

軟地盤の荷重に依る沈下に就て

廣野卓藏

§ 1. 緒言

東京市の所謂江東方面の地盤が比較的軟性である事は夙くから一般の注意を引いて居る所である。此の土地の軟性に原因する一現象として屢々挙げられるのは鐵筋コンクリート建築の如き荷重の大なる建築物に多く見られる多少の沈下である。

一體に木造建築の如き荷重の小なるもののその地盤に及ぼす應力の影響は地盤の強度 (Strength) より小さなものであるから其れに因る地盤の變形は彈性的變形に止まつて沈下の現象は起らぬと考へられる。併しコンクリート建築の如き荷重の大なるものでは、地盤に及ぼす應力はその強度を越える事があり得る。若し越えればそれに因つて生ずる地盤の變形も勢ひ可塑性的變形となり沈下を開始する。而して土地は可塑性的變形をなしつゝ或は内部應力が其の強度より少となる状態に到達し得るやも知れない。そうなれば土地の可塑性的變形は即座に停止する。

今少し詳しく考へれば、一個の重量の荷重に依つて地盤が可塑的になるにしてもそれは荷重の在る附近の一部分にのみ限られ、荷重から充分離れたる場所では未だ可塑的になつて居ない。併し荷重の附近が次第に可塑性變形をなして行くうちには地下の應力分布も次第に變化し或は其迄に可塑性でなかつた部分も次第に可塑性となつて新しい變形をなし始めるかも知れない。斯の如く可塑性にはその發生とその傳播とが考へられ之等は夫々重要な問題を呈供して居る。

又實際には、軟地盤の下部には必ず之に比して不動とも考へらるべき可塑性的變形を行はな地層がある。例へば江東方面に於ては地下約 40 米に第三期層がある様に。此の岩盤が如何に上述の問題に影響を及ぼすかに就ても考へなくてはならない。

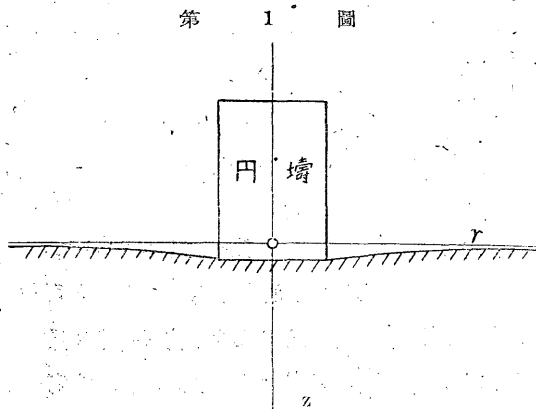
以上の如く事情は極めて複雑して居て到底一時に其の理論を盡す事は出來な

い。そこで此の現象を取扱ふに際して先ず最も簡単な模型的な場合から始める事にする。

簡単な爲に地盤は終始等質完全可塑性 (Elasticoviscous) になつて居ると假定しその半無限體の上に荷重が載つて居り之が自重の爲に次第に沈下する状態を考へる。而して其運動は準平衡 (Quasi-equilibrium) 的に行はれるものと考へる。此の際使用する方程式は著者が先に粘弾性波を論じた際に使用した波動方程式より加速度の項を取つたもの即平衡型である。(1) 之を用ふる時は可塑性媒質に於ける數學的取扱は二段に分ける事が出来る。其の第一段は考ふる媒質が完全弾性體であるとして釣合の問題を解く事、第二段は第一段に於て得たる解の中の剛性率 μ の代りに $\frac{\mu}{1+\mu'(\frac{\partial}{\partial t})^{-1}}$ を入れて更に生じた方程式を解く事、之である。こゝに μ' は可塑性係數であり $(\frac{\partial}{\partial t})^{-1}$ は $\int dt$ を意味する。(1) 但し第二段に於て得た解はその變形が第一段に於て入れた境界條件を餘り亂さない限り成立するものである。従つて此處に論ずる變形の議論も之の範圍内に止めておくが、實際問題としては之にて充分であらうと思ふ。

§ 2. 圓壙形建築物に依る軟地盤の沈下

簡単な爲に地盤は半無限等質可塑性體であるとする。此の水平なる地表面上



に断面半径 a にして密度一様で重量が W なる直截圓壙形の建築物が直立して居るとする。地表面に r, θ , 圓壙の軸に沿うて鉛直下に z 軸を取る様な圓壙座標系 (r, θ, z) を考へる (第 1 圖参照)。此の荷重に依る土地の變位の z, r 方向の成分を

