

## 半無限均一彈性體表面に週期的力が働いて 生ずる彈性波の傳播 (補遺)

廣 野 卓 藏\*

§ 1. 緒 言 筆者は前報<sup>(1)</sup>に於て、半無限均一彈性體の表面に、週期的に力が働いた場合に彈性體内に如何なる彈性波を生ずるかを數理を以て論じた結果を述べた。その結果一般に6種類の波が発生する事が判つたが、その内2種は云はゞ二次的な波で實際上あまり重要なものでないのでは省略する。残りの4種は即ち  $P$ ,  $S$  ( $S'V$ ),  $S_2$  ( $SH$ ), 及びレーレー波等の諸波であつて、その振幅の、波長が極めて長い場合の空間的分布、及びレーレー波の起源については前報に於て既に述べた所である。然るに其處に於て最も重要な問題となつた點は、波長がそれ程長くない場合には立體波の振幅の空間分布が波動源に於ける外力の平面的分布並びにその週期に依存すると云ふ事であつた。之は無限彈性體内の球波動源から發生する波動の場合と全く趣を異にする所であつて、後者の場合には、球面に働く力の分布が一つの球面函數で與へられるならば、各立體波の振幅の方位分布の型は一義的に定まる。それは、力の週期とか或は球の大きさには拘はらない。従つて力の分布が簡單ならば、その深發地震への應用も比較的容易であつた。所が今の場合にはすぐにはそれが出来ない。實際の淺發地震に於て震源の大きさ、力の分布、及び力の型が明瞭になつてゐないと振幅の方位分布も決定出来ないのである。此の兩者の根本的な差異は如何なる點に由來するであらうか。此の點を物理的に解釋すれば、無限彈性體内の球源の場合には、力の週期を適當に採る事によつて源球を一種の共鳴状態にする事が出来る。換言すればあらゆる方向に同時に最も能率よく波動を送り出す事が出来る。然るに下 (§3) にも述べる様に今の場合斯様な波動の状態は存在しない。即ち外力の働く附近に於て上の如き共鳴を起し得る様な振動域が存在しないのである。之が兩者の根本的差異であると思ふ。但し注意すべきは今の場合でも球源の場合と同様、單なる振動區域は發生し得る。唯々共鳴しない丈である (§2 参照)。

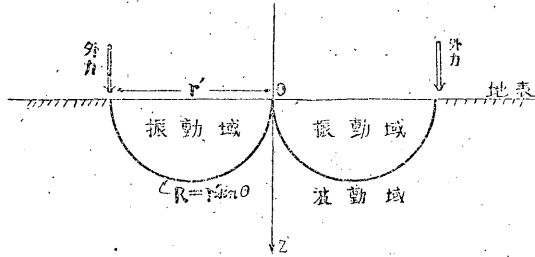
斯様なわけで、實際に應用さるべき振幅分布を決定するには、その前にまず淺發地震の發震機巧が明確にされて居なければならない。しかし、理論の問題としては寧ろ逆で、可能性ある諸々の場合を明にし、その得られは結果を觀測事實と比較研究して發震機巧を推察すると云ふ順序になる。以下に述べる所はそれに關する二三の理論の結果であつて、前報の補遺の如きものである。而して全

\*中央象台地震課

(1) 驗震時報第12卷1號

と共に別誌に發表する積り<sup>(1)</sup>であるから此處では計算の要點及び結果のみを記する。

第 1 圖



§ 2 振動域と波動域  $\Pi_n(r) \cos n\varphi e^{i\nu t}$  なる週期的放射状剪断力 (Radial Force) が半無限弾性體の表面に働いた場合の形式的解は既に前報に述べた所であるが、便宜の爲此處に再録すると、弾性體内の一點  $(r, \varphi, z)$  の變位  $\vartheta$  は  $\vartheta = \vartheta_{11} + \vartheta_{21}$

