

平面波の反射屈折に伴う Energy の移動*

宇佐美 竜 夫**

Reflection, Refraction and Energy-Flow of Plane Waves.

Tatsuo USAMI

Seismological Section, C.M.O.

Transmission of energy flux of plane waves when it reflects and refracts at a plane boundary is considered. First, from the boundary conditions we deduce the equation of continuity of energy flux, which contains so called Knott's theorem of partition of energy.

On the other hand, Knott's theorem says queerly that the energy of refracted wave with angle of refraction larger than 90° becomes zero. This point can be avoided by applying the equation of continuity of energy flux here proved, for example, to the problem of free surface disturbed by SV plane wave of shock type, and in this case we prove that the energy flux of reflected S and refracted P waves can be divided into two respectively, the former parts of both P and S waves satisfy the continuity equation of energy flux with that of the incident SV wave, and the rests also satisfy the same one independently of the incident wave.

§ 1. 平面波の反射屈折の計算は C. G. Knott⁽¹⁾ 以来、多くの先輩が手をつけられている。それを調べてみると、振幅係数を計算したものの⁽²⁾と、入射波に対する反射および屈折波の energy の比を計算したものの⁽³⁾に分けられる。後者は Blut または Knott の energy 分配の式⁽⁴⁾といわれるものを基礎にしている。これは境界面には力が作用しないから energy-flux は連続でなければならないということから容易に導かれる。しかし、この式は e^{ipz} という型の波に使われると、いろいろ矛盾が現れてくる。屈折波の屈折角が 90° 以上になると、屈折波は入射波から energy を受け取らないというのもその一例である。一方、自由表面における反射屈折でも衝撃波を考えると、思いがけないおもしろい性質があることもわかっている⁽⁵⁾。そこで、上述の矛盾は衝撃波を考えたらどのように解決されるかを考えることにする。まず、energy-flux について、もっと一般的に考えることから始めよう。

§ 2. Fig. 1 のように 2 次元の場合を考える。このときには、図に示すように、8 種の波を考えることができる。ここで便宜上、 z 方向に $\frac{\sin}{\cos}$ 型に変化する波を S 型の波、exponential 型に変化する波を E 型の波とよぶことにする。

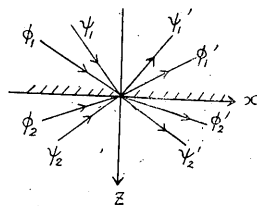


Fig. 1

* Received Apr. 9, 1954

** 中央気象台地震課

また、各弾性体の中で $\lambda = \mu$ とする。運動方程式は

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \phi, \quad \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 \psi \quad (2)$$

$$\text{で、また、} \quad h^2 = \rho \dot{p}^2 / (\lambda + 2\mu), \quad k^2 = \rho \dot{p}^2 / \mu \quad (3)$$

とおき、解として $e^{if(x \pm \alpha z - pt)}$, $e^{if(x \pm \beta z - pt)}$ をとり、その虚数部だけを考える。したがって、

$$h'^2 = f^2(1 + \alpha^2) = h^2 f^2 \quad k'^2 = f^2(1 + \beta^2) = k^2 f^2 \quad (4)$$

とおくと、(2) は次のようになる。

$$(\nabla^2 + h'^2)\phi = 0, \quad (\nabla^2 + k'^2)\psi = 0 \quad (5)$$

また、stress は

$$Z_x/\mu = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} - k'^2 \psi - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

$$Z_z/\mu = \frac{\lambda}{\mu} \Delta + 2 \frac{\partial w}{\partial z} = -k'^2 \phi - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \quad (6)$$

さて、境界条件は、境界の両側で

$$\Sigma u, \Sigma w, \Sigma Z_x, \Sigma Z_z \quad (7)$$

が連続ということである。したがって、

$$-\left(\Sigma \frac{\partial u}{\partial t} \Sigma Z_x + \Sigma \frac{\partial w}{\partial t} \Sigma Z_z \right)$$

$$= -\sum_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} Z_{xi} + \frac{\partial w_i}{\partial t} Z_{zi} \right) - \sum_{j \neq i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial t} Z_{xi} + \frac{\partial w_j}{\partial t} Z_{zi} + \frac{\partial u_i}{\partial t} Z_{xj} + \frac{\partial w_i}{\partial t} Z_{zj} \right) \quad (8)$$

