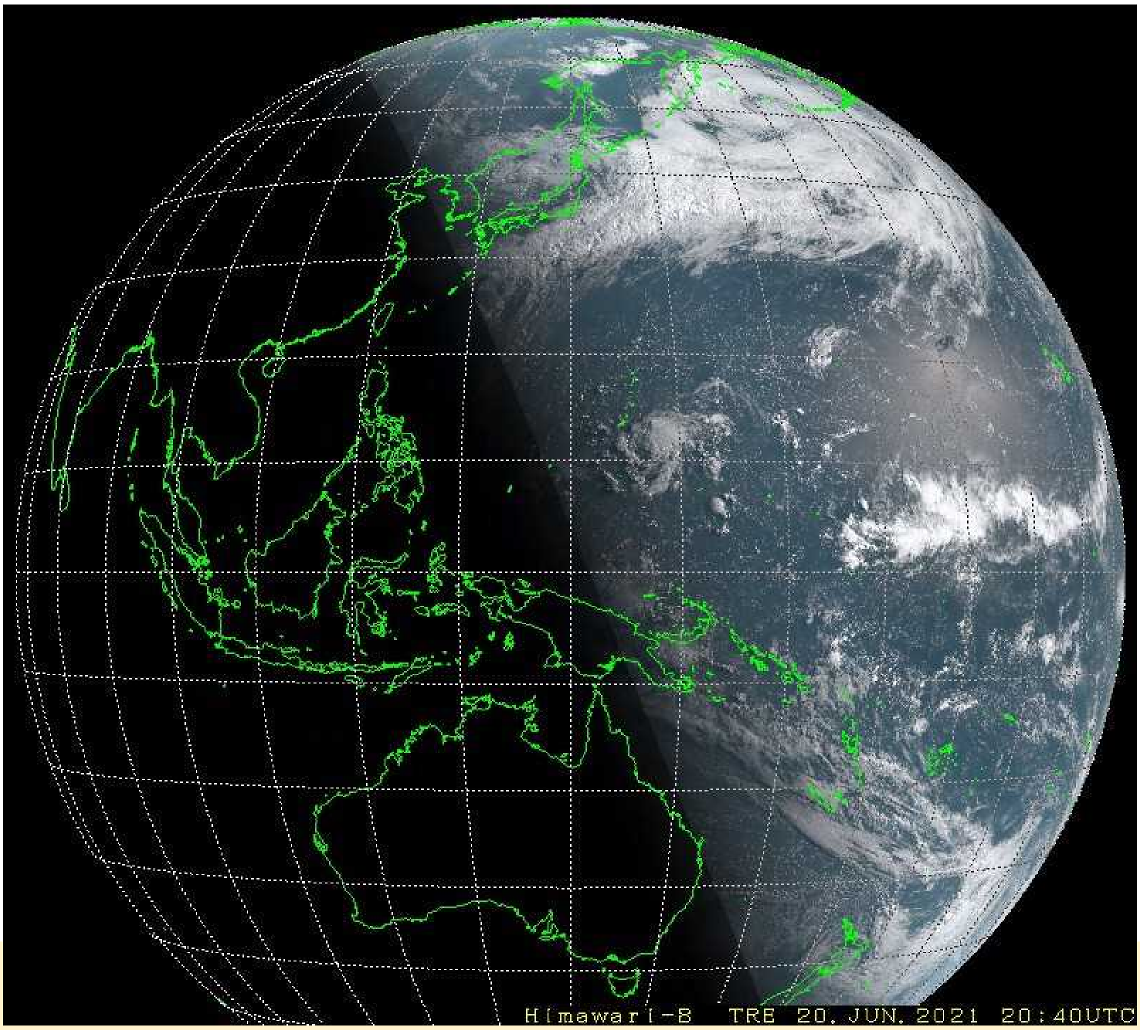
総観気象学　理論編



気象庁　監修

北畠尚子 著

総観気象学　理論編への序言

平成 30 年度から令和元年度にかけて、総観気象学基礎編・応用編が発行された。総観気象学は数日程度の天気変化を支配する気象現象を扱うため、歴史的に天気予報において最も重要とされてきた分野である。現代ではこのスケールの現象は数値予報モデルでかなり良く予想できるようになっているが、日々の予報業務では解説の必要があり、またメソスケール現象の発生に関連する背景場としても重要である。総観気象学基礎編の内容は予報業務で最低限知っておくべきこととし、応用編は調査等で必要になりうると考えられることを記載した（それぞれの序言を参照）。しかし、それらにも不足はあり、そのうち最も重要なのは、基礎編の内容の理論的根拠である。例えば基礎編ではじめに出てくる基礎方程式系に関しては、運動方程式になぜその形でコリオリ力の項が加わるのかは説明されていなかった。

今回のテキストでは、総観規模現象に関する力学を説明する。これは気象大学校大学部の 2 年後期から 3 年前期に履修する気象力学Ⅰ・Ⅱの授業資料をもとにしている。教科名は総観規模現象に限定されてはいないが、実際の内容は、一部は音波・内部重力波といった小さいスケールの現象を含むものの、主要な内容は準地衡風近似や惑星ロスビー波・傾圧不安定といった総観規模現象なので、先の基礎編・応用編の姉妹編として「総観気象学　理論編」とすることにした。大気の運動が数式で表される理論に基づいて説明できることは、先の基礎編・応用編で既に述べているが、それらで疑問に思った事柄について理解をさらに深めることに本書が役に立てば幸いである。

本書では計算を簡略化する近似法がしばしば使われるが、そのうち一部は計算機の能力が進んだ現在はあまり意識されなくなっているものもあるかもしれない。しかしそれらは気象学の理論や数値モデルの発展には密接に関連してきたものであり、現在の理論や数値モデルにどのように影響しているかも考えてみていただきたい。

ところで、後出の参考書リストを見ると、この分野では和文の専門書が 1980 年前後に多く発行されたことが読み取れるだろう。個々の著作にはそれぞれ異なる個性があったが、それぞれがその特徴によってこの数十年の気象学と関連業務の発展を支えてきたことは間違いないだろう。今後も、本書や、またそれを超えた出版物も加わった中で、気象業務が発展していくことを願ってやまない。

なお、本テキストの作成にあたっては過去に気象大学校大学部の気象力学担当教官の作成した授業資料を参照している。歴代の担当であった露木義、村上茂教、二階堂義信、大関誠の諸氏（漏れがあったら失礼の段ご容赦願いたい）に深く感謝する。また内容の確認は、令和 3 年度の気象大学校の中堅～若手教官有志の勉強会、及び本庁大気海洋部にご協力いただいた。さらに地方官署等の職員の方々からもコメントをいただいた。これらの方々に深く感謝する。

令和 4 年 3 月

北畠尚子

総観気象学　理論編　目次

参考書

参考文献（参考書）のうち、テキスト全体に関するもの（明示的に引用していないものも含む）はここに著者名のアルファベット順に記載した。これらの他に各章で参照しているものについてはその章末に記載している。

テキスト全体に関する参考書

岸保勘三郎・佐藤信夫、1986：新しい気象力学、東京堂出版、204pp。（絶版）

- 著者らは日本の現業数値予報の草分けである。

木村竜治、1986：地球流体力学入門、東京堂出版、247pp。（絶版）

- 気象・海洋の力学をいったん勉強した後に読むことをお勧めする。

北畠尚子、2019a：総観気象学　基礎編、気象庁、341pp。

北畠尚子、2019b：総観気象学　応用編、気象庁、190pp。

- 本テキストの姉妹編。現実に観測される総観規模現象の解析・理解にはこれらを参照。

栗原宜夫、1979：大気力学入門、岩波書店、244pp。（絶版）

- 小倉「気象力学通論」と同時期の発行で目立たないが、項目によってはこちらの方が詳しく分かりやすい（渦度など）。著者は米国で台風モデルの開発・研究に大きな貢献をした。

九州大学大学院総合理工学府大気海洋環境システム学専攻 (編集)、2006：地球環境を学ぶための流体力学（改訂版）、成山堂書店、323pp。（絶版）

- 地球自転の影響のない流体力学、及び海洋の大規模運動に関する記述が多い。

Hoskins, B. J., and I. N. James, 2014: Fluid Dynamics of the MidLatitude Atmosphere, Willey Blackwell, 408pp.

