6.3 に示す。問題設定の状況から明らかに温位の最大値は 300 K を超えないはずである。また、温位の最小値については数値粘性の効果もあり、評価は難しいが少なくとも 285 K 以下にはならないはずである。asuca による実験ではこの通りの結果となっており、Koren (1993) による移流スキームが有効に働いていると言えるだろう。

表 2.6.3 重力流実験における、予報時間が 15 分のときの温位の最大値と最小値。

	最大値	最小値
格子間隔 50m	300.00K	294.39K
格子間隔 100m	300.00K	294.74K
格子間隔 200m	300.00K	295.38K
格子間隔 400m	300.00K	295.68K

[25] http://www.mmm.ucar.edu/projects/srnwp_tests/density/density.html

2.6.8 St-MIP

St-MIP とは Steep Mountain Model Intercomparison Project の略であり、急峻な地形を扱う実験であり、Satomura et al. (2003) により提唱されたものである。2 次元定常山岳波の実験である点は第 2.6.4 項と同じであるが、急峻な地形を扱う点が異なる。このため、基本場からの偏差は小さいとはみなせなくなり、線形化した方程式系から得られた解析解との比較は難しくなる。この実験では、急峻な地形がある場合に asuca でも採用しているような座標変換前の z 軸と座標変換後の ζ 軸が平行である座標、すなわち、水平面が鉛直軸と直交しない座標においては、地形の急峻さに応じた誤差が生じて計算不安定につながる可能性がある。そのため、この実験には急峻な地形における計算安定性を確認する目的がある。Satomura et al. (2003) には 6 つのケースについて述べられており、この論文で用いられたモデル (JMA-NHM, CReSS, TSO) では JMA-NHM の semi-implicit 版を除いて全てのテストケースの実行に成功している。ここでは、急峻な地形に対する計算安定性を確認するために、Satomura et al. (2003) のテストケースの中からもっとも急峻な地形を用いる A4 と D2 のケースについて行った実験結果を示す。設定は第 2.6.4 項と同様に示すと次の通りとなる。

ケース A4

- 格子間隔：水平 5 m、鉛直 5 m
- 予報領域：水平 10000 m、鉛直 1250 m
- 山の半値幅 $a = 50$ m
- 山の高さ $h = 100$ m
- 水平風速 $u_0 = 10$ m s^{-1}
- ブラント・バイサラ振動数 $N = 0.02$ s^{-1}
- 予報時間：10 分
- 積分時間間隔：0.25 秒
- 下部境界条件：摩擦無し
- 上部境界条件：固定条件。ただし、スポンジ層を用いる。
- 側面境界条件：周期境界条件

ケース D2

- 格子間隔：水平 50 m、鉛直 50 m
- 予報領域：水平 100 km、鉛直 17.5 km
- 山の半値幅 $a = 250$ m
- 山の高さ $h = 500$ m
- 水平風速 $u_0 = 10$ m s^{-1}
- ブラント・バイサラ振動数 $N = 0.01$ s^{-1}
- 予報時間：100 分
- 積分時間間隔：2 秒
- 下部境界条件：摩擦無し
- 上部境界条件：固定条件。ただし、スポンジ層を用いる。
- 側面境界条件：周期境界条件