(1) 粘弾性波に就て (II) 氣象集誌 13, 512 頁 (1935).

w, q とすると土地が完全弾性體ならばこれらの値は⁽¹⁾

$$w = \frac{W}{4\pi a \mu} \int_0^\infty z e^{-mz} J_0(mr) \sin am \, dm + \frac{W(\lambda+2\mu)}{4\pi a \mu(\lambda+\mu)} \int_0^\infty e^{-mz} J_0(mr) \frac{\sin ma}{m} \, dm \dots\dots\dots (1)$$

$$q = \frac{W}{4\pi a \mu} \int_0^\infty z e^{-mz} J_1(mr) \sin am \, dm - \frac{W}{4\pi a(\lambda+\mu)} \int_0^\infty e^{-mz} J_1(mr) \frac{\sin ma}{m} \, dm \dots\dots\dots (2)$$

特に地表面の變位は上式で $z=0$ において

$$\left. \begin{aligned} w_0 &= \frac{\lambda+2\mu}{8\mu(\lambda+\mu)} \frac{W}{a} \\ q_0 &= -\frac{W}{4\pi(\lambda+\mu)a} \frac{a-\sqrt{a^2-r^2}}{r} \end{aligned} \right\} [r < a] \dots\dots\dots (3)$$

$$\left. \begin{aligned} w_0 &= \frac{\lambda+2\mu}{8\mu(\lambda+\mu)} \frac{W}{a} \frac{2}{\pi} \frac{\sin^{-1} \frac{a}{r}}{r} \\ q_0 &= -\frac{W}{4\pi(\lambda+\mu)a} \frac{a}{r} \end{aligned} \right\} [r > a] \dots\dots\dots (4)$$

となる。土地が可塑性的状態にあれば上式で μ の代りに $\frac{\mu}{1+\mu'D^{-1}}$ を入れる。

こゝに D^{-1} は $\int_0^t dt$ を意味する。斯う置くと、(3) 式の上の式から

$$\left(1 + \frac{\mu}{\lambda} + \mu'D^{-1}\right) w_0 = \left\{1 + \frac{2\mu}{\lambda} + 2\left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\right) \mu'D^{-1} + \mu'^2 D^{-2}\right\} \times \frac{W}{8\mu a} \dots\dots\dots (5)$$

或は $\left\{\left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\right) D + \mu'\right\} w_0 = \left\{2\left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\right) \mu' + \mu'^2 D^{-1}\right\} \frac{W}{8\mu a} \dots\dots\dots (6)$

或は $D \left\{\left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\right) D + \mu'\right\} w_0 = \frac{\mu'^2 W}{8\mu a} \dots\dots\dots (7)$

(5), (6) を満足する (7) の解は

$$w_0 = \frac{W}{8a} \left\{ \frac{\lambda+\mu}{\lambda\mu} - \frac{\mu}{\lambda(\lambda+\mu)} e^{-pt} + \frac{\mu'}{\mu} t \right\} [r < a] \dots\dots\dots (8)$$

こゝに $p = \frac{\lambda\mu'}{\lambda+\mu}$ である。同様にして

(1) H. Lamb: Pro. Lon. Math. Soc. 34 (1901).

$$q_0 = -\frac{W}{4\pi\lambda a} \frac{a - \sqrt{a^2 - r^2}}{r} \left(1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-r^2/a^2}\right) [r < a] \dots\dots\dots (8')$$

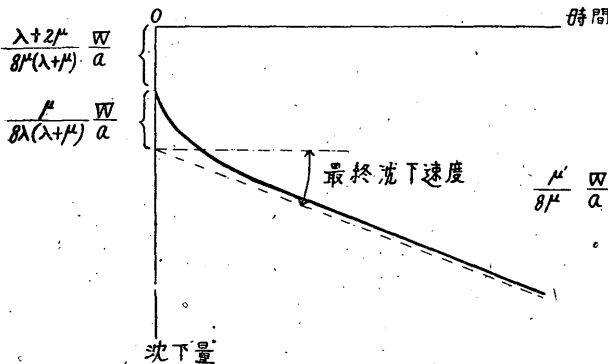
$$\left. \begin{aligned} w_0 &= \frac{W}{8a} \frac{2}{\pi} \sin^{-1} \frac{a}{r} \left\{ \frac{\lambda + \mu}{\lambda \mu} - \frac{\mu}{\lambda(\lambda + \mu)} e^{-r^2/a^2} + \frac{\mu'}{\mu} t \right\} \\ q_0 &= -\frac{W}{4\pi\lambda a} \frac{a}{r} \left(1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-r^2/a^2}\right) \end{aligned} \right\} [r > a] \dots\dots\dots (9)$$