- 中緯度の総観～惑星規模の気象に関連する理論の記述が主である。

Holton, J. R., 1992: An Introduction to Dynamic Meteorology, 3rd Ed., 497pp.

Holton, J. R., 2004: 同上, 4th Ed., 529pp.

Holton, J. R., and G. J. Hakim, 2012: 同上, 5th Ed., Academic Press, 552pp.

- Holton の一連の教科書は大学学部・大学院修士レベルの気象力学の教科書として定評がある。本テキストはこれらの前半部分にほぼ対応する。基本的な学習をする場合は、可能であれば Holton 没後に発行された 5th edition よりもまず 4th edition 又は 3rd edition をお勧めする。

Martin, J. E., 2006: Mid-Latitude Atmospheric Dynamics: A First Course, Willey, 324pp.

- 天気現象との関係を志向している点で、どちらかというと総観気象学の教科書である。

小倉義光、1978：気象力学通論、東京大学出版会、249pp。（品切れ）

- 気象力学の教科書として定評があった。

田中博、2017：現代地球科学シリーズ 3　地球大気の科学、共立出版、305pp。

- 気象力学全般を扱う和書の教科書で、現在入手が容易なものとしては唯一である。

Vallis, G. K., 2006: Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics, Cambridge Univ. Press, 745pp.

Vallis, G. K., 2017: 同上、second edition, Cambridge Univ. Press, 964pp.

- 気象・海洋力学全般。評判は良いが、Holton の教科書より高度で分量も多い。

Vallis, G. K., 2019: Essentials of Atmospheric and Oceanic Dynamics, Cambridge Univ. Press, 356pp.

- Vallis (2006, 2017) の基礎的部分を抜き出したもの。ただしレベルは低くはなく、初学者に必要だが抜けていることもあるように思われる。

第 1 章 気象力学の基礎方程式系

気象力学は、流体力学と熱力学の法則をもとに、大気の力学的側面について、体系的に論じる分野である。対象には、大気の鉛直構造、大循環、大気中のさまざまな波動、低気圧・台風・積雲対流などの擾乱など、さまざまなものが含まれる。

気象力学の最初の章では、大気の運動を支配する基礎方程式系の導出を行う。気象学で問題とする大気中の運動としては、水平スケールが数 cm 程度以下のごく小さい境界層の乱れから、波長が 10000km 以上の超長波までさまざまなスケールの擾乱が存在する。

1.1 気象力学への導入

1.1.1 大気の運動を記述する方程式と変数

流体力学では、流体中に巨視的に考えれば十分小さく、分子レベルから見れば十分大きな要素（流体粒子：fluid particle）を考え、この微小要素中の諸量の平均値をとって流体の運動を記述する。気象力学でも同様に、空気塊（air parcel）の運動を考える。そしてこの空気塊は、以下の基本的な物理法則に支配されている。

1. ニュートンの運動の第 2 法則（運動方程式）
2. 質量保存則（連続の式）
3. 状態方程式
4. 熱力学の第 1 法則

これらの法則に基づく大気の状態を記述するために一般的に採用される変数は、空気塊の 3 次元の速度（風速）ベクトル$\boldsymbol{v}$、密度ρ、温度（気温）T、圧力（気圧）p の 4 個（速度ベクトル 3 成分を個別に考えれば 6 個）である。この数は上記の物理法則（方程式）の数と一致している。そしてこれらの変数は、場所（位置）や時間とともに変化する、位置（x, y, z）と時刻tの関数となっている。物理学では位置と時刻の関数となっている量を一般に「場」と呼ぶ。例えば質点の力学では質点の運動を速度という物理量で表すのに対して、大気中の各座標の空気塊がそれぞれ異なる速度を持つことを表した場合にその速度分布を速度場と呼ぶ。その他の物理量についても「温度場」「気圧場」のような表現を用いる。

1.1.2 大気の運動の特徴とその要因

ここでの記述の主対象である地球大気は、流体であることに加えて、地球の表層を構成する要素であることにより、以下のような特徴と制約の中で運動している。

- 地球による重力場の中にある。このため、大気は高さとともに密度が減少している。すなわち、密度成層を持っている。
- 地球が自転している。このために大気は角運動量を持つ。また地面に相対的には回転系にあり、コリオリ力が見かけの力として働く。
- 地球が球形をしていることにより、大気は球面上にあり、コリオリ力の緯度変化が生じる。

- 大気の厚さは地球の半径に比べて非常に薄い。そのため、多くの場合、大気の運動の水平スケールが鉛直スケールと比較して非常に大きい。
- 短波・長波放射や、潜熱・顕熱など、大気への加熱・冷却が運動の源である。

生じる大気の運動には、時間・空間について異なるスケールの運動が共存し、そのそれぞれについて運動を規定している主な要因が異なっている。さらに、異なるスケールの運動の相互作用が働く。例えば、台風は数百 km のスケールの渦運動だが、そのエネルギー源となっているのは 10km スケールの積雲対流であり、また逆に、台風に伴う下層収束により積雲対流が生じやすい条件も整う。

1.1.3 気象現象のスケール

地球大気中のさまざまな現象を大まかに分類して図に示すと、図 1.1 のように示すことができる。大気には水平スケールが数 cm の境界層の乱れから、波長が 1 万 km 以上の超長波まで、さまざまなスケールの擾乱が存在している。最初に上げた 4 つの物理法則から得られる気象力学の基礎方程式は原理的にはこれらすべての擾乱を記述するが、すべての現象に対して常に同じ方程式系を用いることが必ずしも良い結果をもたらすとは限らない。現象のスケールに応じた近似を行うことで、物事の本質がより明瞭に見えてくることもある。このテキストで扱う方程式系と、それの主な対象とする現象の関係を、図 1.2 に示す。