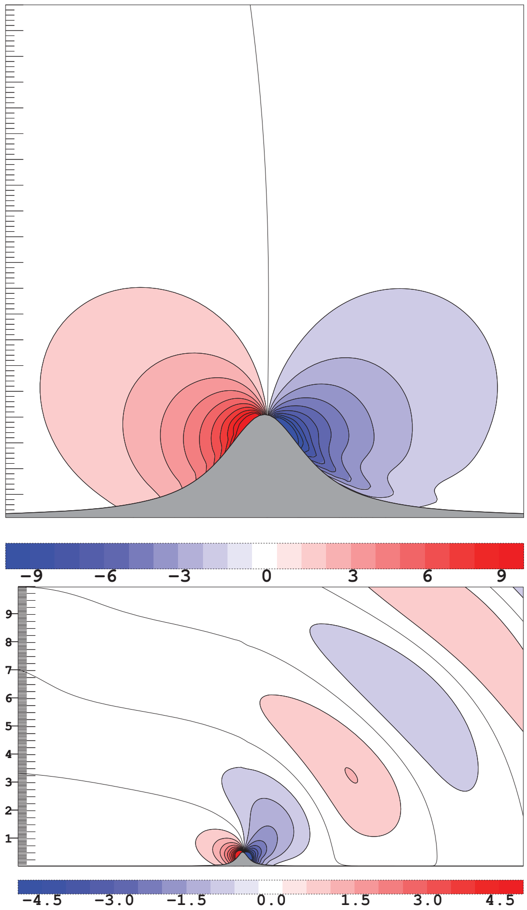

図 2.6.26　asuca による St-MIP 実験の鉛直流の水平・鉛直断面図。上段は Satomura et al. (2003) の A4 設定による実験結果であり、等値線間隔は 1.0 m s^{-1} である。また、下段は Satomura et al. (2003) の D2 設定による実験結果であり等値線間隔は 0.5 m s^{-1} である。いずれも急斜面を持つ実験であるが、安定に計算できていることがわかる。

これらはいずれも 45 度の急斜面を持つ設定である。これらの設定における asuca のテスト結果を図 2.6.26 に示す。asuca では安定に計算を実行できていることがわかる。

2.6.9 終わりに

本節では様々な理想実験による asuca の力学コアのテスト結果について説明してきた。本節で扱った実験設定のいずれに対しても asuca は良い結果を示すことができたと考えている。また、asuca のテストにおいては、現業モデルとして想定する仕様と比較して、水平格子間隔や鉛直層間隔の違いによる積分時間間隔の違いと解析解と比較するために、上部・下部・側面境界条件が実験によって一部異なる以外は全て同じ仕様としている。JMA-NHM の場合は、数値拡散等の設定に任意性のあるパラメータがあり、同一の設定で様々な実験に対応させることは困難である（実験ごとに最適な設定を探し出すことを行えば、ここで示した結果よりも良い結果が得られる可能性がある）。しかしながら、現業モデルの運用においては現象ごとに設定を変

えることはできない。複数の実験に対して、現業利用と同じ仕様で性能を評価し、良い結果を得られたことは asuca の大きな長所と考えている。

理想実験はここで示したもの以外にもいろいろあり、少しずつ評価を加えていきたいと考えている。また、既に示した実験においても誤差の評価といった、より詳細な解析も行われており、同様の取り組みは asuca においても必要であると考えている。

さらに、ここで示した理想実験とは、単に現在のモデルが正しいかどうかを確認するためだけに行うのではなく、問題点を抽出して改良につなげていくためのものでもある。ここで報告した結果を得るまでに、これらの実験を通じて評価・改良を行ってきた成果は大きいと考えているが、現在の結果をベースとしてさらなる高度な目標に向かって開発を進めていきたいと考えている。

付録 2.6.A　2 次元定常山岳波における定常な鉛直風が従う微分方程式の導出

ここでは、2 次元定常山岳波における定常な鉛直風 w が従う微分方程式 (2.6.7) 式を導出する。なお、理論的研究や本テストでリファレンスとする解析解の導出においては非弾性近似を用いることや、また水平風が鉛直方向に変化する場合を扱うことがあるが、ここでは簡単のために、ブシネスク方程式系を出発点とし、また、水平風を高度によらず一定値とする。定常山岳波については様々な文献があり、斉藤 (1994) や小倉 (1997) のような和文による解説・報告書もある。詳細についてはそれらの文献もあわせてご覧いただきたい。