が連続である。ここに、 i および j は ϕ , ϕ' , ψ , ψ' のいずれかを意味する。この第1項はおのれの波 ϕ , ϕ' , ψ , ψ' に伴って z の正方向に単位時間に単位面積を流れる energy flux である。第2項は $i \neq j$ ならば、 i や j にどの波の組合せをとっても、次にのべる2つの組合せを除けば、0になる。このことはその波がS型であると、E型であるに関係なく成立する。この証明は容易である。各組合せについて計算を実行すればよい。しかし、 i および j として、

1° E型の ϕ とE型の ϕ'

2° E型の ψ とE型の ψ'

の組合せをとるときにだけ(8)の第2項は0にならない。このときには、 ϕ も ϕ' も(ψ も ψ' も) x 方向に同じ速度で進む波であるから、 $\phi + \phi'$ ($\psi + \psi'$)が一つの波と考えられる。こう考えると第2項は0になる。そこで、今後、上記1°および2°のときには $\phi + \phi'$ ($\psi + \psi'$)を一つの波と考えることにし、これをE型同種合成波ということにする。こういう場合は、実際には、層があり、その中で ϕ または ψ がE型になるときに生ずる。結局、(8)式の第2項は0となり、各波に伴い z の正方向に単位時間に流れ出る energy flux の和が連続であることが証明された。これは Knott の energy 分配の式をおしひろめたものである。

今後、各波に伴う energy flux は t で 1 周期の間積分したものを考え、それを F で表わす。そのときにも、(8) の第 2 項は 0 となる。上に求めた E 型同種合成波では energy flux は ϕ ならば

$$\begin{aligned}\phi &= e^{-\alpha' f z} [A_1 \cos f(x - pt) + B_1 \sin f(x - pt)] \\ \phi' &= e^{\alpha' f z} [A_2 \cos f(x - pt) + B_2 \sin f(x - pt)]\end{aligned}$$

とすると、
$$F_{\phi+\phi'} = - \int_0^T \left(\frac{\partial u}{\partial t} Z_x + \frac{\partial w}{\partial t} Z_z \right) dt = 2\pi \alpha' f^2 k'^2 (A_1 B_2 - B_1 A_2) \quad (9)$$

ψ のときにも同様にして

$$F_{\psi+\psi'} = 2\pi \beta' f^2 k'^2 (\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_2 - \mathfrak{B}_1 \mathfrak{A}_2) \quad (10)$$

となる。また、その他の単独の E 型では (9) は 0 となる。つまり、たとえば、Fig. 1 の境界に ϕ_1 が入射して ϕ_2' だけが E 型になるとすると、 ϕ_1 の energy は ϕ_1' 、 ψ_1' 、 ψ_2' に分配され、 ϕ_2' はそれとは別に自分が始めからもっていた energy で x 方向に進む。したがって、 ϕ_2' は境界条件を満足するためにだけ存在して、energy の授受にはあずからない。これは (2) の解として $e^{i p t}$ という型をとったために出てきた矛盾である。また、strain-energy function を W とし、運動の energy を T とすると、 S 型の波では $T=W$ であるが、 E 型の場合には一般に $T \neq W$ であることが簡単な計算からわかる⁽⁶⁾。また、energy flux (8) は単位時間の T と W の変化量の和に等しい。したがって、一般には 1 周期間に z 方向に流れる energy flux の連続の式は同じ 1 周期に増減する運動の energy の連続を保証しない。また、 E 型同種合成波があるときには、その波を合成して 1 つの波と考えなければ、Knott の energy 分配の式はなりたたない。その他のときになりたつことはすぐわかる。

次に、Fig. 2 のように、二つの半無限弾性体の間にいくつかの層がはさまれているときを考える。図のように波 1 が入射して 2, 3 は反射し、最後に 4, 5 という波が透過するとする。このときには、各境界面で (8) が成立つから、中間にはさまれた層で E 型の波ができようと S 型の波ができようと、そういうことには無関係に

$$F_1 + F_2 + F_3 = F_4 + F_5 \quad (11)$$

がなりたつ。つまり、 F_1 は F_2, F_3, F_4, F_5 の和になっている。

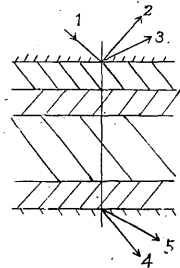


Fig. 2

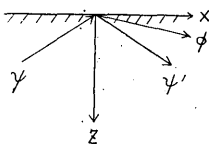


Fig. 3

§ 3. 前の節にのべた矛盾は shock type の波を考えれば、解決すると考えられる。一例として、自由表面に SV 波が入射し、かつ、反射 P 波が E 型になる場合を考えよう (Fig. 3)。