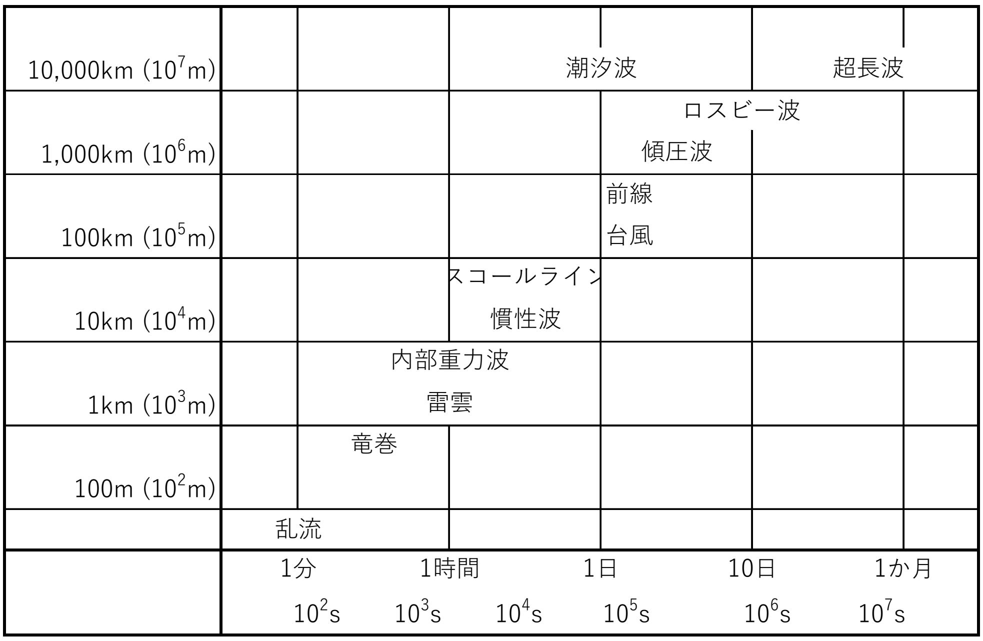


図 1.1　大気中の運動の時間スケールと水平スケールの模式図。（Orlanski (1975) に基づき作成）

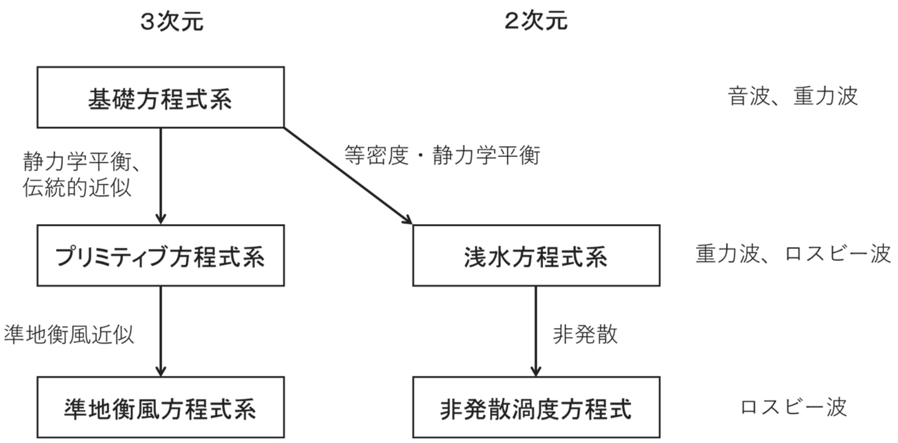


図 1.2　このテキストに現れる方程式系と、主な対象とする現象。

1.2 空気塊に働く基本的な力

ニュートンの第 2 法則では、宇宙空間に固定した座標系（慣性系：inertial frame of reference）に相対的な物体の運動量の時間変化（すなわち加速度）は、その物体に働く力の総和に等しい。ここでまず考えるべき基本的な力（fundamental force）は、重力・気圧傾度力・粘性力（摩擦力）である。

1.2.1 重力

ニュートンの万有引力の法則では、2 つの物体には、それらの質量に比例し、またそれらの距離の 2 乗に反比例した引力が働く。空気塊にも地球との間の引力すなわち重力が働く。地球の半径と比較すると大気の層は非常に薄いため、地球と空気塊との間の距離はほぼ一定とみなせる。よって、気象力学では通常、単位質量当たりの空気塊にかかる重力として、高度によらず一定の重力加速度 $\boldsymbol{g}$ を用いる。

1.2.2 気圧傾度力

空気塊には、周囲の大気からの圧力（気圧）による力がかかる。ここでは気圧場pの中でx、y、z方向の各辺の長さが δx、δy、δz で体積 $\delta V = \delta x \delta y \delta z$ を持った直方体の空気塊を考える（図 1.3）。この空気塊の中心を座標 (x_0, y_0, z_0)、その位置における気圧を $p_0 = p(x_0, y_0, z_0)$とする。この空気塊に対して、x座標 $x_0 + \delta x/2$ の側からかかる気圧は、テイラー展開（付録 1A）により

$$p\left(x_0 + \frac{\delta x}{2}, y_0, z_0\right) = p_0 + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\delta x}{2} + O(\delta x^2) \approx p_0 + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\delta x}{2}$$

で近似される。ただし圧力の方向はx軸の負の方向である。同様に、x座標 $x_0 - \delta x/2$ の側からかかる気圧はx軸の正の方向に $p_0 - (\partial p/\partial x)(\delta x/2)$ である。これらにより、この空気塊にかかる力のx成分は、高次の項を無視すると、力のかかる面の面積が $\delta y \delta z$ であることから

$$F_x = -\left(p_0 + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right)\delta y \delta z + \left(p_0 - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right)\delta y \delta z = -\frac{\partial p}{\partial x}\delta V$$

と書ける。この体積δVの空気塊の密度と質量をそれぞれρと$m\,(=\rho \delta V)$とすると、単位質量当たりの空気塊にかかる力は

$$\frac{F_x}{m} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

となる。y成分とz成分も同様に考えることができるので、単位質量当たりの空気塊にかかる力は

$$\frac{\boldsymbol{F}}{m} = -\frac{1}{\rho}\nabla p \tag{1.2.1}$$

であり、空気塊にかかる力は気圧そのものではなくその傾度（気圧傾度力）であることがわかる。

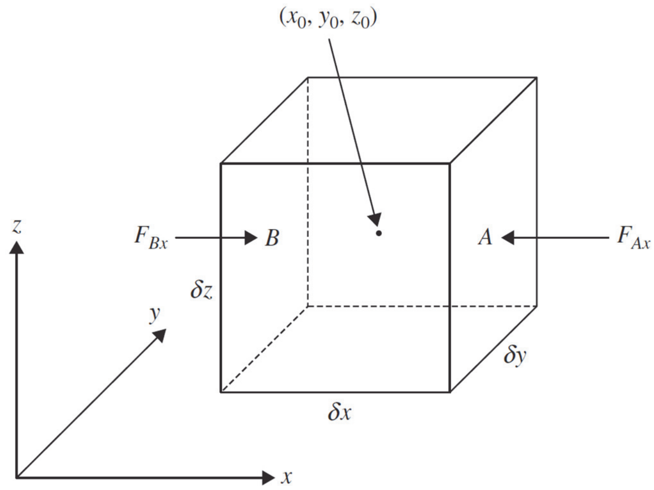


図 1.3　直方体の流体に働く気圧傾度力のx成分。（Holton and Hakim 2012）

1.2.3 摩擦力（粘性力）

粘性流体には、流体粒子に働く応力である粘性力が働く。これはしばしば、流体に対する摩擦力と呼ばれる。しかし、気象力学では、粘性による摩擦はほとんど無視される。これは、現実の大気中では、一般に次の状態であると言えることによる。

- 高度 1 ㎞以上のいわゆる自由大気中では、空気分子同士の粘性は非常に小さい。
- 高度 1 ㎞以下のいわゆる境界層では、摩擦の影響とされるのは、空気の分子粘性よりも乱流による渦粘性がはるかに大きい。

このテキストでも第 9 章を除いて原則として自由大気を対象とするので、摩擦の影響は基本的に無視する。

1.2.4 慣性系における運動方程式

前項までの議論に基づき、気象力学では基本的に、オイラーの完全流体に関する運動方程式に基づいて議論を行う。このとき流体に現れる応力は圧力のみで、運動方程式には面積力として圧力傾度力（気圧傾度力）のみが現れる。また大気に働く体積力（外力）として、地球による重力がある。以上をまとめると、運動方程式の慣性系における表現として

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{g} + \boldsymbol{F_r} \tag{1.2.2}$$

が得られる。右辺の最後の項は、重力以外の単位質量当たりの外力を表す。摩擦力が問題になる場合はこの項を摩擦力と読み替えることもあるが、通常は無視する。

1.3 慣性系における基礎方程式系

1.3.1 ラグランジュ微分とオイラー微分

気象要素の時間変化を考える際には、2 種類の考え方がある。① 着目する空気塊の気象要素の時間変化に着目する方法と、② 場所を固定した気象要素の時間変化に着目する方法である。これらに対応して、時間微分も 2 種類を区別して用いる。①はラグランジュ微分（全微分とも呼ばれる）であり、②はオイラー微分である（付録 1B）。

例えば、気温 T の変化を考えるとき、時刻 t に座標（x_0, y_0, z_0）にあった空気塊が δt 時間後に座標（$x_0+\delta x, y_0+\delta y, z_0+\delta z$）に移動したとすると、空気塊の気温変化 δT は

$$\delta T \approx \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)\delta t + \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\delta x + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)\delta y + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)\delta z$$

で近似される。空気塊の速度を $\boldsymbol{v} = (u, v, w)$ とすると、$\delta x = u\delta t$、$\delta y = v\delta t$、$\delta z = w\delta t$ と表せるので、$\delta t \to 0$ の極限では以下の関係が近似でなく厳密に成り立つ。

$$\frac{dT}{dt} = \lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta T}{\delta t} = \frac{\partial T}{\partial t} + \left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z}\right) \tag{1.3.1}$$

この式の左辺の dT/dt がラグランジュ微分（全微分）で、運動する空気塊の気温の変化を表す。それに対して右辺の $\partial T/\partial t$ はオイラー微分で、固定した場所の気温の変化を表す。ベクトルを使って書き換えると、

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dT}{dt} - \boldsymbol{v}\cdot\nabla T \tag{1.3.2}$$