(8), (9) 式に依れば土地の變形は $t=0$ の時は完全弾性的變形に一致する。
 $t=0$ に荷重を地上に置くと同時に土地は直ちに釣合の状態に變形するであらうがそれには多少の時間を要する事勿論である。併し充分短かいのでその間に可塑的變形は殆んどないとしてよい。此の考が計算過程に這入つてゐるから上の結果が出たのである。

諸、最初の完全弾性的變形により地表は多少凹むと同時に中心に引き附けられる。其程度は $a=r$ に於て最大で之より離れるに従つて小となり中心及び充分遠方に於て 0 となる。次の瞬間から可塑性の爲にまず水平變位は指數函数的に、更に中心に引き込まれつつ一定値に漸近する。

指數は μ' に比例するが、變位の漸近値は μ' には無關係で彈性定數によつてのみ定まる。此の間垂直變位は水平變位と同じく指數函数的に最初比較的速に沈下するもその速度は漸次一定値に近づく。指數函数的部分は水平變位の場合と同じく、指數は μ' に比例するがその係數は彈性定數によつてのみ定まる。

第 2 圖 圓塙底部の沈下



然るに最終沈下速度は μ' 及び荷重質量に比例し、其の半径 a 及び剛性率 μ に反比例する。

第 2 圖は(8)により圓塙底部の沈下の状態を示す。

之は、山口博士が加重の永久沈下の状態として示した

ものと一致する。⁽¹⁾

次に應力の状態を調べる。沈下の可能性及持続性を判断するに缺く可からざるものであるからである。

圓塙座標の場合の應力成分と變位との關係は次式で表はせる。

$$\left. \begin{aligned} \widehat{rr} &= \lambda\Delta + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} & \widehat{\theta z} &= \mu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right\} \\ \widehat{\theta\theta} &= \lambda\Delta + 2\mu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right\} & \widehat{zr} &= \mu \left\{ \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right\} \\ \widehat{zz} &= \lambda\Delta + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} & \widehat{r\theta} &= \mu \left\{ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right\} \end{aligned} \right\} (10)$$

$$\Delta = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \dots \dots \dots (11)$$

但し u_r, u_θ, u_z は變位の成分で今の場合 $u_r = q, u_\theta = 0, u_z = w$ である。(1),

(2) を入れると

$$\widehat{rr} = \frac{W}{2\pi r} \int_0^\infty e^{-mz} \frac{dJ_1(mr)}{dmr} (mz-1) \sin ma \, dm$$

$$- \frac{W\lambda}{2\pi a(\lambda+\mu)} \int_0^\infty e^{-mz} \frac{J_1(mr)}{mr} \sin ma \, dm \dots \dots \dots (12)$$

$$\widehat{\theta\theta} = \frac{W}{2\pi a} \int_0^\infty e^{-mz} \frac{J_1(mr)}{mr} (mz-1) \sin ma \, dm$$

$$- \frac{W\lambda}{2\pi a(\lambda+\mu)} \int_0^\infty e^{-mz} \frac{dJ_1(mr)}{dmr} \sin ma \, dm \dots \dots \dots (13)$$

$$\widehat{zz} = -\frac{W}{2\pi a} \int_0^\infty e^{-mz} J_0(mr) (mz+1) \sin ma \, dm \dots \dots \dots (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \widehat{\theta z} &= 0 \\ \widehat{rz} &= -\frac{W}{2\pi a} \int_0^\infty mz e^{-mz} J_1(mr) \sin ma \, dm \dots \dots \dots (15) \\ \widehat{r\theta} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\Delta = -\frac{W}{2\pi a(\lambda+\mu)} \int_0^\infty e^{-mz} J_0(ma) \sin ma \, dm \dots \dots \dots (16)$$

可塑性の場合には更に μ の代りに $\frac{\mu}{1+\mu/D-1}$ とおいて計算するのであるが、さしあたり上式から判る事は $\widehat{zz}, \widehat{zr}$ が可塑性には無關係に常に一定である事である。 \widehat{rr} 及び $\widehat{\theta\theta}$ の第 1 項の積分を S_1, S_2 第 2 項の積分を T_1, T_2 とする

(1) 岩波全書, 土の力學. 139 頁

と可塑性の場合は、

$$\widehat{r}r = \frac{W}{2\pi a} \left(S_1 - T_1 + \frac{\mu e^{-pt}}{\lambda + \mu} T_1 \right) \dots\dots\dots (17)$$