水平 1 次元（x とする）、鉛直 1 次元（z とする）の 2 次元で断熱を仮定したときのブシネスク方程式系は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x} \\
\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{\theta'}{\theta_0}g \\
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\
\frac{\partial \theta}{\partial t} + u\frac{\partial \theta}{\partial x} + w\frac{\partial \theta}{\partial z} &= 0
\end{aligned}
\tag{2.6.14}
$$

ここで、u, w, p, θ, ρ はそれぞれ水平風速、鉛直風速、気圧、温位、密度である。また、g は重力加速度であり定数である。下付き添字 0 は時間や空間によらない定数を表し、プライムをつけた物理量は水平一様で静力学平衡を満たす場からの偏差を表す。ここで、この方程式系を線形化するために、物理量を基本場と摂動に分ける。まず、基本場として、温位と気圧は水平一様かつ静力学平衡を満たし水平流が場所によらず一定かつ鉛直流がゼロがである場を考え (水平一様で鉛直方向に変化する基本場はオーバーラインで表すとする) 、基本場とそこからの摂動（偏差と区別するためにダブルプライムで表すとする）に分ける。すなわち、$u = u_0 + u''$, $w = w''$, $\theta = \overline{\theta} + \theta''$, $\theta' = \theta''$, $p' = p''$ とする。これらを方程式系に代入し、摂動（やその微分）の積を微小量として無視し、さらに定常状態であることから摂動の時間微分もゼロとすると次の方程式が得られる。

$$
\begin{aligned}
u_0\frac{\partial u''}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p''}{\partial x} \\
\delta u_0\frac{\partial w''}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p''}{\partial z} + \frac{\theta''}{\theta_0}g \\
\frac{\partial u''}{\partial x} + \frac{\partial w''}{\partial z} &= 0 \\
u_0\frac{\partial \theta''}{\partial x} + w''\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z} &= 0
\end{aligned}
\tag{2.6.15}
$$

ここで新たに導入した δ は 0 か 1 をとりうるパラメータであり、1 の場合は鉛直方向の運動方程式を解く非静力学方程式系を表し、0 の場合は静力学方程式系を表す。水平方向及び鉛直方向の運動方程式をそれぞれ z と x で微分すると p'' を消去することができ、さらに、連続の式や温位の式を用いて u'' と θ'' を消去すると、以下の式が得られる。

$$
\delta\frac{\partial^2 w''}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w''}{\partial z^2} + l^2 w'' = 0 \tag{2.6.16}
$$

ただし、

$$
l^2 = \frac{1}{{u_0}^2}\frac{g}{\theta_0}\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z} = \frac{N^2}{{u_0}^2} \tag{2.6.17}
$$

である。ここで、N はブラント・バイサラ振動数である。さらに、$w'' = \hat{w}\exp(ikx)$ の形の解を考えると、$\hat{w}$ は

$$
\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial z^2} + (l^2 - \delta k^2)\hat{w} = 0 \tag{2.6.18}
$$

で表される。

参考文献

Asselin, R. A., 1972: Frequency filter for time integrations. *Mon. Wea. Rev.*, **100**, 487–490.

Colella, P. and P. R. Woodward, 1984: The Piecewise Parabolic Method (PPM) for Gas-Dynamical Simulations. *J. Comput. Phys.*, 174–201.

藤田司, 2003: 移流スキーム. 数値予報課報告・別冊第 49 号, 気象庁予報部, 35–50.

郷田治稔, 栗原和夫, 1991: 非静力学モデルの開発. 数値予報課報告・別冊第 37 号, 気象庁予報部, 67–82.

原旅人, 2012a: 理想実験による物理過程の評価. 数値予報課報告・別冊第 58 号, 気象庁予報部, 130–137.

原旅人, 2012b: 雲物理過程. 数値予報課報告・別冊第 58 号, 気象庁予報部, 76–89.

Ikawa, M. and K. Saito, 1991: Description of a nonhydrostatic model developed at the Forecast Research Department of the MRI. *Tech. Rep. MRI*, **28**, 238pp.