となる。右辺第 2 項は温度移流項と呼ばれ、例えば$-\boldsymbol{v}\cdot\nabla T > 0$ の場合は正の温度移流であり暖気移流である。気象学では、特定の空気塊の変化を予想するよりも、特定の場所の空気の状態の変化を予想することが必要とされることが多い。このためにラグランジュ微分とオイラー微分の区別が重要である。

このことを踏まえたうえで、次項から、第 1.1.1 項で挙げた 4 種類の方程式を順に確認していく。

1.3.2 運動方程式

慣性系における運動方程式は、空気塊に着目したラグランジュ微分を用いることにより (1.2.2) 式で

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{g} + \boldsymbol{F_r}$$

と表せた。右辺は空気塊に働く力であり、左辺は空気塊の加速度を表す。これに対して、場所を固定したオイラー微分では、

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \boldsymbol{g} + \boldsymbol{F_r} \tag{1.3.3}$$

となる。左辺は場所を固定した場合の空気塊の速度（単位質量当たりの運動量）の変化（すなわち加速度）であり、右辺第 1 項は運動量の移流を表す。

1.3.3 連続の式

次に、質量保存を考える。再び、x、y、z 方向の各辺の長さが δx、δy、δz で体積 $\delta V = \delta x \delta y \delta z$ を持った立方体の空気塊を追跡するラグランジュの方法で考える。この空気塊の各部分が周囲の流れとともに移動していくと考えると、その形や体積は変化するが、質量 $\delta m = \rho \delta V$ は変化しない。すると

$$\frac{d(\rho \delta V)}{dt} = 0 \tag{1.3.4}$$

である。これを変形すると

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\rho}{\delta V} \frac{d\delta V}{dt} \tag{1.3.5}$$

と書ける。この式の右辺の微分は、

$$\frac{1}{\delta V} \frac{d\delta V}{dt} = \frac{1}{\delta x} \frac{d\delta x}{dt} + \frac{1}{\delta y} \frac{d\delta y}{dt} + \frac{1}{\delta z} \frac{d\delta z}{dt}$$

と変形できる。ここで、図 1.4 左でx方向の運動について考えると、A（座標x）と B（$x + \delta x$）における速度はそれぞれ $u_A = dx/dt$ 、$u_B = d(x + \delta x)/dt$ と書ける。すると A と B の風速差は

$$\delta u = u_B - u_A = \frac{d(x + \delta x)}{dt} - \frac{dx}{dt} = \frac{d(\delta x)}{dt}$$

と書ける。y方向とz方向も同様に考えると、

$$\frac{1}{\delta V} \frac{d\delta V}{dt} = \frac{1}{\delta x} \frac{d\delta x}{dt} + \frac{1}{\delta y} \frac{d\delta y}{dt} + \frac{1}{\delta z} \frac{d\delta z}{dt} = \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta z} \tag{1.3.6}$$

である。(1.3.5) と (1.3.6) から

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \left(\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta z} \right)$$

が得られ、ここで $\delta x \to 0$ などとすると、

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} \tag{1.3.7}$$

となる。右辺の $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ は 3 次元の発散である。(1.3.7) 式はまたラグランジュ微分の定義より

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{1.3.8}$$

と書き換えられる。この (1.3.7) (1.3.8) が**連続の式**である。左辺第 2 項の $\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v})$ は質量フラックス発散で、運動により質量（密度）の時間変化が生じることを表す。

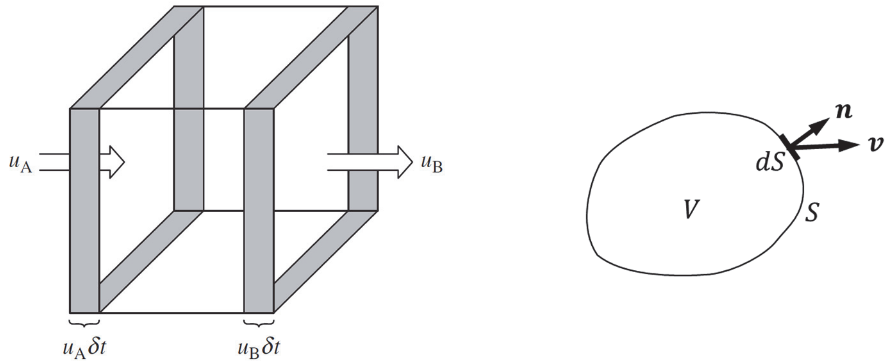


図 1.4　（左）x方向の運動による流体のラグランジュ的な体積変化の模式図（Holton and Hakim 2012)。（右）空間に固定した流体のオイラー的な体積変化の模式図。

以上はラグランジュ的な考え方での導出であった。同じことを、オイラー的な考え方で導出してみる。ここでは、大気の流れの中に、空間に固定した任意の閉曲面Sと、それに囲まれた領域Vを考える（図 1.4 右)。任意の時刻にVに含まれる質量の時間変化は

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho dV \tag{1.3.9}$$

で与えられる。この質量変化は、大気が表面Sを通して領域Vに流れ込む（または流れ出す）ことによって起こると考えられる。曲面Sの面積要素dSに垂直で外向きの単位法線ベクトル$\boldsymbol{n}$をとると、dSを通って単位時間に流出する質量は、流速を$\boldsymbol{v}$として、$\rho v_n dS$（v_nは$\boldsymbol{v}$の$\boldsymbol{n}$方向成分）または$\rho \boldsymbol{v}\cdot \boldsymbol{dS}$ と書けるので、閉曲面全体を通っての全流出量は、

$$\iint_S \rho v_n dS \ \left(\text{または} \iint_S \rho \boldsymbol{v}\cdot \boldsymbol{dS}\right) \tag{1.3.10}$$

で与えられる。(1.3.9) と (1.3.10) より

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho dV + \iint_S \rho \boldsymbol{v}\cdot \boldsymbol{dS} = 0 \tag{1.3.11}$$

である。左辺第 2 項にガウスの発散定理 $\iint_S \boldsymbol{A}\cdot \boldsymbol{dS} = \iiint_V \nabla\cdot \boldsymbol{A} dV$ （$\boldsymbol{A}$はベクトル）を使って体積積分に書き換えれば、閉曲面Sに囲まれた領域Vにおいて

$$\iiint_V \left\{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho \boldsymbol{v})\right\} dV = 0 \tag{1.3.12}$$

が成り立つ。閉曲面 S の取り方は任意であったので、(1.3.12) が成り立つには積分記号の中が恒等的に 0 である必要がある。よって (1.3.8) が成立する。

【移流とフラックス】

第 1.3.1 項で、任意のスカラーの物理量ψに関する移流（advection）$-\boldsymbol{v}\cdot\nabla\psi$ を導入した。それに対して、$\boldsymbol{v}\psi$ をフラックス（flux）といい、単位時間内にある地点を通過するψの量を表す。これは密度ρ（質量）や水蒸気量（後出の比湿q)、エネルギー等に関してしばしば使用する。これらに関するフラックス

発散 $\nabla\cdot(\boldsymbol{v}\psi)$（負号を付ければフラックス収束）は、その地点での質量や水蒸気等の増減を表す。

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{v}\psi)=(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\psi+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\psi$$

と変形でき、左辺のフラックス発散は、右辺第 1 項の物理量のψ分布と風の発散、及び第 2 項の移流に関連する。特に非発散であればフラックス収束$-\nabla\cdot(\boldsymbol{v}\psi)$と$\psi$移流$-\boldsymbol{v}\cdot\nabla\psi$が等しくなることがわかる。