$$\begin{aligned} \vartheta_{11r} &= -\frac{1}{4\mu} \int_0^\infty dr' \Pi_n(r') r' \int_0^\infty \frac{\xi\beta}{F(\xi)} \{2\xi^2 e^{-\alpha z} - (2\xi^2 - k^2) e^{-\beta z}\} \\ &\quad \times \{J_{n+1}(\xi r') - J_{n-1}(\xi r')\} \{J_{n+1}(\xi r) - J_{n-1}(\xi r)\} d\xi \cos n\varphi e^{i\nu t} \\ \vartheta_{11\varphi} &= -\frac{1}{4\mu} \int_0^\infty dr' \Pi_n(r') r' \int_0^\infty \frac{\xi\beta}{F(\xi)} \{2\xi^2 e^{-\alpha z} - (2\xi^2 - k^2) e^{-\beta z}\} \\ &\quad \times \{J_{n+1}(\xi r') - J_{n-1}(\xi r')\} \{J_{n+1}(\xi r) + J_{n-1}(\xi r)\} d\xi \sin n\varphi e^{i\nu t} \\ \vartheta_{11z} &= -\frac{1}{2\mu} \int_0^\infty dr' \Pi_n(r') r' \int_0^\infty \frac{\xi^2}{F(\xi)} \{2\alpha\beta e^{-\alpha z} - (2\xi^2 - k^2) - e^{-\beta z}\} \\ &\quad \times \{J_{n+1}(\xi r') - J_{n-1}(\xi r')\} J_n(\xi r) d\xi \cos n\varphi e^{i\nu t} \\ \vartheta_{21r} &= \frac{1}{4\mu} \int_0^\infty dr' \Pi_n(r') r' \int_0^\infty \frac{\xi}{\beta} e^{-\beta z} \{J_{n+1}(\xi r') + J_{n-1}(\xi r')\} \\ &\quad \times \{J_{n+1}(\xi r) + J_{n-1}(\xi r)\} d\xi \cos n\varphi e^{i\nu t} \\ \vartheta_{21\varphi} &= \frac{1}{4\mu} \int_0^\infty dr' \Pi_n(r') r' \int_0^\infty \frac{\xi}{\beta} e^{-\beta z} \{J_{n+1}(\xi r') + J_{n-1}(\xi r')\} \\ &\quad \times \{J_{n+1}(\xi r) - J_{n-1}(\xi r)\} d\xi \sin n\varphi e^{i\nu t} \\ \vartheta_{21e} &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

但し  $F(\xi) = (2\xi^2 - k^2)^2 - 4\xi^2\alpha\beta, \quad \frac{\nu^2\rho}{\lambda + 2\mu} = k^2, \quad \frac{\nu^2\rho}{\mu} = k^2$

$$\alpha = \sqrt{\xi^2 - k^2}, \quad \beta = \sqrt{\xi^2 - k^2}$$

で與へられる。

以後計算は斯様な式から出發したのであるが、その際に観測點に關係のある  $r$  を含む Bessel

(1) Geophys, Mag, Vol, 18

函数を Hankel 函数に直したり (Sommerfeld の變換) 或は Weil の變換をなしたが一方力の分布に關する  $r'$  を含むものは別に變形せずそのまゝの形で鞍點降下法により漸近解を求めた。然るにその場合第 1 近似解に對する殘留値は  $R > r \sin \theta$  ならば收斂するが、 $R < r \sin \theta$  ならば發散する事が判つた (但し  $R, \theta, \varphi$  は極座標で  $\theta$  は垂直下方から測つてある。又  $r'$  は力の働いた點の  $r$  座標)。(1) 式を見れば、 $r$  を含む Bessel 函数を Hankel 函数に變換する事は進行波を求めてゐる事になるのが判るから、以上の事柄から進行波は  $R > r \sin \theta$  で存在するが、 $R < r \sin \theta$  では存在しないと云ふ事になる。そこで  $R < r \sin \theta$  の場合には、逆に  $r'$  を含む Bessel 函数を Hankel 函数等に換へ  $r$  を含むものはそのまゝにしておくこと有限解を得る可能性がある事が證明される。但し明瞭な函数型を算出し得るや否やは別問題である。(1) 式を見ると此の場合には進行波ではなくて停立波或は強制振動が得られる事が判る。結局、半徑  $r'$  の圓周上に働く力によつて

$R = r \sin \theta$  なる境界面の内部には強制振動が起り、その表面から外部に向つて進行波が起る事が判る。(第 1 圖) 若し半徑  $r_0$  なる圓内一面に力が働く場合には、 $0$  より  $r_0$  までのあらゆる  $r'$  の値に對して上記の境界面が出来るから、純粹な活動は  $R = r_0 \sin \theta$  より外部で、その内部は進行波と強到振動との混合となり、中心に近づく程後者の割合が大となる。

§ 3. 空間波の振幅分布に對する週期の影響 波動源より充分遠方に於ける空間波は、力が § 1 と同じ場合には、

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_R &= \frac{h}{\mu} i^{n+1} L_{1n}(h \sin \theta, r_0) \frac{\cos \theta \sin \theta \sqrt{\epsilon^2 - \sin^2 \theta}}{D(\cos \theta)} \cos n\varphi \frac{e^{-i h R + i \nu t}}{h R} \\ \vartheta_\theta &= \frac{h}{2\mu} i^{n+1} L_{1n}(h \sin \theta, r_0) \frac{\cos \theta (2 \cos^2 \theta - 1)}{E(\cos \theta)} \cos n\varphi \frac{e^{-i h R + i \nu t}}{h R} \\ \vartheta_\varphi &= \frac{k}{2\mu} i^{n+1} L_{2n}(k \sin \theta, r_0) \sin n\varphi \frac{e^{-i k R + i \nu t}}{k R} \end{aligned} \right\} (2)$$