石田純一, 2008: 気象庁非静力学モデルの支配方程式系と地形に沿う鉛直ハイブリッド座標の導入. 数値予報課報告・別冊第 54 号, 気象庁予報部, 27–43.

Kato, T., 1995: A Box-Lagrangian Rain-Drop Scheme. *J. Meteor. Soc. Japan*, **73**, 241–245.

Kato, T., 1998: Numerical simulation of the band-shaped torrential rain observed over southern Kyushu, Japan on 1 August 1993. *J. Meteor. Soc. Japan*, **76**, 97–128.

Koren, B., 1993: A Robust Upwind Discretization Method For Advection, Diffusion And Source Terms. *CWI Technical Report NM-R 9308*, 1 – 22, URL `http://oai.cwi.nl/oai/asset/5293/05293D.pdf`.

室井ちあし, 1998: 非静力モデルの開発. 数値予報課報告・別冊第 44 号, 気象庁予報部, 25–41.

Nakamura, H., 1978: Dynamical effects of mountains on the general circulation of the atmosphere: 1. Development of finite-difference schemes suitable for incorporating mountains. *J. Meteor. Soc. Japan*, **56**, 317–339.

小倉義光, 1997: メソ気象の基礎理論. 東京大学出版会, 215pp.

Smolarkiewicz, P. K. and J. A. Pudykiewicz, 1992: A Class of Semi-Lagrangian Approximations for Fluids. *J. Atmos. Sci.*, **49**, 2082–2096.

斉藤和雄, 1994: 山越え気流について（おろし風を中心として）. 天気, **41**, 731–750.

Satomura, T., T. Iwasaki, K. Saito, C. Muroi, and K. Tsuboki, 2003: Accuracy of terrain following coordinates over isolated mountain: Steep mountain model intercomparison project (St-MIP). *Ann. Dis. Prev. Res. Inst.*, **46B**, 337–346.

Skamarock, W. C. and J. B. Klemp, 1994: Efficiency and accuracy of the Klemp-Wilhelmson time-splitting technique. *Mon. Wea. Rev.*, **122**, 2623–2630.

Straka, J. M., R. B. Wilhelmson, L. J. Wicker, J. R. Anderson, and K. K. Droegemeier, 1993: Numerical solutions of a non-linear density current: a benchmark solution and comparisons. *Intl. J. Numerical Methods in Fluids*, **17**, 1–22.

Wicker, L. J. and W. C. Skamarock, 1998: A Time-Splitting Scheme for the Elastic Equations Incorporating Second-Order Runge-Kutta Time Differencing. *Mon. Wea. Rev.*, **126**, 1992–1999.

Wicker, L. J. and W. C. Skamarock, 2002: Time-Splitting Methods for Elastic Models Using Forward Time Schemes. *Mon. Wea. Rev.*, **130**, 2088–2097.

Xiao, F. and X. Peng, 2004: A convexity preserving scheme for conservative advection transport. *J. Comput. Phys.*, 389–402.

山田芳則, 2003: 雲の微物理過程. 数値予報課報告・別冊第 49 号, 気象庁予報部, 52–76.

2.7　水平波数スペクトル分布の確認[1]

2.7.1　はじめに

大気の東西風、南北風、温位の水平波数スペクトル分布（以下、スペクトル分布とする）は、メソスケールでは波数の $-5/3$ 乗に比例する[2]ことが観測から知られており (Nastrom and Gage 1985)、数値予報モデルでも、基本的な性能としてこの分布が再現されることが求められる。一方で、モデルの水平格子間隔に近いスケール（高波数側）では、以下で述べるようにエネルギーを意図的に減衰させて、スペクトル分布としては実大気のそれよりも低エネルギー側に乖離させる必要がある (Skamarock 2004)。

本節では、モデルにおいて高波数側のエネルギーを減衰させる措置が必要な理由とそこから期待されるスペクトル分布の特徴について説明し、asuca の予報値におけるスペクトル分布を確認する。