運動方程式は (2) と同じだが、次の型の解を考える。

$$\psi = \frac{1}{f} e^{i f(x - Bz - pt - \epsilon)}, \quad \psi' = \frac{B}{f} e^{i f(x + Bz - pt - \epsilon)}, \quad \phi' = \frac{A}{f} e^{i f(x + \alpha z - pt - \epsilon)} \quad (12)$$

こゝで、 $\alpha = i\alpha'$ とおき、虚数部分をとることにする。容易に

$$A = \frac{4\beta(1-\beta^2)}{4\alpha\beta + (1-\beta^2)^2} \quad B = \frac{4\alpha\beta - (1-\beta^2)^2}{4\alpha\beta + (1-\beta^2)^2} \quad (13)$$

(12) 式に次の (14) 式を作用させると、shock type に移ることができる。

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty df \int_{-\infty}^\infty F(\varepsilon) d\varepsilon \quad (14)$$

こゝで、Fourier の定理

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty df \int_{-\infty}^\infty F(\varepsilon) \cos f(x-\varepsilon) d\varepsilon \quad (15)$$

を使うと、 ψ による変位は

$$u_0 = -\beta F(x - \beta z - pt) \quad w_0 = -F(x - \beta z - pt) \quad (16)$$

となる。また、同じようにして ψ' による変位 u' , w' , ϕ' による変位 u_1 , w_1 は次のようになる。

$$\begin{aligned} u' &= \beta \frac{16\alpha'^2\beta^2 - (1-\beta^2)^4}{\Delta} F(x + \beta z - pt) - \frac{8\alpha'\beta^2(1-\beta^2)^2}{\Delta\pi} \int_0^\infty df \int_{-\infty}^\infty F(\varepsilon) \sin f(x + \beta z - pt - \varepsilon) d\varepsilon \\ w' &= -\frac{16\alpha'^2\beta^2 - (1-\beta^2)^4}{\Delta} F(x + \beta z - pt) + \frac{8\alpha'\beta(1-\beta^2)^2}{\Delta\pi} \int_0^\infty df \int_{-\infty}^\infty F(\varepsilon) \sin f(x + \beta z - pt - \varepsilon) d\varepsilon \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{4\beta(1-\beta^2)^3}{\Delta\pi} \int_0^\infty e^{-f\omega'/z} df \int_{-\infty}^\infty F(\varepsilon) \cos f(x - pt - \varepsilon) d\varepsilon \\ &\quad + \frac{16\alpha'\beta^2(1-\beta^2)}{\Delta\pi} \int_0^\infty e^{-f\omega'/z} df \int_{-\infty}^\infty F(\varepsilon) \sin f(x - pt - \varepsilon) d\varepsilon \\ w_1 &= \frac{16\alpha'^2\beta^2(1-\beta^2)}{\Delta\pi} \int_0^\infty e^{-f\omega'/z} df \int_{-\infty}^\infty F(\varepsilon) \cos f(x - pt - \varepsilon) d\varepsilon \\ &\quad - \frac{4\alpha'\beta(1-\beta^2)^3}{\Delta\pi} \int_0^\infty e^{-f\omega'/z} df \int_{-\infty}^\infty F(\varepsilon) \sin f(x - pt - \varepsilon) d\varepsilon \end{aligned} \quad (18)$$

$$\text{たゞし,} \quad \Delta = 16\alpha'^2\beta^2 + (1-\beta^2)^4 \quad (19)$$

さて、 $z = \text{一定の面を通り } z \text{ の正方向に単位時間に流れ出る energy flux は}$

$$\begin{aligned} F &= -\left(\frac{\partial u}{\partial t} Z_x + \frac{\partial w}{\partial t} Z_z \right) \\ &= -\mu \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial w}{\partial t} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right\} \quad \text{for } \psi \\ &= -\mu \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial w}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right\} \quad \text{for } \phi \end{aligned} \quad (20)$$

これにより $z = 0$ のときの F を計算してみると

$$F_\psi = -\mu(1+\beta^2)\beta p F'^2 \quad (21)$$

また、 $F_\psi = F_{\psi'} + F_{\psi''}$ とし、 $F_{\psi'}$ は u' , w' の第1項だけから求められるものとする、

$$F_{\psi'} = \mu[16\alpha'^2\beta^2 - (1-\beta^2)^4]^2 p \beta (1+\beta^2) F'^2 / \Delta^2 \quad (22)$$