$n=0$  の場合には

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_R &= \frac{2 h i}{\mu} L_0(h \sin \theta, r_0) \frac{\cos \theta \sin \theta \sqrt{\epsilon^2 - \sin^2 \theta}}{D(\cos \theta)} \frac{e^{-i h R + i \nu t}}{h R} \\ \vartheta_\theta &= \frac{k i}{\mu} L_0(k \sin \theta, r_0) \frac{\cos \theta (2 \cos^2 \theta - 1)}{E(\cos \theta)} \frac{e^{-i k R + i \nu t}}{k R} \\ \vartheta_\varphi &= 0 \end{aligned} \right\} (3)$$

但し

$$\epsilon = (\lambda + 2\mu) / \mu$$

$$L_{1n}(h \sin \theta, r_0) = \int_0^{r_0} \Pi_n(r') \{ J_{n+1}(hr' \sin \theta) - J_{n+1}(hr' \sin \theta) \} r' dr'$$

$$L_{2n}(k \sin \theta, r_0) = \int_0^{r_0} \Pi_n(r') \{ J_{n+1}(kr' \sin \theta) + J_{n+1}(kr' \sin \theta) \} r' dr'$$

$$L_0(h \sin \theta, r_0) = \int_0^{r_0} \Pi_0(r') J_1(hr' \sin \theta) r' dr'$$

$$D(\cos \theta) = (\epsilon^2 - 2 \sin^2 \theta)^2 + 4 \cos \theta \sin^2 \theta \sqrt{\epsilon^2 - \sin^2 \theta}$$

$$E(\cos \theta) = (2 \cos^2 \theta - 1)^2 + 4 \cos \theta \sin^2 \theta \sqrt{\frac{1}{\epsilon^2} - \sin^2 \theta}$$

又  $\vartheta_R, \vartheta_\theta, \vartheta_\varphi$  はそれぞれ  $P, S_1, S_2$  波を表はす。

これら振幅の  $\theta$  に関する分布を不定ならしめる因子は  $L_{1n}, L_{2n}$  である。 $\xi$  が充分小さな値に限られる時、即ち波長が  $r_0$  に比して充分長いとか、 $\theta$  が充分小さい時には、 $L_{1n}$  等は週期に無関係な一定の  $\theta$  分布の型を採る事は既に述べたが、さうでない場合には  $\Pi_n(r')$  が一定してゐても  $h$  及び  $k$  が週期  $T$  に逆比例するからその  $\theta$  分布も  $T$  と共に變る。

今、簡單の爲に力が半径  $r_0$  の圓周上のみ働くものとすれば

$$L_{1n}(\xi) = K_n(J_{n-1}(\xi) - J_{n+1}(\xi))$$

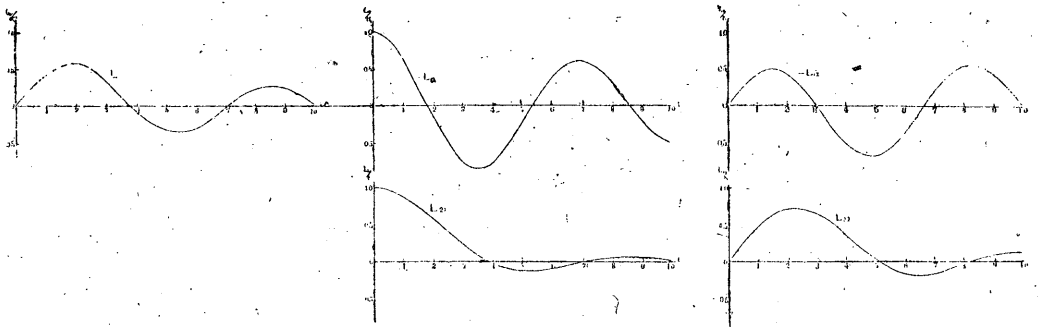
$$L_{2n}(\xi) = K_n(J_{n+1}(\xi) + J_{n-1}(\xi))$$

$$L_0(\xi) = K_0 J_n(\xi)$$

但し  $K_n = r_0 \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \int_{r_0+r}^{r_0} \Pi_n(r) \cdot \Delta r$  又  $\xi = hr_0 \sin \theta (= kr_0 \sin \theta)$  である。