2.7.2　実大気と数値予報モデルのスペクトル分布

ここでは、数値予報モデルにおいて高波数側のエネルギーを減衰させる措置が必要な理由とそこから期待されるスペクトル分布について、Skamarock (2004) に基づいて説明する。

図 2.7.1 はモデル予報値のスペクトル分布の模式図である（横軸は波数、縦軸はスペクトル密度の両対数グラフ）。横軸は右に行くほど高波数（水平スケールが小さい）となる。波数 k の $-5/3$ 乗に比例する実大気のスペクトルは図 2.7.1 の左右の図において “correct spectrum” として示される線に対応する。数値予報モデルの基本的な性能としてこの傾きが再現されることが求められる。ただし、モデル計算上、原理的にモデルの水平格子間隔の 2 倍のスケールまでしか扱えないことや、計算安定性を確保するために、高波数側のエネルギーを減衰させる措置（人為的な数値拡散や数値計算スキームに内包される数値拡散）が必要なことなどから、高波数側の表現には限界がある。高波数側のエネルギーを減衰させる措置は、以下の観点で必要である。図 2.7.1 の右図は、高波数側のエネルギーを減衰させる措置をしない場合に起こりうるスペクトル分布の模式図である。自然界に存在する低波数側から高波数側へのエネルギーカスケード（大きな渦が壊れることで小さなスケールへエネルギーが伝達される）が、モデルの水平格子間隔のスケールで人為的な下限があることにより、高波数側でエネルギーが蓄積されてしまう状態となる。そのような状態は、低波数側（モデルで良く解像できるスケール）の現象にも悪影響を与えうるため望ましくない。そのため、モデルの水平格子間隔のスケールに近い高波数側ではエネルギーを減衰させる措置が必要となる。図 2.7.1 の左図は、その措置

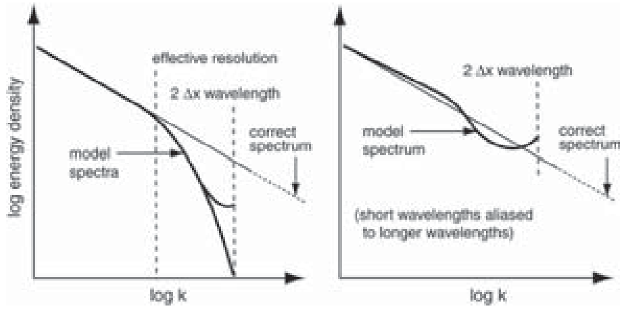

図 2.7.1　数値予報モデルの “spectral tails” の模式図。(Skamarock 2004) の Fig.10 を引用。（左）高波数側でエネルギーを適切に減衰させた場合。実大気のスペクトル分布 (correct spectrum) からモデル予報値のスペクトル分布が乖離しはじめるスケールが実効解像度 (effective resolution) とされる。領域モデルは $2\Delta x$ のところでややめくれあがることが多いとされる。（右）高波数側でエネルギーを減衰させない場合。その場合には、$2\Delta x$ のスケールにエネルギーが蓄積して低波数側に悪影響を与えうる。

がなされた状態の、モデルとして期待されるスペクトル分布を示している。また、この措置（高波数成分の扱い）によってモデルのスペクトル分布が実大気のスペクトル分布から下側に乖離しはじめるスケールが、スペクトル分布の観点でのモデルの実効解像度 (effective resolution) とされる。

また、モデルの実効解像度以下のスペクトル分布が実大気のそれに近い方が良いのは一つの見方として確かであるが、スペクトル分布には位相誤差に関する情報は含まれないことに留意する必要がある。このことに関して、Skamarock (2004) は、WRF モデル (Skamarock et al. 2008) の調査結果として、モデルの拡散性を弱めると高波数側のスペクトル分布が実大気のそれに近づくが、予報結果には悪影響があったこと、それは位相誤差による問題と考えられることを述べている。つまり、実効解像度以下のスペクトル分布が実大気に近い方が必ずしも良いとは限らないことを示している。一般に、モデルの高波数成分には位相誤差による高波数の数値振動（ノイズ）が多く含まれやすく、このことからも図 2.7.1 の左図のように高波数側のエネルギーを減衰させた状態が望ましいと言える。