また、 $F_\psi = F_{\psi'} + F_{\psi''}$ とし、 $F_{\psi''}$ は変位を t および x で微分するときには第1項、 z で微分すると

きには第2項だけをとって求められる部分とすると、

$$F_{\phi'_1} = 64\mu\alpha'^2\beta^3(1-\beta^2)^4 p(1+\beta^2)F'^2/\Delta^2 \quad (23)$$

ここに、

$$F' = \frac{d}{d\varepsilon} F(\varepsilon) \quad (24)$$

このとき、

$$F_{\psi} + F_{\psi'_1} + F_{\phi'_1} = 0 \quad F_{\psi'_1} \geq 0 \quad F_{\phi'_1} \geq 0 \quad (25)$$

つまり、入射波の energy は $F_{\psi'_1}$ と $F_{\phi'_1}$ とに分配される。また、前節から

$$F_{\psi} + F_{\psi'} + F_{\phi'} = 0 \quad (26)$$

したがって、

$$F_{\psi'_1} + F_{\phi'_1} = 0 \quad (27)$$

がなりたつ。(30) は入射波と関係のある部分、(31) は入射波に無関係な部分で、 ψ' と ϕ' は入射波から energy を受取る一方、互に energy を授受しながら x 方向に進むことになる。また、

$$\left| \frac{F_{\phi'_1}}{F_{\psi}} \right| = \frac{64\alpha'^2\beta^3(1-\beta^2)^4}{\Delta^2} = |B|^2 \quad \left| \frac{F_{\psi'_1}}{F_{\psi}} \right| = \frac{[16\alpha'^2\beta^3 - (1-\beta^2)^4]^2}{\Delta^2} = |A|^2 \quad (28)$$

となり、これは $F(\varepsilon)$ の形にも x にも無関係で入射角だけの函数になる (Table 1 参照)。

$F(\varepsilon)$ として次の形をとったときを考えてみる。

$$F(\varepsilon) = ae^{-b^2\varepsilon^2} \quad (29)$$

このとき、 $z=0$ では

$$F_{\psi}/\mu = -4a^2b^4p\beta(1+\beta^2)(x-pt)e^{-2b^2(x-pt)^2} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} F_{\psi'_1}/\mu &= \frac{4a^2b^4p\beta(1+\beta^2)}{\Delta^2} [16\alpha'^2\beta^3 - (1-\beta^2)^4]^2 (x-pt)^2 e^{-2b^2(x-pt)^2} \\ &+ \frac{256a^2b^4\alpha'^2p\beta^3(1+\beta^2)(1-\beta^2)^4}{\Delta^2\pi} [2b(x-pt)I(2bx-pt) - 1]^2 \\ &- \frac{[16\alpha'^2\beta^3 - (1-\beta^2)^4](x-pt)}{\Delta^2\sqrt{\pi}} [2b(x-pt)I(2bx-pt) - 1] \\ &\times 64(1+\beta^2)(1-\beta^2)^2 a^2b^3p\alpha'\beta^2 e^{-b^2(x-pt)^2} \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} F_{\phi'_1}/\mu &= \frac{256a^2b^4p\alpha'^2\beta^3(1-\beta^2)^4(1+\beta^2)}{\Delta^2} (x-pt)^2 e^{-2b^2(x-pt)^2} \\ &- \frac{256a^2b^4p\alpha'^2\beta^3(1+\beta^2)(1-\beta^2)^4}{\Delta^2\pi} [2b(x-pt)I(2bx-pt) - 1]^2 \\ &+ \frac{[16\alpha'^2\beta^3 - (1-\beta^2)^4](x-pt)}{\Delta^2\pi} [2b(x-pt)I(2bx-pt) - 1] \\ &\times 64a^2b^3p\alpha'\beta^2(1+\beta^2)(1-\beta^2)^2 e^{-b^2(x-pt)^2} \end{aligned} \quad (32)$$

ここに、

$$I(h) = \int_0^{\infty} e^{-u^2} \sin hu \cdot du \quad (33)$$

で、また、上の計算には (34) 式を使った。

$$\int_0^{\infty} e^{-u^2} \cos au \cdot du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{a^2}{4}} \tag{34}^{(7)}$$