$n=0, 1, 2$  の場合について  $L_{1n}$  等と  $\xi$  の關係を圖示すれば第 2 圖の如くなる。

第 2 圖



圖に於て  $L_{1n}$  等の取り得る範圍は  $0 \leq \xi \leq hr_0$  (又は  $kr_0$ ) である。故に初めに充分長く採つた週期 ( $h$  又は  $k$  小) を次第に短かく ( $h$  等を大に) するとやがて  $L_{1n}$  (又は  $L_{2n}$ ) の極値が  $\theta = \frac{\pi}{2}$  に現はれ次第に  $\theta$  の小なる位置に移動する。週期が或る値を越して尙小さくなると前とは符號の異つた部分が  $\theta = \frac{\pi}{2}$  に現はれ始め  $\theta$  の小なる方向に擴がる。又更に小さい或る値を週期が越すと又符號が變つた領域が現はれる。かくして週期がどんどん小さくなるに従つて斯様な符號を交互に代へる  $\theta$  の帯が無數に現はれて來る。

力の分布に關し一般の場合を論ずる事は困難であるが、次の如き特別な條件をつけて見ると有益な結果を得る。即ち  $\int_0^\infty \Pi_n(r) r dr \equiv P$  を一定として、 $\theta$  の或る値  $\theta_0$  に於て  $L$  が極値を取る様な  $\Pi_n(r)$  の分布を考へて見ると、その様な分布は、總ての力を半径  $a$  の圓周上に分布させたもので

ある事が容易に判る。但し  $a$  は  $a = \xi'/h \sin \theta_0$  (又は  $= \xi'/k \sin \theta_0$ ) で  $\xi'$  は

$$\frac{d}{d\xi} \{J_{n+1}(\xi) - J_{n-1}(\xi)\} = 0 \quad (L_{1n} \text{ の場合})$$

$$\frac{d}{d\xi} \{J_{n+1}(\xi) + J_{n-1}(\xi)\} = 0 \quad (L_{2n} \text{ の場合})$$

$$\frac{d}{d\xi} J_1(\xi) \quad (L_0 \text{ の場合})$$

を満足する  $\xi$  の値であり、かゝる値は無数にある事が判る。上式を満足する  $\xi'$  とそれに対応する  $L(\xi')$  の値を  $0 \leq \xi \leq 20$  範囲について示せば次表の如くなる。

第1表  $L_{1n}(\xi_0)$ ,  $L_{2n}(\xi_0)$  の極値

$\xi'$	$L_0$	$\xi'$	$L_{21}$	$\xi'$	$-L_{12}$	$\xi'$	$L_{22}$	$\xi'$	$-L_{22}$
1.84+0.5819		0.00+1.0000		0.00+1.0000		2.30+0.7198		1.64+0.5466	
5.33-0.3416		5.13-0.1322		3.52-0.8389		6.54-0.1893		4.85-0.6975	
8.54+0.2733		8.42+0.0645		6.87+0.6068		10.00+0.1018		8.25+0.5473	
11.71-0.2333		11.62-0.04001		10.07-0.5019		13.09-0.0673		11.54-0.4667	
14.86+0.2070		14.80+0.0279		13.25+0.4380		16.29+0.0485		14.73+0.4140	
18.02-0.1880		17.96-0.0293		16.41-0.3937		19.46-0.0372		17.91-0.3782	
				19.57+0.3607					

例へば人工振動源によつて或る種の波動を或る方向に最も能率よく發射させたいと云ふ場合に此の表は参考になると思ふ。尙、振動源として Radial, Transversal, Normal Force の孰れを使用した方が能率的であるかと云ふ問題が起るが、之に關聯し、波長が充分長い場合に於ける各波の勢力分配率が計算されてあるので参考迄に次表に掲げる。Transversal Force の  $n=0$  の場合には

第2表 波動勢力分配率 (%)

(a) 放射状剪斷力

(b) 垂直力

$n$	$P$	$S_1$	$S_2$	$L$		$n$	$P$	$S_1$	$S_2$	$L$	
0	7.11	67.44	0	25.42	%	0	2.33	86.33	0	11.34	%
1	2.47	19.38	76.41	1.74	%	1	0.51	78.73	0	20.76	%
2	1.00	9.52	85.89	3.59	%	2	0.12	68.25	0	31.63	%

註 回轉狀剪斷力の場合には  $n=0$  のとき  $S_2$  が 100 となる他は上表と同じ。

$S_2(SH)$  波の外は起らないから、波種を選ばぬ場合には之が最も能率的である。 $P$  波を使用するのは孰れの場合でも非能率的である。

尙  $P$  波の場合、 $\xi = hr_0 \sin \theta = \frac{2\pi r_0 \sin \theta}{\lambda_p}$  ( $\lambda_p$  は波長) 又  $S$  波の場合も同様な式を得るから、或る  $\theta$  の方向に對し、 $L_{1n}$  を極大(小)ならしめる  $P$  と  $S_1$  波の波長は一致する事が判る。特に地表に沿う方向では更にレーレー波のそれとも一致する。