次項では、この観点に基づいて asuca の予報値におけるスペクトル分布を確認する。

2.7.3　asuca のスペクトル分布

図 2.7.2 に、水平格子間隔 2 km の asuca について、ある事例の予報結果における温位のスペクトル分布を示す[3]。また、比較のため JMA-NHM の結果も示す。両モデルともにスペクトル分布の $-5/3$ の傾きを約 20 km の水平スケールまで再現できている。したがって、この図から読み取れるこのケースでの水平実効解像度

[1] 河野 耕平
[2] 両対数グラフで描くと傾き $-5/3$ の直線になる。
[3] 本節で述べるスペクトル分布の傾向は事例にあまり大きく依存しない。

は asuca, JMA-NHM ともに約 20 km であり、そこから高波数側でスペクトル分布が実大気のそれから下側に乖離しはじめることから、低波数側に影響を与えないように高波数側のエネルギーが適切に減衰できていることを示している。

2.7.4　asuca と JMA-NHM の高波数成分の扱い

図 2.7.2 の asuca と JMA-NHM のスペクトル分布の下がり方には違いがあり、これは両モデルの高波数側でエネルギーを減衰させる措置（高波数成分の扱い）の違いを反映したものと考えられる。実際に、両モデルでは高波数成分の扱い方が異なるので、以下でこの点について説明する。

JMA-NHM は人為的な数値拡散を付加することによって、モデル内に存在する数値スキームに起因する高波数の数値振動（ノイズ）を除去する設計となっている。このとき、数値拡散に係る任意性のあるパラメータを適切に調整する必要がある。参考として JMA-NHM の数値拡散の強さを変えた場合のスペクトル分布への影響を図 2.7.3 に示す。最も上に位置するスペクトルの線は、数値拡散を施さない場合の結果であり、徐々に数値拡散を強めると高波数側のみスペクトル密度が小さくなっていく様子が分かる。図 2.7.2 の JMA-NHM の結果は、パラメータを調整し、高波数の数値振動（ノイズ）を減衰させた結果のスペクトル分布であると言える。しかし、数値拡散のパラメータ調整が「適切」かどうかの直接的な指標がないことから、その調整は JMA-NHM の現業運用において難しい問題であった (石田 2008)。

JMA-NHM におけるこの問題を踏まえ、asuca では、そもそも除去すべきノイズを生じさせないように、第 2.3.2 項および第 2.4 節で示したように、時間積分法に 3 段階ルンゲクッタ法を用いるとともに、移流スキームに Koren (1993) の流束制限関数を導入した。その結果得られた図 2.7.2 のスペクトル分布から、経験的なパラメータ調整を必要とする人為的な数値拡散にはよらずに、また、JMA-NHM と比較して実効解像度を低下させることなく、高波数側のエネルギーを減衰させていることを確認できた。

2.7.5　まとめ

本節では、Skamarock (2004) に基づき、数値予報モデルにおいて高波数側のエネルギーを減衰させる措置が必要な理由とそこから期待されるスペクトル分布について説明した。図 2.7.2 の結果から、asuca では、経験的なパラメータ調整を必要とする人為的な数値拡散にはよらずに、低波数側に悪影響を与えないように高波数側のエネルギーを減衰させることができており、数値予報モデルとして期待されるスペクトル分布が得られていることを確認した。また、モデル予報値のスペクトル分布が実大気のそれから下側に乖離しはじめるスケールで定義される実効解像度 (Skamarock 2004) は、JMA-NHM と比較して変わらないことを確認した。