$\widehat{\theta}\theta$ を得るには上の $S_1 T_1$ の代りに $S_2 T_2$ を入れればよろしい。

即ち $\widehat{r}r$ と $\widehat{\theta}\theta$ は一定値に漸近する。應力で今重要なのは加重底に於ける値である。元來沈下の起るのは加重底に於ける應力差 (Stress difference) が土地の強度を突破して初めてそれが可塑性を現はす爲である。そこで今加重底の應力差を吟味する。

加重底では $z=0$ $r < a$ であり、主應力は明に $\widehat{r}r$ $\widehat{\theta}\theta$ $\widehat{z}z$ である。この場合

$$\left. \begin{aligned} -S_1 = T_2 &= \int_0^\infty \frac{dJ_1(mr)}{dmr} \sin ma \, dm \\ -S_2 = T_1 &= \int_0^\infty \frac{J_1(mr)}{mr} \sin ma \, dm \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

Gray & Mathews の Bessel Function 76 頁例題より

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2\sqrt{a^2-r^2}} \left[1 - \frac{1}{r^2} \{a - \sqrt{a^2-r^2}\}^2 \right] = \frac{1}{r^2} (a - \sqrt{a^2-r^2}) \\ T_2 &= \frac{1}{2\sqrt{a^2-r^2}} \left[1 + \frac{1}{r^2} \{a - \sqrt{a^2-r^2}\}^2 \right] = \frac{a}{r^2\sqrt{a^2-r^2}} (a - \sqrt{a^2-r^2}) \end{aligned} \right\} (r < a) \dots\dots\dots (19)$$

孰れも正である。故に尠なくとも圓塙の底面では $\widehat{r}r$ $\widehat{\theta}\theta$ の負の應力は増加しつつある。即ち

$$\left. \begin{aligned} \widehat{r}r &= \frac{W}{2\pi a} \left\{ -\frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \frac{1}{r^2} (a - \sqrt{a^2-r^2}) e^{-pt} \right\} \\ \widehat{\theta}\theta &= \frac{W}{2\pi a} \left\{ -\frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \frac{a}{r^2\sqrt{a^2-r^2}} (a - \sqrt{a^2-r^2}) e^{-pt} \right\} \\ \widehat{z}z &= -\frac{W}{2\pi a} \frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

上式を見ると t が ∞ に近くに從つて等しく

$$\widehat{r}r = \widehat{\theta}\theta = \widehat{z}z = -\frac{W}{2\pi a} \frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}}$$

に漸近する。換言すれば静水壓に近づく。之は非常に重要な意味を有する。故ならば、静水壓と云ふのは應力差が零の状態であるから必ずやその前に土地の強度が應力差より大になる時が来る。それは沈下の停止を意味する。即ち應

力状態が静水圧に近づくとは必ずその内に沈下が停止する時が来る事を意味する。

$$(20) \text{ より明に } |\widehat{rr}| > |\widehat{\theta\theta}|$$

故に應力差として $\widehat{rr} - \widehat{zz}$ を考へてよろしい。即ち

$$\widehat{rr} - \widehat{zz} = \frac{W\lambda}{2\pi a(\lambda + \mu)r^2} (a - \sqrt{a^2 - r^2}) e^{-pt} \dots\dots\dots (21)$$

故に土地の強度を F とすれば

$$F > \frac{W\lambda}{2\pi a^2(\lambda + \mu)} \approx \frac{W}{4\pi a^2} \quad (\because \lambda \approx \mu)$$

ならば沈下は起らない。可塑性と云ふものは土地の強度が破壊されて初めて起ると考へられるからである。

$$F < \frac{W}{4\pi a^2}$$

ならば沈下が起る。そして大體 $F = \frac{W}{4\pi a^2} e^{-pt}$ 即ち $t = \frac{1}{p} \log \frac{W}{4\pi a^2 F}$ で一旦沈下が止まる。

荷重底で應力差が最大と考へられるから沈下の判定は叙上で充分と思ふ。又地中でも主應力が静水圧に近づかんとしてゐる事が類推される。

扱、我々が此の議論に於て用ひた粘弾性の根本の考は應力 P とそれによる變位 E とが

$$\mu E = P + \int_{t_1}^1 P dt \dots\dots\dots (22)$$

なる關係にあるとするものである。(之を *Elastico-Viscosity* 弾性粘性とも云ふ) 粘弾性で今一つの P と E との基本關係が考へられる。それは

$$P = \mu \left(1 + t_2 \frac{d}{dt} \right) E \dots\dots\dots (23)$$

所謂固體粘性 (*Fermo-Viscosity*) の場合である、之を用ひて妹澤博士其他が地震波等を論じた事は周知である。所で我々の今の問題で土地が固體粘性的なものであると假定すればどうなるだらうか、今の場合と異り恐らく沈下は指數函数的に一定値に轉近して止まるであらう。之は次號に於て改めて説明するつも