1.3.4 状態方程式

主に中緯度大気を扱う気象力学では、通常、水蒸気を含まない**乾燥空気**を対象とし、空気を理想気体として扱う。ボイル・シャルルの法則より、気体の圧力p、体積V、温度Tの間には、

$$pV=nR^*T \tag{1.3.13}$$

の関係がある。ただしnは気体のモル数、R^* はモル気体定数（普遍気体定数、$R^*=$ 8.314 J K^{-1} mol^{-1}）である。気体の質量をm、分子量をMとすると、

$$pV=m\frac{R^*}{M}T \tag{1.3.14}$$

と表される。

気象力学で扱う乾燥空気は、窒素・酸素その他の気体からなる混合気体である。また気象学では空気の体積やその変化を観測することはほとんどない。したがって、状態方程式には体積Vを使わず、また分子量には地球大気の平均分子量を使う形にしたい。こ各成分の気体のモル数をn_i、分圧をp_iとすると、各成分の熱平衡を仮定すれば、ドルトンの分圧の法則より

$$p_iV=n_iR^*T\ ,\qquad p=\sum_i p_i \tag{1.3.15}$$

が成り立つ。よって全成分を足し合わせることによって

$$pV=\left(\sum_i n_i\right)R^*T=\left(\sum_i\frac{m_i}{M_i}\right)R^*T=m\frac{\sum_i m_i/M_i}{\sum_i m_i}R^*T \tag{1.3.16}$$

と書ける。ただし各成分気体の質量・分子量をそれぞれm_i、M_iとし、$m=\sum_i m_i$ =乾燥空気の質量とした。これを (1.3.14) と比較して、

$$M_d=\frac{\sum_i m_i}{\sum_i m_i/M_i} \tag{1.3.17}$$

として乾燥空気の平均分子量M_dを定義すれば、混合気体である乾燥空気を単一組成の理想気体であるかのように扱える。そこで、乾燥空気の気体定数

$$R_d\equiv\frac{R^*}{M_d}=\frac{\sum_i m_i/M_i}{\sum_i m_i}R^* \tag{1.3.18}$$

を導入する（$R_d=$ 287 J K^{-1} kg^{-1}）と、乾燥空気の状態方程式が

$$pV=mR_dT \tag{1.3.19}$$

のように書ける。乾燥空気の密度 $\rho_d=m/V$ を用いて書き換えれば、

$$p=\rho_dR_dT \tag{1.3.20}$$

となる。

対流圏の特に下層では、大気には水蒸気が多く含まれる。**湿潤空気**は乾燥空気と水蒸気の混合気体であると考える。気圧をp、水蒸気圧をe、水蒸気の分子量をM_vとすると、乾燥空気と水蒸気の状態方程式は、

$$p - e = \rho_d R_d T \ , \quad e = \rho_v R_v T \tag{1.3.21}$$

ここで、ρ_dとρ_v はそれぞれ乾燥空気と水蒸気の密度、$R_v = R^*/M_v$（= 462 J K^{-1} kg^{-1}）は水蒸気の気体定数である。(1.3.21) の 2 式の和をとると、

$$p = (\rho_d R_d + \rho_v R_v)T = \left(\rho_d + \rho_v \frac{R_v}{R_d}\right) R_d T = \left(\rho_d + \rho_v \frac{M_d}{M_v}\right) R_d T \tag{1.3.22}$$

湿潤空気の密度を ρ とすると、$\rho = \rho_d + \rho_v$ なので、

$$p = \left(\rho - \rho_v + \rho_v \frac{M_d}{M_v}\right) R_d T = \left(\rho + \rho_v \frac{M_d - M_v}{M_v}\right) R_d T = \rho R_d \left(1 + \frac{\rho_v}{\rho} \frac{M_d - M_v}{M_v}\right) T \tag{1.3.23}$$

ここで、**比湿**（specific humidity） $q = \rho_v/\rho$ を導入すると、

$$p = \rho R_d \left(1 + \frac{M_d - M_v}{M_v} q\right) T = \rho R_d (1 + 0.608q) T \tag{1.3.24}$$

が得られる。さらに**仮温度**（virtual temperature） $T_v \equiv (1 + 0.608q)T$ を使うと、湿潤空気の状態方程式は乾燥空気の場合と同一の形式

$$p = \rho R_d T_v \tag{1.3.25}$$

で書くことができる。

このテキストでは湿潤大気の力学を扱わないので、以下では乾燥空気の気体定数を単にRで表す。また単にρと書けば、特に断りのない限り、乾燥空気の密度を表すものとする。従って、空気の状態方程式は

$$p = \rho R T \tag{1.3.26}$$

と書く。

【問題】乾燥空気の成分を質量比で見て、窒素（分子量 28.01）75.53%、酸素（分子量 32.00）23.01%、アルゴン（分子量 39.95）1.286%の混合気体とする。乾燥空気の平均分子量 M_d及び気体定数 R_dを求めよ。ただし普遍気体定数を 8.314 J K^{-1} mol^{-1} とする。

【問題】乾燥空気の場合は、平均分子量を用いて仮想的な気体定数を定義することで、単一組成の気体として扱ったが、湿潤空気の場合はそうしないのはなぜか。

1.3.5 熱力学第 1 法則

熱や仕事のやり取りによるエネルギーの変化を表すのが熱力学第 1 法則である。ここでは理想気体としての大気に特化した方法で、気象力学に用いる熱力学第 1 法則の数学的表現を導く。大気は場所によって温度が異なるので、全体としては熱力学的平衡にはない。しかし気体分子どうしが頻繁に衝

突を繰り返してエネルギーを交換しているので、局所的には熱力学平衡が成立しているとみなすことができる。これを局所熱力学平衡と呼ぶ。地球大気では高度 80km 程度（中間圏界面付近）までの大気は**局所熱力学平衡**にある。従って、対流圏や成層圏では**準静的過程**を仮定した熱力学の方程式を適用できる。

熱力学第 1 法則は、通常次のように表される。

$$dU = d'Q - d'W \tag{1.3.27}$$

ここで U は考えている物質の単位質量当たりの内部エネルギー、$d'Q$は物質に加えられた熱量（単位質量当たり）、$d'W$は物質が外部にした仕事（単位質量当たり）である。$d'Q$ と$d'W$ は変化の経路に依存するため、微分で表すことはできない。対象としている物質が理想気体であれば、ジュールの法則により、その内部エネルギーは温度のみの関数であり、$dU = C_v dT$ と表される（C_vは定積比熱)。一方、理想気体の場合、それが周囲にした仕事は、準静的過程を仮定してpdV と書ける。気象学では大気の単位質量当たりの体積を比容（specific volume）$\alpha = 1/\rho$ を用いて表すことも多いので、これを $pd\alpha$ と書いても良い。これらの変化が微小時間 dt の間に起こったとすると、単位時間・単位質量当たりの加熱率を改めて J とおけば、熱力学の第 1 法則は

$$C_v \frac{dT}{dt} = J - p\frac{d\alpha}{dt} \tag{1.3.28}$$

と書くことができる。ここで理想気体の状態方程式を用いれば、$\alpha = RT/p$ より

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{R}{p}\frac{dT}{dt} - \frac{RT}{p^2}\frac{dp}{dt} = \frac{R}{p}\frac{dT}{dt} - \frac{\alpha}{p}\frac{dp}{dt}$$

となるので、これを (1.3.28) に用いて

$$(C_v + R)\frac{dT}{dt} - \alpha\frac{dp}{dt} = J$$

が得られる。ここで定圧比熱 $C_p = C_v + R$ を用い、またαを$1/\rho$に戻せば、理想気体の場合の熱力学の第 1 法則の表現

$$C_p \frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt} = J \tag{1.3.29}$$

が得られる。なお、ここでは空気塊の変化を対象としているので、時間微分はすべてラグランジュ微分 d/dt である。

ここで、(1.3.29) 式のρに再び状態方程式を用いて

$$C_p \frac{dT}{dt} - \frac{RT}{p}\frac{dp}{dt} = J$$

としておく。この両辺をC_pTで除し、対数微分を使うと、

$$\frac{d}{dt}\left[\ln\left(Tp^{-R/C_p}\right)\right] = \frac{J}{C_pT} \tag{1.3.30}$$

が得られる。(1.3.30) から、断熱変化（$J = 0$）においてはTp^{-R/C_p} が流れに沿って保存すること、すなわち保存量であることがわかる。いま気圧pで温度Tの空気塊を何らかの方法で断熱的に標準気圧p_0

（1000hPa にとることが多い）まで移動させたときの温度をθとすれば、$Tp^{-R/C_p} = \theta p_0^{-R/C_p}$ が成り立つことから、

$$\theta = T\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-R/C_p} = T\left(\frac{p_0}{p}\right)^{R/C_p} \tag{1.3.31}$$

