

地形が表面振動に及ぼす影響 (II)

緩やかならざる地形

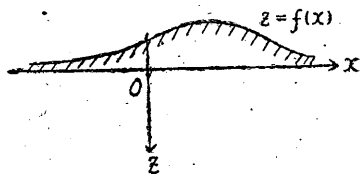
本 間 正 作*

1 緒言 先に私は地形を表はす曲線が形は任意であるが傾斜は到る處緩やかな場合に、地震波が受ける擾亂を弾性論の正しい境界条件を満たすように解き、その影響は一寸想像する程小さいものではない事を数値的例題で示した⁽¹⁾。その場合には地表の傾斜と云ふ小さい量の二次以上の量を省略したが、更に二次、三次の項も入れ逐近似法で進めて行けば、餘り緩やかで無い地勢の影響も解ける事は當然であるが、夫は大變な手数を要し、殊に數値的吟味等は全く困難な事である。

地形が緩やかと云ふ条件があてはまる場合の多い事は確かであるが、一方には随分急な地勢も少くないのであるから、その理論的解も是非欲しいので、正確な境界条件としては不満足であるが、次の様な方法を探つた。例へば平面上に山がある場合には、この山體の部分の質量を平面上に壓縮して、平面上の表面密度に置き換へておいて、その慣性力に依る表面の應力が擾亂波の源であると見做した。山體の規模が地震波の波長に比し小さい時には、さう考へても大して無理はないと思ふ。地表が一樣な場合にも表面密度を置く事は、古く E. Meissner の詳しく取扱つた處で、特に表面波に就て、種々興味ある結果を得てゐる。

2 解法 簡單のため二次元の問題に限り、 x, y 軸は水平面上に、 z 軸は鉛直下方に採る。波の射線は x, z 面内にあるとし、變位成分を (u, v, w) とす。地形曲線の方程式を $z=f(x)$ とし。この様な地形が y 軸に平行に無限に續いて居るとする。弾性體の密度を s とすると $z=0$ 面の單位面積上に載る質量は $f(x) \cdot s$ となる。 $z=0$ 面で表面應力 O と云ふ境界条件を満たす第一次波（入射波と反射波の一組とかレーレー波等）による表面の變位を (u_0, v_0, w_0) とすると、表面の慣性力の成分は $(\ddot{u}_0 \cdot f(x) \cdot s, \ddot{v}_0 \cdot f(x) \cdot s, \ddot{w}_0 \cdot f(x) \cdot s)$ となり⁽²⁾、之が表面應力 (X_z, Y_z, Z_z) として作用する爲に二次的の擾亂波が生れる。それを計算すればよいのである。

第 1 圖



扱て前回と同様に $f(x)$ は一般にフーリエの二重積分の定理に依り、

* 中央氣象臺

(1) 本誌第 12 卷, 1 號

(2) Vierteljahrsschr. Naturf. Ges. Zürich 67, (1922) 或ひは概要は B. Gutenberg, Handb. d. Geophys.

Bd. 4.

(3) $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ を $\ddot{}$ で表はした。

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\tau \int_{-\infty}^\infty f(\eta) \cos\{\tau(x-\eta)\} d\eta \dots\dots\dots(1)$$

と置けるから、初めに地形が

$$z = f(x) = \zeta \cdot \cos\{\tau(x-\eta)\} \dots\dots\dots(2)$$

の場合から掛ればよい⁽¹⁾。種々の計算は前回に詳しく述べてあるから、今回は略して結果を述べよう。

(1) P 波と SV 波の組を與へた時。

入射及び反射の P 波, SV 波の變位ポテンシアル ϕ, ψ を夫々

$$\left. \begin{aligned} \phi &= (Ae^{ikz \cos e} + Ce^{-ikz \cos e}) \cdot e^{ikx \sin e + iat}, \\ \psi &= (Be^{i\sqrt{\rho}kz \cos f} + De^{-i\sqrt{\rho}kz \cos f}) \cdot e^{ikx \sin e + iat}, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

但し
$$\rho = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}, \quad \sin e = \sqrt{\rho} \sin f, \quad \cos e = -i\sqrt{\rho \sin^2 f - 1} \dots\dots\dots(4)$$

とすれば

$$\left. \begin{aligned} C &= -\frac{(\rho \cos^2 2f - \sin 2e \cdot \sin 2f) A - \rho \sin 4f \cdot B}{\rho \cos^2 2f + \sin 2e \cdot \sin 2f}, \\ D &= -\frac{2 \sin 2e \cdot \cos 2f \cdot A + (\rho \cos^2 2f - \sin 2e \cdot \sin 2f) B}{\rho \cos^2 2f + \sin 2e \cdot \sin 2f} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5)$$