拙著、粘弾性波に就て (II) 氣象集誌 13. 512 頁 1935 参照。

りである。所で粘弾性とは P と E とのフックの法則的關係が時間的に變化するものと解釋するかぎり、第1近似に於てその關係を求むる時には上掲の固體粘性と弾性體粘性の二關係を得るのみで他に關係はあり得ない。尤も二つの場合が同時に起る

$$\mu \left(E + t_2 \frac{dE}{dt} \right) = P + \frac{1}{t_2} \int P dt \dots \dots \dots (24)$$

なる關係は論外である。とにかく荷重沈下の實際問題としても、上記二種類の經過が區別されてゐる様である。

§ 3. 結 論

可塑性（弾性體粘性）を有する半無限弾性體の上に密度が一樣な圓壘狀の物體が置かれた時に如何にそれが沈下して行くかを調べた。その結果は、

(1) 物體の沈下量を w_0 とすれば之は 8 式で與へられる。即ち、最初、完全弾性體の場合の位置から始まつて、指數函數的に始めは急に沈下し、後除々に一定の速度で沈下する様になる。

(2) 併し土地の強度 F を考へると、 $F > \frac{W}{4\pi a^2}$ ならば沈下は始めから起らない。 $F < \frac{W}{4\pi a^2}$ の時に初めて沈下が起る。そして $t \approx \frac{1}{P} \log \frac{W}{4\pi a^2}$ 時間たつと一旦止まる。コンクリートの建築物は木造のそれよりも沈下する可能性が大きく、沈下もあまり繼續しないで停止するらしいが、上の理論の結果も同様の傾向を示す。

(3) 沈下に伴ふ地中の物質の移動は地中の應力分布を靜水壓のそれにならしめんとする様な仕方で起る。(2)の結果は之から出たものである。

附 録

I 沈下に伴ふ地下物質の移動

(1) (2) より、土地が可塑性の状態にある時の解は

$$w = \left(\frac{P_1}{\lambda} + \frac{P_1 + P_2}{\mu} \right) \frac{\mu P_1}{\lambda(\lambda + \mu)} e^{-\mu t} + \frac{\mu'}{\mu} (P_1 + P_2) t \dots \dots \dots (25)$$

$$q = -\left(\frac{Q_1}{\lambda} - \frac{Q_2}{\mu}\right) + \frac{\mu Q_1}{\lambda(\lambda + \mu)} e^{-\lambda t} + \frac{\mu'}{\mu} Q_2 t \dots\dots\dots(26)$$

こゝに

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \frac{W}{4\pi a} \int_0^\infty e^{-mt} J_0(mr) \frac{\sin ma}{m} dm, P_2 = \frac{W}{4\pi a} \int_0^\infty z e^{-mz} J_0(mr) \sin ma dm \\ Q_1 &= \frac{W}{4\pi a} \int_0^\infty e^{-mz} J_1(mr) \frac{\sin ma}{m} dm, Q_2 = \frac{W}{4\pi a} \int_0^\infty z e^{-mz} J_1(mr) \sin ma dm \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(27)$$

まず P, Q の値を求める。G. & M. の Bessel Function 64 頁より

$$\int_0^\infty e^{-\alpha m} J_0(\beta m) dm = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \dots\dots\dots(28)$$

但し $R(\alpha \pm i\beta) \geq 0$ 又 $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ は $\beta=0$ のとき α なる如くとる。

$\alpha = z - ia, \beta = r$ とおくと

$$\int_0^\infty e^{-mz} e^{im\alpha} J_0(mr) dm = \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - ia)^2}} \dots\dots\dots(29)$$

之から

$$P_2 = \Im \frac{W}{4\pi a} \frac{z}{\sqrt{r^2 + (z - ia)^2}} \dots\dots\dots(30)$$

(29) を z について 0 から z まで積分する事により

$$\frac{4\pi a}{W} P_1 = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & r < a \\ \sin^{-1} \frac{a}{r} + \Re \left(\sin^{-1} \frac{zi+a}{r} - \sin^{-1} \frac{a}{r} \right) & r > a \end{cases}$$

即ち $P_1 = \Re \frac{W}{4\pi a} \frac{\sin^{-1} \frac{zi+a}{r}}{r} \dots\dots\dots(31)$