Table I

i	$ F_{\phi'} / F_{\psi} $	$\frac{256 p(1+\beta^2) \alpha'^2 \beta^3 (1-\beta^2)^4}{\Delta^2 \pi}$	$\frac{-64 p \alpha' \beta^3 (1-\beta^2)^2 (1+\beta^2)}{\Delta^2 \sqrt{\pi}} \times [16 \alpha'^2 \beta^2 - (1-\beta^2)^4]$
critical	0	0 $\times \frac{V_s}{\pi} \mu$	0 $\times \frac{V_s}{\sqrt{\pi}} \mu$
40°	0.02802	0.50287	-5.92406
45°	0	0	0
50°	0.00628	0.04691	-1.17989
60°	0.23438	0.83335	-3.01236
65°	0.53835	1.34888	-2.49819
70°	0.84025	1.47426	-1.28563
75°	1.00000	1.18928	0.00619
80°	0.78913	0.58275	0.60246
90°	0	0	0

次の Table I には $|F_{\phi'}|/|F_{\psi}|$ 、および $F_{\phi'_{II}}$ の各項のうち x に無関係な部分を示している。また、Table II は $I(2bt)$ と $2bsI(2bs)-1$ を示しておいた。たゞし、Table I では $a=b=1$ とした。また、 $p=V_s/\sin i$ で V_s は横波の速度、 i は入射角である。この2つの表をみればわかるように、 $F_{\phi'_{II}}$ の第1項は常に負である。つまりこの項は $\phi' \rightarrow \psi'$ に移動する energy を示している。一方、 $F_{\phi'_{II}}$ の第2項は $(x-pt)$ および入射角によって正にもなり、負にもなる。また、この第2項は入射波の振幅が0になるような x では生じないことが容易にわかる。

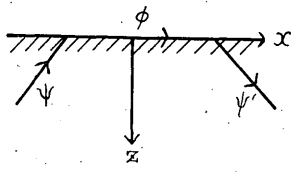


Fig. 4

したがって、Fig. 4 のような道すじを通ってくる反射SV波に伴うenergyは当然 F_{II} に含まれる。上に述べた例では F_{II} の第1項が

Table II

2bs	I(2bs)	2bs I(2bs) - 1
0	0	-1
0.2	0.099996	-0.98000
0.4	0.19675	-0.92130
0.6	0.28263	-0.83042
0.8	0.35994	-0.71205
1.0	0.42444	-0.57556
1.2	0.47476	-0.41028
1.4	0.51050	-0.28530
1.6	0.53210	-0.14863
1.8	0.5404	-0.02728
2.0	0.5381	0.0762
2.2	0.5262	0.15764
2.4	0.5121	0.22904
2.6	0.4834	0.25684
2.8	0.4587	0.28436
3.0	0.4280	0.28400
3.2	0.4000	0.28000
4.0	0.3023	0.20920
5.0	0.221	0.1005
6.0	0.178	0.0680
8.0	0.129	0.0344
10.0	0.102	0.0210
12.0	0.08454	0.0145
16.0	0.06300	0.0080
20.0	0.05025	0.0050

これに相当する。これは $t=0$ ならば、 $x \gg 1$ のとき、 $(1/2b^2 x^2)^2$

で減衰する。第2項は原点からの距離および入射角によって符号が異なるので、一義的に断定するわけにはゆかない。

以上の例では、shock type といっても、 x 方向にすべての現象が一様に $V_s/\sin i$ で進む場合であるから、事実を表わしているとはいいがたい。更に進んで line source の場合を考えるべきであるが、これは後日にゆずる。

References

- (1) C. G. Knott: Trans. Seism. Soc. Jap.. **12** (1888), 115—136, Phil. Mag., **48** (1899), 64.
- (2) たとえば, 松沢: 地震 **4** (1932), 7—21. 河角, 鈴木: 地震 **4** (1932), 277—307.
- (3) たとえば, K. Ergin: B.S.S.A., **42** (1952), 349.
- (4) (2)の后者, または H. Blut: Gerl. Beitr. z. Geophys. **8** (1932) 130—144.
これは反射, 屈折にあずかる各波についての $\rho\alpha A^2$ (ρ : 密度, $\alpha = \cot i$, A : 振幅, また, i は入射, 反射または屈折角) の和が連続なことをいっている。
- (5) 本間: 験震時報 **16** (1952), 67—71.
- (6) たとえば, $\phi = e^{-\alpha x} [A \cos (fx - pt) + B \sin (fx - pt)]$ とおくと

$$\int_0^T T dt \Big/ \int_0^T W dt = (\lambda + 2\mu)(f^4 - \alpha^4) / [(\lambda + 2\mu)(f^4 + \alpha^4) + 2f^2\alpha^2(2\mu - \lambda)]$$
- (7) たとえば, 高木: 解析概論 (1943) p.194.