なる条件があり、又

$$\left. \begin{aligned} \ddot{u}_0 &= -ia^2 \sqrt{\rho} k \{ (A+C) \sin f + (B-D) \cos f \} \cdot e^{ikx \sin e + iat}, \\ \ddot{w}_0 &= -ia^2 k \{ (A-C) \cos e - (B+D) \sin e \} \cdot e^{ikx \sin e + iat} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6)$$

そこで

$$\frac{a^2}{k^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{s} = \frac{\rho\mu}{s}, \dots\dots\dots(7)$$

を考慮して慣性力による擾亂應力を計算すると地形曲線 (2) に對して容易に、

$$\left. \begin{aligned} \frac{X_z}{\mu} &= i\zeta k \cdot Q \cdot \{ e^{i\tau(x-\eta)} + e^{-i\tau(x-\eta)} \} \cdot e^{ikx \sin e + iat}, \\ \frac{Z_z}{\mu} &= i\zeta k \cdot R \cdot \{ \quad \quad \quad \} \cdot \quad \quad \quad \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8)$$

但し
$$\left. \begin{aligned} Q &= -\frac{\rho \cdot \sqrt{\rho} k^2}{2} \{ (A+C) \sin f + (B-D) \cos f \}, \\ R &= -\frac{\rho k^2}{2} \{ (A-C) \cos e - (B+D) \sin e \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9)$$

(1) 前の論文では之等の τ の所を p と書いて、後半に τ と書き改めたので紛れ易かつた。今回は夫を改めた。

となりこの (8) 式は前回の論文の (23) 式で $P=0$ と置いたものと同じ形式になる。(Q, R の内容は違ふが。) 従つて之による擾亂波も直ちに得られて、 P 性のものを $\phi_+ + \phi_-$ 、 S 性のものを $\psi_+ + \psi_-$ と置けば

$$\left. \begin{aligned} \phi_{\pm} &= \frac{i\xi}{\Delta(\pm\tau + k \sin e)} [-2kQ(\pm\tau + k \sin e) \cdot \chi(\pm\tau + k \sin e) \\ &\quad + \{2(\pm\tau + k \sin e)^2 - \rho k^2\} \cdot kR] \cdot e^{i\sigma(\pm\tau + k \sin e)z} \cdot e^{i(\pm\tau + k \sin e) \cdot (x-\eta) + ik\eta \sin e + iat}, \\ \psi_{\pm} &= \frac{i\xi}{\Delta(\pm\tau + k \sin e)} [\{2(\pm\tau + k \sin e)^2 - \rho k^2\} kQ \\ &\quad + 2kR(\pm\tau + k \sin e) \cdot \sigma(\pm\tau + k \sin e)] \cdot e^{iX(\pm\tau + k \sin e)z} \cdot e^{i(\pm\tau + k \sin e) \cdot (x-\eta) + ik\eta \sin e + iat} \end{aligned} \right\} \dots (10)$$

但し

$$\left. \begin{aligned} \Delta(\tau) &= 2(\tau^2 - \rho k^2)^2 + 4\tau^2\sigma(\tau) \cdot \chi(\tau) \\ \sigma(\tau) &= i\sqrt{\tau^2 - k^2}, \quad \chi(\tau) = i\sqrt{\tau^2 - \rho k^2} \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

て根號の規約は $\sqrt{\tau^2 - k^2}$ について云へば、 $|\tau| < k$ の時 $i\sqrt{k^2 - \tau^2}$ をあらはす。 周期的地形による擾亂波の性質等は前回の場合と全く同様だから省略する。

地形が (1) の如く一般な場合の擾亂振動の $z=0$ に於ける値は、

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{k}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Delta(\tau)} [\rho k^2 \cdot \chi(\tau) \cdot Q - \tau \{2\sigma(\tau) \cdot \chi(\tau) \\ &\quad + 2\tau^2 - \rho k^2\} R] d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) \cdot e^{i\tau(x-\eta) + ik\eta \sin e + iat} d\eta, \\ w &= \frac{k}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Delta(\tau)} [\tau \{2\sigma(\tau) \cdot \chi(\tau) + 2\tau^2 - \rho k^2\} Q \\ &\quad + \rho k^2 \cdot \sigma(\tau) R] d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) \cdot \quad \quad \quad d\eta. \end{aligned} \right\} \dots (12)$$

これは楕圓軌道の方程式になる。

(2) SH 波を與へた時。

入射波の反射波の變位は

$$\begin{aligned} v &= e^{i\sqrt{\rho}k(z \cos f + x \sin f) + iat} + e^{-i\sqrt{\rho}k(z \cos f - x \sin f) + iat} \dots (13) \\ \ddot{v}_0 &= -a^2 \cdot 2e^{i\sqrt{\rho}kx \sin f + iat} \end{aligned}$$