(31) を r で微分する事により

$$Q_2 = \Re \frac{W}{4\pi a} \frac{z(zi+a)}{r\sqrt{r^2 - (zi+a)^2}} \dots\dots\dots(32)$$

(32) を z に就て 0 から z まで積分する事により

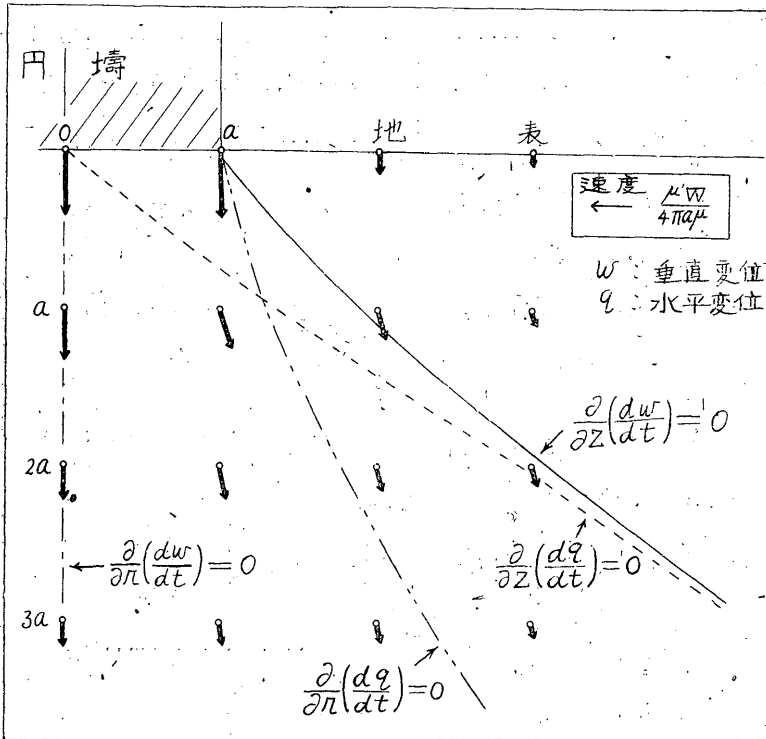
$$\frac{4\pi a}{W} Q_1 = \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{r} (a - \sqrt{a^2 - r^2}) \\ &\frac{a}{r} - \frac{az}{r\sqrt{r^2 - a^2}} + \Re \left\{ \frac{az}{r\sqrt{r^2 - a^2}} + \left[\frac{1}{ri} \sqrt{ri - (zi+a)^2} \right]_0^z \right\} \end{aligned} \right\} \begin{cases} r < a \\ r > a \end{cases}$$

即ち

$$Q_1 = \frac{W}{4\pi ar} \left\{ a - \Im \sqrt{r^2 + (z+ia)^2} \right\} \dots \dots \dots (33)$$

以上の積分値に於て \Re, \Im はそれぞれ実数部及び虚数部を取る事を意味する。
 扱(25), (26) 式の第 1, 2 項は何れ一定値に収まるものであつて、物質の究極の移動は第 3 項のみで表はせる。次に此の項を計算して第 3 圖に圖示する。

第 3 圖 地中の最終物質移動速度分布



P_1, P_2, Q_2 表

$r \backslash z$	0	a	2a	3a
1.570	1.570	0.524	0.340	
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

$z \backslash r$	0	a	2a	3a
a	0.785 0.500 0.000	0.666 0.373 0.229	0.545 0.109 0.176	0.318 0.030 0.098
2a	0.486 0.400 0.000	0.451 0.345 0.142	0.440 0.181 0.159	0.279 0.158 0.138
3a	0.323 0.297 0.000	0.305 0.264 0.013	0.313 0.188 0.119	0.239 0.119 0.113

註), 3筒1組の値は 1行目 $\frac{2\pi a}{W}P_1$, 2行目 $\frac{2\pi a}{W}P_2$, 3行目 $\frac{2\pi a}{W}Q_2$ を示す。

Q_2 が常に正である事は容易に証明する事が出来る。即、物質の流れは常に外向き、外部に流れ出す事を示し、対流をなさない。

II. ある深さに岩盤がある場合の形式的解

直角座標で表はした変位を u, v, w とすると弾性体の釣合の式は

$$\nabla^2 u = -\frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \nabla^2 v = -\frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial \theta}{\partial y}, \quad \nabla^2 w = -\frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (34)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \theta, \quad \nabla^2 \theta = 0 \quad \dots \dots \dots (35)$$