となる。このように定義されるθを**温位**（potential temperature）という。断熱変化する空気塊の温位は保存される。温位を使うと熱力学第 1 法則は

$$\frac{d}{dt}\ln\theta = \frac{J}{C_p T} \tag{1.3.32}$$

または

$$\frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{R/C_p}\frac{J}{C_p} = \frac{J}{C_p\Pi(p)} \quad , \quad \Pi(p) \equiv \left(\frac{p}{p_0}\right)^{R/C_p} \tag{1.3.33}$$

と表される。$\Pi(p)$ はエクスナー関数（Exner function）と呼ばれ、定義よりほぼ 0～1 の値を取る。エクスナー関数は C_p を乗じた形で定義する場合もある。

熱力学では、ある平衡状態aにある系のエントロピー $S(a)$ を、基準状態 a_0 におけるエントロピーからの差として

$$S(a) - S(a_0) = \int_{a_0}^{a}\frac{d'Q}{T}$$

により定義する。ここで、積分は、系の熱力学的相空間におけるある準静的過程により行われるものとする。この定義の微分形である

$$dS = \frac{d'Q}{T} \tag{1.3.34}$$

を用いると、熱力学の第 1 法則 (1.3.27) は

$$C_v dT = TdS - pd\alpha \tag{1.3.35}$$

の形に書くことができる。ここで理想気体の状態方程式とその微分を用いると、

$$dS = C_p\frac{dT}{T} - R\frac{dp}{p} \tag{1.3.36}$$

となり、これを積分することで、単位質量当たりの理想気体に対するエントロピーの式

$$S = C_p\ln T - R\ln p + \text{const.} = C_p\ln\left(Tp^{-R/C_p}\right) + 定数$$

が得られる。ここで温位の定義を思い出すと、

$$S = C_p\ln\theta + 定数 \tag{1.3.37}$$

と表すことができる（(1.3.37) 式の定数はその上の式の定数とは異なる）。この関係により、温位が保存することとエントロピーが保存することは等価である。このことに注意しながら、温位で表した熱

力学第 1 法則 (1.3.32) を書き換えると、

$$\frac{dS}{dt} = \frac{J}{T} \tag{1.3.38}$$

となる。これは系のエントロピーの時間変化を表す方程式に他ならない。

なお、ここでは乾燥大気の準静的な熱力学しか扱っていないので、空気塊のエントロピーは非断熱加熱（(1.3.38) のJ）によってのみ変化し、あとは流れによってその分布が変化するという単純化されたイメージが得られる。水蒸気の相変化や不可逆過程を含む湿潤大気のエントロピー変化はさらに複雑である。

1.3.6 慣性系における基礎方程式系のまとめ

第 1.3.2 項から第 1.3.5 項までで、大気の運動の支配方程式 4 種類を順に導出した。ここで、あとの便宜のためにそれらをまとめて再掲しておく。

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{g} + \boldsymbol{F_r} \tag{1.3.39a}$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0 \tag{1.3.39b}$$

$$p = \rho RT \tag{1.3.39c}$$

$$C_p\frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt} = J \quad \text{または} \quad \frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{R/C_p}\frac{J}{C_p} = \frac{J}{C_p\Pi(p)} \tag{1.3.39d}$$

ただし

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla \tag{1.3.40}$$

これらは慣性系において成り立つ方程式である。地球上でも、地球の自転や緯度変化が無視できるようなスケールの現象などには適用することができる。

【問題】観測所付近で北に向かって 50 km あたり気温 3K 低下する水平温度傾度が存在していたとする。風は北東から 10m s^{-1} で吹いており、かつ観測所付近の大気は 1 時間当たり 1K の割合で放射加熱を受けている。このとき、観測所付近の気温変化率はいくらか。ただし、地上気圧はどこでも同じで、かつ時間変化しないものとする。

1.3.7 大気の運動の例：純粋な音波

前項でまとめた基礎方程式系の応用として、純粋な音波の方程式を導いてみよう。音波は非常にスケールの小さい運動なので、重力・摩擦力・非断熱加熱を無視した方程式系で考える。(1.3.39a-d) をオイラー微分で記述すると、

$$\rho\left[\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\right] = -\nabla p \tag{1.3.41a}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{1.3.41b}$$

$$p = \rho R T \tag{1.3.41c}$$

$$C_p \rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla T \right) - \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla p \right) = 0 \tag{1.3.41d}$$

となる。いま、さらに簡単のために、温度T_0（定数）の静止した（つまり、一般風のない）等温大気を考える。$T = T_0$ と $\boldsymbol{v} = 0$ を (1.3.41a) と (1.3.41d) に代入すると、気圧が一定である（$\partial p / \partial t = 0$）ことがわかるので、その気圧の値を$p_0$とする。すると、(1.3.41c) より、密度も一定となるので、その値をρ_0とすると、

$$p_0 = \rho_0 R T_0 \tag{1.3.42}$$

が成り立つ。これは等温静止状態を表し、また微小変動がある場合の平均場を表す。

音波による変動は微小なので、上記の平均場からの変動成分に´ を付けると、

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}', \quad p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad T = T_0 + T' \tag{1.3.43}$$

と表すことができる。（このような方法を摂動法という。第 6 章を参照。）これらを (1.3.41a-d) に代入すると、平均場は時間・空間変化しないことを考慮して

$$(\rho_0 + \rho') \left[\frac{\partial \boldsymbol{v}'}{\partial t} + (\boldsymbol{v}' \cdot \nabla) \boldsymbol{v}' \right] = -\nabla p' \tag{1.3.44a}$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \boldsymbol{v}' \cdot \nabla \rho' + (\rho_0 + \rho') \nabla \cdot \boldsymbol{v}' = 0 \tag{1.3.44b}$$

$$p_0 + p' = (\rho_0 + \rho') R (T_0 + T') \tag{1.3.44c}$$

$$C_p (\rho_0 + \rho') \left(\frac{\partial T'}{\partial t} + \boldsymbol{v}' \cdot \nabla T' \right) - \left(\frac{\partial p'}{\partial t} + \boldsymbol{v}' \cdot \nabla p' \right) = 0 \tag{1.3.44d}$$

これらを展開するが、´ のついた項は微小なので、その 2 次以上の項は無視すると

$$\rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{v}'}{\partial t} = -\nabla p' \tag{1.3.45a}$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \boldsymbol{v}' = 0 \tag{1.3.45b}$$

$$\frac{p'}{p_0} = \frac{\rho'}{\rho_0} + \frac{T'}{T_0} \tag{1.3.45c}$$

$$C_p \rho_0 \frac{\partial T'}{\partial t} - \frac{\partial p'}{\partial t} = 0 \tag{1.3.45d}$$

と近似できる。ここで、(1.3.45c) を時間微分すると、

$$\frac{1}{p_0} \frac{\partial p'}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{1}{T_0} \frac{\partial T'}{\partial t}$$

が得られる。これと (1.3.45d) から T' を消去して、(1.3.42) を使うと、

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = \frac{1}{\gamma R T_0}\frac{\partial p'}{\partial t} \qquad \left(\gamma \equiv \frac{C_p}{C_p - R} = \frac{C_p}{C_v}\right) \tag{1.3.46}$$

次に、(1.3.45a) の発散をとると

$$\rho_0 \frac{\partial(\nabla\cdot\boldsymbol{v}')}{\partial t} = -\nabla^2 p'$$

これと (1.3.45b) から $\nabla\cdot\boldsymbol{v}'$ を消去すると

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = \nabla^2 p' \tag{1.3.47}$$

さらにこれと (1.3.46) でρ'を消去すると

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = \gamma R T_0 \nabla^2 p' \tag{1.3.48}$$

が得られる。$\boldsymbol{v}'$、ρ'、T'も同様の方程式を満たすことが容易にわかる。

(1.3.48) は 3 次元の波動方程式であることから、大気の微小な変動が $c_s \equiv \sqrt{\gamma R T_0}$ の速度で伝播することがわかる。$T_0 =$ 288K のときの伝播速度を計算すると 340 m s^{-1} となる。この波動は音波であり、空気の圧縮性に伴う弾性力を復元力として伝わる縦波である。