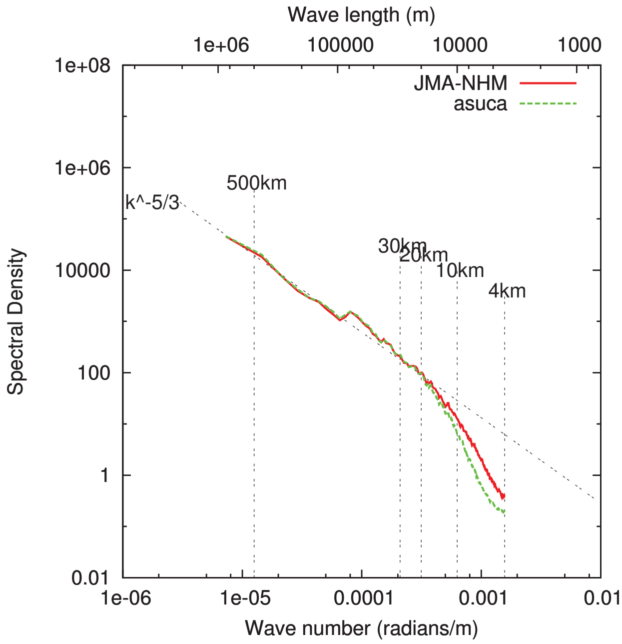

図 2.7.2　温位の水平波数スペクトル分布。赤が JMA-NHM, 緑が asuca。高度 3000 m-12000 m の平均値。

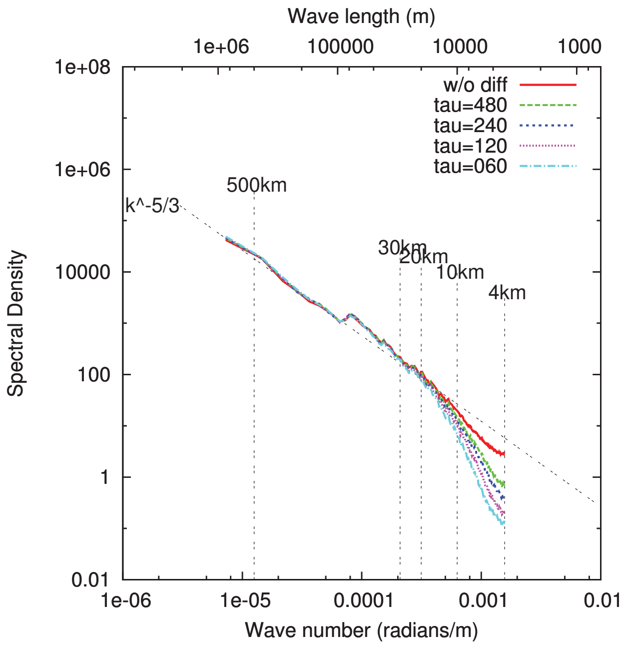

図 2.7.3　温位の水平波数スペクトル分布。JMA-NHM の数値拡散の強さを変更した結果。数値拡散を強めていくにしたがって高波数側のスペクトル密度が小さくなる。

参考文献

石田純一, 2008: 数値拡散の強さの変更. 数値予報課報告・別冊第 54 号, 気象庁予報部, 54.

Koren, B., 1993: A Robust Upwind Discretization Method For Advection, Diffusion And Source Terms. *CWI Technical Report NM-R 9308*, 1 – 22, URL `http://oai.cwi.nl/oai/asset/5293/05293D.pdf`.

Nastrom, G. D. and K. S. Gage, 1985: A climatology of atmospheric wavenumber spectra of wind and temperature observed by commercial aircraft. *J. Atmos. Sci.*, **42**, 950–960.

Skamarock, W. C., J. B. Klemp, J. Dudhia, D. O. Gill, D. M. Barker, M. G. Duda, X. Y. Huang, W. Wang, and J. G. Powers, 2008: *A Description of the Advanced Research WRF Version 3.* NCAR TECHNICAL NOTE, 113pp.

Skamarock, W. C., 2004: Evaluating mesoscale NWP models using kinetic energy spectra. *Mon. Wea. Rev.*, **132**, 3019–3032.