圓筒座標 (r, ω, z) を考へ變位は中心に對して對稱とすると $u = q \cos \omega$, $v = q \sin \omega$ とかける。 $\nabla^2 \theta = 0$ より

$$\theta = Ae^{-mz} J_0(mr) + A'e^{mz} J_0(mr) \quad \dots \dots \dots (36)$$

(36) を (34) に入れて、圓筒座標に直すと

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\lambda + \mu}{\mu} m(Ae^{-mz} - A'e^{mz}) J_0(mr)$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial q}{\partial r} - \frac{q}{r^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} = -\frac{\lambda + \mu}{\mu} m(Ae^{-mz} + A'e^{mz}) J_0'(mr)$$

此處で $w \propto J_0(mr)$, $q \propto J_1(mr)$ とおくと、その z の函數部分 w^1, q^1 は

$$\frac{d^2 w^1}{dz^2} - m^2 w^1 = \frac{\lambda + \mu}{\mu} m(Ae^{-mz} - A'e^{mz})$$

$$\frac{d^2 q^1}{dz^2} - m^2 q^1 = \frac{\lambda + \mu}{\mu} m (Ae^{-mz} + A'e^{mz})$$

を満足しなければならない。故に B, B', C, C' を任意常數とすると

$$\left. \begin{aligned} w &= \left\{ -\frac{\lambda + \mu}{2\mu} z (Ae^{-mz} + A'e^{mz}) + \frac{1}{m} (Be^{-mz} + B'e^{mz}) \right\} J_0(mr) \\ q &= \left\{ -\frac{\lambda + \mu}{2\mu} z (Ae^{-mz} - A'e^{mz}) + \frac{1}{m} (Ce^{-mz} + C'e^{mz}) \right\} J_1(mr) \end{aligned} \right\} \dots (37)$$

尙 (35) 即ち $r^2 \theta = 0$ を上の式は満足しなければならない。但し圓塙座標でかくと

$$\theta = \frac{\partial q}{\partial r} + \frac{q}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

然る時は

$$\frac{\lambda + 3\mu}{2\mu} A = C - B \quad \frac{\lambda + 3\mu}{2\mu} A' = C' + B' \dots \dots \dots (38)$$

なる關係がある。又 $z = T$ で $w = 0, q = 0$ (深さ T なる軟地盤の底部で物質が動かない) とすると

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\lambda + \mu}{2\mu} T (Ae^{-mT} + A'e^{mT}) + \frac{1}{m} (Be^{-mT} + B'e^{mT}) &= 0 \\ -\frac{\lambda + \mu}{2\mu} T (Ae^{-mT} - A'e^{mT}) + \frac{1}{m} (Ce^{-mT} + C'e^{mT}) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (39)$$

次に地表では $\widehat{z}z$ が與へられ $\widehat{z}r$ が 0 であるとする。

$$\widehat{z}z = \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \quad \widehat{z}r = \mu \left(\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right)$$

に (39) を入れると

$$\begin{aligned} \widehat{z}z &= \left(\{ [\lambda + m(\lambda + \mu)z - (\lambda + \mu)] A - 2\mu B \} e^{-mz} \right. \\ &\quad \left. + \{ [\lambda - m(\lambda + \mu)z - (\lambda + \mu)] A' - 2\mu B' \} e^{mz} \right) J_0(mr) \\ \widehat{z}r &= \left(\left\{ \frac{\lambda + \mu}{2} (-1 + 2mz) A - \mu (B + C) \right\} e^{-mz} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{\lambda + \mu}{2} (1 + 2mz) A' - \mu (B' - C') \right\} e^{mz} \right) J_1(mr) \end{aligned}$$

故に $(zz)_{z=0} = PJ_0(mr)$ $(zr)_{z=0} = 0$ をおくと

$$\left. \begin{aligned} A + A' + 2(B - B') &= -\frac{P}{\mu} \\ \frac{\lambda + \mu}{2}(A - A') + B + B' + C - C' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (40)$$

次に

$$\left. \begin{aligned} A + A' &= L & A - A' &= L' \\ B + B' &= M & C + C' &= N \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (41)$$

とおくと (38) ~ (41) から

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{\lambda + \mu}{2\mu} mT \cosh mT + \frac{1}{2} \operatorname{snih} mT\right)L \\ &\quad + \left(\frac{\lambda + \mu}{2\mu} mT \operatorname{snih} mT - \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} \operatorname{cosh} mT\right)L' = -\frac{P}{2\mu} \operatorname{sinh} mT \\ &\left(\frac{\lambda + \mu}{2\mu} mT \operatorname{sinh} mT + \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} \operatorname{cosh} mT\right)L \\ &\quad - \left(\frac{\lambda + \mu}{2\mu} mT \operatorname{cosh} mT + \frac{1}{2} \operatorname{sinh} mT\right)L' = \frac{P}{2\mu} \operatorname{cosh} mT \end{aligned}$$