1.4 回転座標系で現れる見かけの力

前節で示したのは慣性系におけるものであったが、気象力学で議論したいのは我々すなわち地球上の観測者から見た地球上の現象なので、地球上に固定された座標系で記述した方が都合が良い。ただし、地球は自転・公転運動をしており、地球上に固定された座標系は慣性系ではない。一方、基礎方程式中でニュートンの運動の第 2 法則のみがベクトル形式の式で、他の式はすべてスカラー式である。スカラー式は座標系の変換により形を変えることはないので、前節の式がそのまま使用できる。ニュートンの第 2 法則（運動方程式）のみ、慣性系から回転系への変換を考えなければならない。

第 1.3.6 項のまとめにおける運動方程式 (1.3.39a) では、外力として気圧傾度力・重力・摩擦力の項があった。回転系では、これらに加えて「見かけの力」(apparent forces) として遠心力とコリオリ力を考慮する必要が生じる。

1.4.1 遠心力

ある位置を中心として、角速度ωで回転している、単位質量を持つ物体を考える。この物体の、回転中心に相対的な位置ベクトルを、$\boldsymbol{r}$とする。すると、この物体には、回転中心の方向へ $-\omega^2|\boldsymbol{r}|$ の加速度（向心加速度）がかかる。すなわち、この物体の速度を$\boldsymbol{V}$（2 次元運動）とすると、他に働く力がなければ

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = -\omega^2 \boldsymbol{r} \tag{1.4.1}$$

である。これは、この物体に固定した座標系で見ると、見かけ上、$\omega^2|\boldsymbol{r}|$ の大きさの力が外向きにかかっていると考えることができる。これが**遠心力**（centrifugal force）で、方向も考慮するとベクトルでは

$\omega^2 \boldsymbol{r}$ である。

地球上にある物体は、慣性系から見ると、地球の自転により運動している。地球上にある単位質量あたりの空気塊を、地球上に固定した座標系で考える。自転軸からの位置ベクトルを $\boldsymbol{R}$、地球自転の角速度を Ω（＝ $7.292\times10^{-5}\ \mathrm{s^{-1}}$）とすると、この空気塊には遠心力 $\Omega^2\boldsymbol{R}$ がかかっている。

地球上の観測者から見ると、この物体には重力が下向きにかかっているが、これが図 1.5 のように遠心力により変形されていると考えることができる。すなわち、万有引力による重力ベクトルを $\boldsymbol{g}^*$ として、

$$\boldsymbol{g} \equiv \boldsymbol{g}^* + \Omega^2\boldsymbol{R} \tag{1.4.2}$$

のように改めて定義した重力加速度を用いると、遠心力を陽に表す必要がなくなる。

遠心力により、地球自体もごくわずかに扁平な形となっているが、気象学では通常、地球を完全な球として扱う。

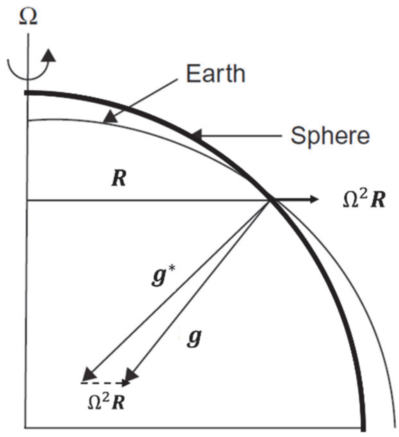


図 1.5　自転軸からの距離 R の地点における、万有引力による重力ベクトル $\boldsymbol{g}^*$ と、遠心力 $\Omega^2\boldsymbol{R}$の影響を加えた重力$\boldsymbol{g}$ の模式図。完全な球面（図中太線、Sphere）と比較すると、地球表面（図中 Earth）は遠心力の影響により扁平になっている。（Holton and Hakim 2012 を改変）

1.4.2 コリオリ力

前項では地球上で静止している物体に関する見かけの力としての遠心力について考えた。今度は、地球上で地球に対して速度 (u, v, w) で運動している物体について考える。まず、緯度φにおいて単位質量の物体が地面に対して東向きに速度uで運動しているとすると、それにかかる遠心力は

$$\left(\Omega + \frac{u}{R}\right)^2 \boldsymbol{R} = \Omega^2\boldsymbol{R} + \frac{2\Omega u\boldsymbol{R}}{R} + \frac{u^2\boldsymbol{R}}{R^2} \tag{1.4.3}$$

となる。R は自転軸からの距離である。右辺第 1 項は前項で見た、地球上に静止した物体にもかかっているように見える遠心力であり、第 2 項と第 3 項が物体の運動に伴って新たに生じる見かけの力の成分である。u として総観規模現象の風速を考えると、$10\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ のオーダーであり、一方、ΩR は中緯度では $10^2\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ のオーダーとなるので、右辺第 3 項は第 2 項と比較して無視できる。このため、第 2 項について考えると、地球上に固定した座標系から見た場合に、この物体には自転軸から離れる方向に $2\Omega u$ の大きさの力が働いていると考えることができる（図 1.6）。このような見かけの力を**コリオリ力**（Coriolis force）と呼ぶ。この力を、地球上に固定した座標系で北向き（緯度方向）と鉛直方向に分解すると、南向きに $2\Omega u\sin\varphi$、上向きに $2\Omega u\cos\varphi$ の力が働くことになる。ここで、北向きと上向きの速度をそれぞれv, wとすると、コリオリ力の加速度として

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{Co} = -2\Omega u\sin\varphi \ , \quad \left(\frac{dw}{dt}\right)_{Co} = 2\Omega u\cos\varphi \qquad (1.4.4a, b)$$

と書ける。

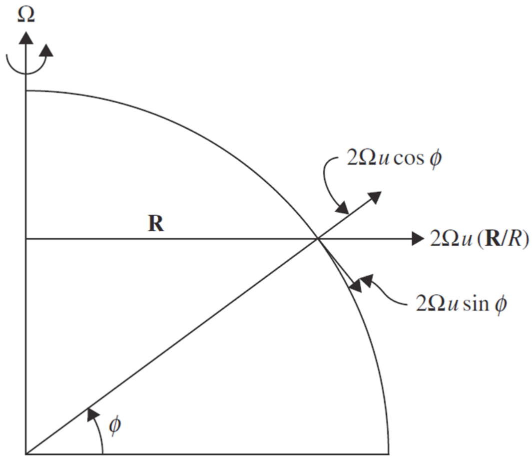


図 1.6　緯度ϕの地点において東西風uにより生じるように見える
コリオリ力。（Holton and Hakim 20012）

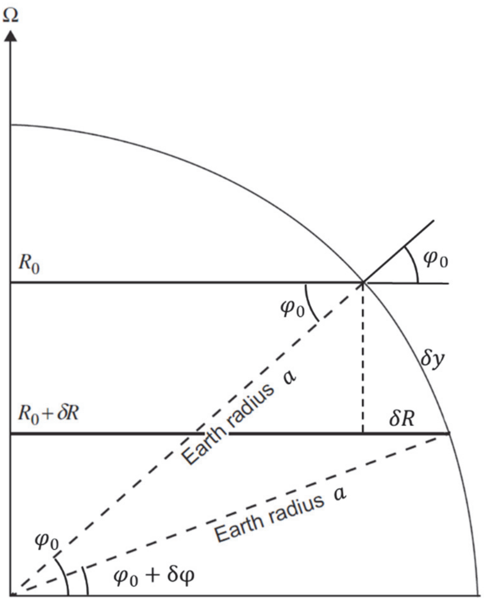


図 1.7　緯度ϕ_0の地点において南へ δy 移動した場合の自転軸からの距離の変化 δR の関係。（Holton and Hakim 2012 を改変）

以上は東西方向の運動uに関連して生じたように見えるコリオリ力の説明であった。次に、南北方向の運動vに関連して現れる見かけの力について考えよう。図 1.7 で、最初は地球上に静止していた物体

が、急に赤道方向（北半球では南向き）に動き出して、自転軸からの距離が R_0 から $R_0+\delta R$ に増大したとする。慣性系で見ると、この物体は最初は地球の自転とともに回転運動していたので、その半径が増大すると角運動量を保存するはずである。すなわち、地球に固定した座標系では東向き速度が $u=0$ であったのが $u=\delta u$ に変化して、

$$\Omega {R_0}^2=\left(\Omega+\frac{\delta u}{R_0+\delta R}\right)(R_0+\delta R)^2$$