(2) の様な地形に對する擾亂應力は、 (7) を考慮して、

$$\frac{Y_z}{\mu} = +\xi \rho k^2 \{e^{i\tau(x-\eta)} + e^{-i\tau(x-\eta)}\} e^{i\sqrt{\rho}kx \sin f + iat} \dots (14)$$

之は前の論文の (29) 式で係數中の f を 0 と置いたものと一致するから、 擾亂波は容易に求まり、

$$\left. \begin{aligned} v &= v_+ + v_-, \\ v_{\pm} &= \frac{-i\xi \rho k^2}{\chi(\pm\tau + \sqrt{\rho}k \sin f)} \cdot e^{iX(\pm\tau + \sqrt{\rho}k \sin f)z + (\pm\tau + \sqrt{\rho}k \sin f) \cdot (x-\eta) + i\sqrt{\rho}k\eta \sin f + iat} \end{aligned} \right\} \dots (15)$$

地形を一般化すると、 表面に於ける擾亂振動は、

3 数値計算の例.

この前の論文ではラブ波の場合を取扱はなかつたが、茲では数値計算の例としてラブ波の受ける影響を取扱つて見よう.

ラブ波は分散性のものであるから一定の振動周期でも表面構造の差により種々の速度を持ち夫に依つて影響の受け方が違ふ. 茲では簡単の爲に表面層が波長に對し相當の厚さを有する爲、ラブ波の位相速度は、殆ど表面層内の S 波の速度と同じである様な特別な場合を考へる. 之は SH 波が殆ど表面に平行に入射した時、反射波と組合つて作る波動と見做せるから、斯様なラブ波の變位は (13) で角 $f = \frac{\pi}{2}$ と置いて得られ、従つて擾亂の表面に於ける値は (16) で與へられる. 尤も一次波の振幅は 2 となるから、之を 1 にとれば一次波 v 及び擾亂の表面に於ける値 v' は

$$v = \Re e^{t(kx+at)} \dots \dots \dots (24)$$

$$v' = \Re \frac{l^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2 - l^2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) \cdot e^{t\tau(x-\eta) + il\eta + iat} d\eta \dots \dots \dots (25)$$

但し $\frac{2\pi}{l}$ は振動數 a なるラブ波の波長で今の場合 $\sqrt{\rho k}$ に殆ど等しい.

地形曲線を

$$z = f(x) = \begin{cases} \frac{-H}{m-n} \{me^{-nx} - ne^{-mx}\}, & (x < 0) \\ \frac{-H}{m-n} \{me^{nx} - ne^{mx}\}, & (x > 0) \end{cases} \dots \dots \dots (26)$$

とすると、 $\frac{m}{l} = 2, \frac{n}{l} = 1$ の時⁽¹⁾ 山頂 $x=0$ に於ける (25) の値は

$$v'_{x=0} = -6.21 \frac{H}{L} W \cos(at - 49^\circ 19') \dots (27)$$

となる. 但し L は一次ラブ波の波長 $\frac{2\pi}{l}$, W はその振幅, 第 2 圖に振動の受ける影響を $\frac{H}{L} = \frac{1}{30}$ として描いてある.

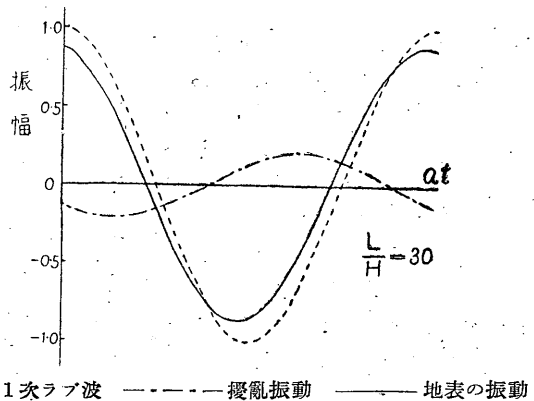
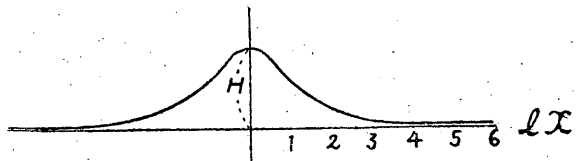
谷底の擾亂は方向が逆になるから山頂と谷底では最大振幅で 3 割位も違ふ.

次の計算の要旨を示す.