之を解くと

$$\left. \begin{aligned} L &= \frac{P}{2\mu} \left(\frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} \operatorname{cosh}^2 mT + \frac{1}{2} \operatorname{sinh}^2 mT\right) / \Delta \\ L' &= \frac{P}{2\mu} \left(-\frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} mT + \frac{\lambda + 3\mu}{4\mu} \operatorname{sinh} mT\right) / \Delta \\ \Delta &= \left(\frac{\lambda + \mu}{2\mu} mT\right)^2 - \frac{1}{4} \operatorname{sinh}^2 mT + \left(\frac{\lambda + 2\mu}{2\mu}\right)^2 \operatorname{cosh}^2 mT \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (42)$$

掘地表では (37), (38) 等から

$$w = \frac{1}{m} M J_0(mr), \quad q = \frac{1}{m} N J_1(mr)$$

即ち, $w = -\frac{\lambda + 2\mu L'}{2\mu m} J_0(mr), \quad q = \frac{1}{m} \left(\frac{\lambda + 2\mu L}{2\mu} - \frac{P}{2\mu}\right) J_1(mr)$ (43)

以上の解を一般化する。即、

$$\widehat{zz} = \int_0^\infty J_0(mr) P(m) dm \dots\dots\dots (44)$$

(43) と (42) から w と q は $z=0$ で

$$w = -\frac{\lambda+2\mu}{(2\mu)^2} \int_0^\infty \frac{J_0(mr)}{m} \frac{\left(-\frac{\lambda+\mu}{2\mu} mT + \frac{\lambda+3\mu}{4\mu} \sinh 2mT\right) P(m)}{\left(\frac{\lambda+\mu}{2\mu} mT\right)^2 - \frac{1}{4} \sinh^2 mT + \left(\frac{\lambda+2\mu}{2\mu}\right)^2 \cosh^2 mT} dm \quad (45)$$

$$q = \frac{\lambda+2\mu}{2\mu} \int_0^\infty \frac{J_1(mr)}{m} \frac{\left(\frac{\lambda+2\mu}{2\mu} \cosh^2 mT + \frac{1}{2} \sinh^2 mT\right) P(m)}{\left(\frac{\lambda+\mu}{2\mu} mT\right)^2 - \frac{1}{4} \sinh^2 mT + \left(\frac{\lambda+2\mu}{2\mu}\right)^2 \cosh^2 mT} dm - \frac{1}{2\mu} \int_0^\infty \frac{J_1(mr)}{m} P(m) dm \quad (46)$$

初めの場合と同様、中心に密度一様な圓壙を置く事にすれば (11) で

$$\frac{-\frac{\lambda+\mu}{4\mu} mT + \frac{\lambda+2\mu}{4\mu} \sinh 2mT}{\left(\frac{\lambda+\mu}{2\mu} mT\right)^2 - \frac{1}{4} \sinh^2 mT + \left(\frac{\lambda+2\mu}{2\mu}\right)^2 \cosh^2 mT} P(m) = -K \sin ma \quad (47)$$

とおけばよい。即ち、

$$w = \frac{\lambda+2\mu}{(2\mu)^2} K \int_0^\infty \frac{J_0(mr)}{m} \sin ma \, dm \quad (48)$$

a は圓壙の半径である。又 K は、

$$-\int_0^a z z r \, dr = W \quad (\text{圓壙の重さ})$$

及び (44), (47) から得られる次の式

$$\widehat{z z} = -K \int_0^\infty J_0(mr) \frac{\left[\left(\frac{\lambda+\mu}{2\mu} mT\right)^2 - \frac{1}{4} \sinh^2 mT + \left(\frac{\lambda+2\mu}{2\mu}\right)^2 \cosh^2 mT\right]}{-\frac{\lambda+\mu}{2\mu} mT + \frac{\lambda+3\mu}{4\mu} \sinh 2mT} \times \sin ma \, dm$$

から求められる。 $T \rightarrow \infty$ とすると容易に初めの場合の解が得られて計算のチェックとなる。地表の定性的状態は兩者全く同じであるのは (47) と (1) に於て $z=0$ と置いたものが同形になる事より知れる。

(昭和16年1月。於中央氣象臺)