先づ (25) の η に関する積分は前回計算した通り

$$-2mn(m+n)H \frac{e^{t(\tau x + at)}}{[(\tau - l^2) + m^2][(\tau - l)^2 + n^2]}$$

第 2 圖



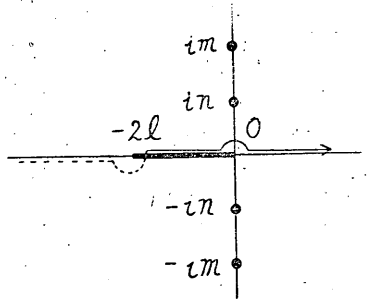
(1) 前の論文でレーレー波の受ける影響を調べた時と同じ假定をした.

となる。従つて $\tau - l = p$ とおけば

$$v' = -\frac{Hmn(m+n)l^2}{\pi} \Re \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{tpx}}{(p^2+m^2)(p^2+n^2)\sqrt{p(p+2l)}} dp \cdot e^{t(x+at)}$$

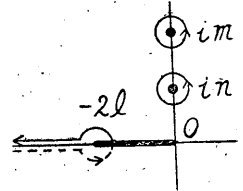
この積分に於て p の複素平面上的の特異點は $p = \pm im, \pm in$ の 4 つが單極で $p=0, -2l$ の 2 つが分枝點でこの間に cut がある。 $p > 0$ で實數の時、 p 及び $p+2l$ の偏角を 0 と採る時、先に述べた根號の約束⁽²⁾に従ふ爲には積分路を第 3 圖の如く採ればよい。 $x \geq 0$ の時はこの積分路を變形して第 4 圖の様に 2 つの單極 im, in の周圍の積分と、 $-\infty$ から $-2l$ 迄、 $-2l$ を巻く小圓、 $-2l$ より $-\infty$ 迄の積分とに分けられ、前者は留數の定理で簡單に求まる。後者の中小圓上の積分は小圓の半徑と共に 0 となり二つの直線上の積分は互に等しく成つて結局、

第 3 圖



$$v' = -\frac{Hmn(m+n)l^2}{\pi} \Re \left[2\pi i \operatorname{Res} \left\{ \frac{e^{tpx}}{(p^2+m^2)(p^2+n^2)\sqrt{p(p+2l)}} \right\}_{p=im} \right. \\ \left. + 2\pi i \operatorname{Res} \left\{ \frac{e^{tpx}}{(p^2+m^2)(p^2+n^2)\sqrt{p(p+2l)}} \right\}_{p=in} \right. \\ \left. + 2 \int_{-\infty}^{-2l} \frac{e^{tpx}}{(p^2+m^2)(p^2+n^2)\sqrt{p(p+2l)}} dp \right] \cdot e^{t(x+at)}$$

第 4 圖



$p = -\xi^2 - 2l$ において變數を ξ に直ほし、更に

$$\xi_1 = \frac{\xi}{\sqrt{l}}, \quad m_1 = \frac{m}{l}, \quad n_1 = \frac{n}{l}$$

と置けば、最後の積分は

$$2 \int_{-\infty}^{-2l} = \frac{4e^{-4lx}}{l^4} \int_0^{\infty} \frac{e^{-2l\xi_1^2}}{[(\xi_1^2+2)^2+m_1^2][(\xi_1^2+2)^2+n_1^2]\sqrt{\xi_1^2+2}} d\xi_1$$

この被積分函数は ξ_1 と共に極めて急劇に減小するもので、 \int_0^{∞} を \int_0^2 で置き換へても、 $x=0$ に對しては $\frac{1}{1000}$ の精度を持つてゐる。従つて數値積分も割合案に出来る。

斯くして

$$v' = -\frac{Hlm_1n_1(m_1+n_1)}{\pi} \{0.2839 \cos at + 0.3924 \sin at + 0.05350 \cos at\}$$

となる。初めの二項は單極より來るもので、最後の項は分枝點から來るものであるが後者には位相の遅れがなく、振幅はずつと小さい。この式より (27) が出る、

(1) p. 19 参照

4 結言. 地表附近の水平不均質に依る地震動の擾亂及び地震波勢力逸散に関する研究の一部として、地形が緩やかでないが、餘り大きいスケールのものでない場合の一つの取扱ひ方を提示し、種々の場合に就て解式を求めた。解式は前回求めた地形の緩やかな場合と殆ど同じ形式なので非常に樂に求めることが出來た。擾亂波が勢力逸散を行ふ事等も前回同様である。一例として山脈を横切るラブ波の受ける影響を調べた結果、擾亂動の振幅と一次波の夫の比は山の高さの約 6 倍と波長の比に等しく、擾亂動は位相の後れがある事が分つた。即ち前回の場合と同様に影響は可成り大きいものであると云ふ事が出來る。

終りに臨み、平生御指導御鞭撻頂く本多博士及び本臺地震課の諸氏及び計算や製圖に助力下さつた鈴木、高見兩嬢に深甚の謝意を表する次第である。

(昭和 16 年 6 月, 於 中央氣象臺)