変形すると、

$$\Omega(2R_0\delta R+\delta R^2)+\delta u(R_0+\delta R)=0$$

ここで δ のついた量について、２次の項を微小として無視すると、

$$\delta u=-2\Omega\delta R=2\Omega a\delta\varphi\sin\varphi$$

ここで、南北方向の変位は $\delta y=a\delta\varphi$ なので $\delta R=-\delta y\sin\varphi_0=-a\delta\varphi\sin\varphi_0$ であることを使っている。a は地球の半径であり、また赤道方向への運動なので $\delta\varphi<0$、$\delta y<0$ である。これを δt で割って $\delta t\to 0$ とすると、北向き速度 $v=a\,d\varphi/dt$ として

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{Co}=2\Omega a\frac{d\varphi}{dt}\sin\varphi=2\Omega v\sin\varphi \tag{1.4.5}$$

となる。

同様の自転軸からの距離の増大は、鉛直方向の運動wによっても生じる。それを考慮して (1.4.5) を一般化すると、

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{Co}=2\Omega v\sin\varphi-2\Omega w\cos\varphi \tag{1.4.6}$$

以上により、地球上で地球に対して速度 (u,v,w) で運動する物体に関する 3 次元のコリオリ力が、(1.4.4a,b) と (1.4.6) から、次のように書ける。

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{Co}=fv-2\Omega w\cos\varphi\ ,\quad \left(\frac{dv}{dt}\right)_{Co}=-fu\ ,\quad \left(\frac{dw}{dt}\right)_{Co}=2\Omega u\cos\varphi \tag{1.4.7a,b,c}$$

ここで、$f=2\Omega\sin\varphi$ を**コリオリパラメータ**という。総観規模気象現象では、鉛直速度wは水平風速u,vと比較すると非常に小さいので、(1.4.7a) の右辺第 2 項は無視できる。また鉛直方向の加速度 (1.4.7c) は重力加速度と比較すると非常に小さいので、通常は無視される。このため、コリオリ力は通常、

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{Co}=fv\ ,\quad \left(\frac{dv}{dt}\right)_{Co}=-fu \tag{1.4.8a, b}$$

と表される。これにより、水平運動の方向に対して、北半球では右向きの加速度がかかると説明される。そしてその加速度は赤道では 0 で、高緯度ほど大きい。ただし本章と次章の途中まではこの後もコリオリ力としては鉛直運動に関する項も含めた (1.4.7a,b,c) の考え方で議論を進める。各項のスケールの比較は第 2.3 節で改めて行う。

【問題】(1.4.6) 式を求めよ。

1.4.3 回転座標系におけるベクトルの時間変化率

前の２つの項で、見かけの加速度を個別に説明したが、統一的に表すこともできるはずである。この項ではまずその準備のために、ベクトルの時間変化について確認しておく。

任意のベクトル$\boldsymbol{A}$が、回転直交座標系に固定された単位ベクトル $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$（簡単のため、各単位ベクトルの始点は回転軸上にあるとする）を用いて、

$$\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{i} + A_y \boldsymbol{j} + A_z \boldsymbol{k}$$

と表されるとする。回転座標系から見た（添え字Rで表す）ベクトル$\boldsymbol{A}$の時間変化率$(d\boldsymbol{A}/dt)_R$ は

$$\left(\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\right)_R = \frac{dA_x}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dA_y}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dA_z}{dt}\boldsymbol{k}$$

と表される。一方、慣性系から見た場合（添え字Iで表す）には、回転座標系の単位ベクトル$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$の方向が時間とともに変化することから、ベクトル$\boldsymbol{A}$の時間変化率は、

$$\left(\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\right)_I = \frac{dA_x}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dA_y}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dA_z}{dt}\boldsymbol{k} + A_x\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} + A_y\frac{d\boldsymbol{j}}{dt} + A_z\frac{d\boldsymbol{k}}{dt} \tag{1.4.9}$$

となる。

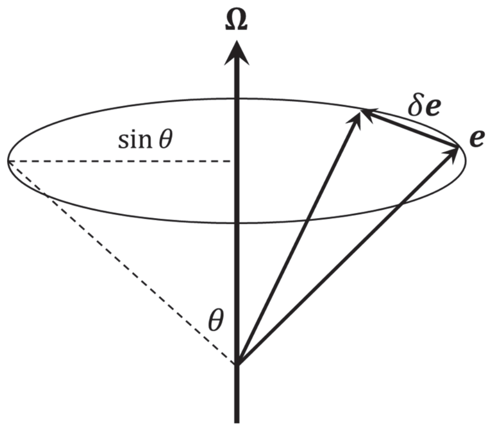


図 1.8　回転系における単位ベクトル$\boldsymbol{e}$の時間変化に関する模式図。

ここで、回転の角速度ベクトルを $\boldsymbol{\Omega}$ とする。これは回転軸上にあり、角速度 Ω の大きさを持つ回転軸方向のベクトルで、右ねじを回したときにねじが進む方向（地球自転軸を考えると、北極の方向）を向いている。図 1.8 のように、回転系に固定された任意の単位ベクトル$\boldsymbol{e}$と$\boldsymbol{\Omega}$ のなす角度がθであるとすると、$\boldsymbol{e}$の始点を回転軸に固定すればその終点は半径 $\sin\theta$ の円周上を回転運動することになる（$|\boldsymbol{e}| = 1$であることを使っている）。これを考慮すると、微小時間 δt の間の$\boldsymbol{e}$の変化量 $\delta\boldsymbol{e}$ は、大きさが $|\delta\boldsymbol{e}| = |\boldsymbol{\Omega}|\delta t \sin\theta$ で、回転軸とベクトル$\boldsymbol{e}$のつくる平面に直交し、かつ $\boldsymbol{\Omega}$ から$\boldsymbol{e}$の向きに右ねじを回したときにねじの進む方向（つまり $\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{e}$ の方向）を向いたベクトルとなる。またここで$|\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{e}| = |\boldsymbol{\Omega}| \sin\theta$ である。これらから、$\delta\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{e})\delta t$ と表せることがわかる。これにより、

$$\frac{d\boldsymbol{e}}{dt} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta\boldsymbol{e}}{\delta t} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{e}$$

となる。従って、

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{i}\ ,\quad \frac{d\boldsymbol{j}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{j}\ ,\quad \frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{k}$$

が得られる（もとのベクトルと$\boldsymbol{\Omega}$の両方に直交する方向に時間変化することに注意）。これらを (1.4.9) に代入すると、慣性系から見た場合と回転座標系から見た場合のベクトル$\boldsymbol{A}$の時間変化率の間には、

$$\left(\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{A} \tag{1.4.10}$$

が成立することがわかる。

1.4.4 回転座標系における運動方程式

前項の準備に基づき、自転する地球上の空気塊の運動について議論する。空気塊の位置ベクトル$\boldsymbol{r}$に、前項の関係 (1.4.10) を適用すると、慣性系における速度（絶対速度）$\boldsymbol{v}_I$と、回転系における速度 $\boldsymbol{v}_R$ の間の関係式として、

$$\boldsymbol{v}_I \equiv \left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}_R + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}$$

が得られる。この$\boldsymbol{v}_I$を再び (1.4.10) のAとして代入すると、次の式となる。

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\boldsymbol{v}_I}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\boldsymbol{v}_I}{dt}\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}_I &= \left\{\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}_R + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r})\right\}_R + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{v}_R + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}) \\ &= \left(\frac{d\boldsymbol{v}_R}{dt}\right)_R + \left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\right)_R \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\Omega} \times \left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}_R + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}) \\ &= \left(\frac{d\boldsymbol{v}_R}{dt}\right)_R + \left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\right)_R \times \boldsymbol{r} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}_R + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r})\end{aligned} \tag{1.4.11}$$

この (1.4.11) 式の最右辺第 1 項は、回転系における加速度である。右辺第 2 項は、回転の角速度ベクトルの時間変化による見かけ上の加速度である。地球自転の歳差運動や章動により自転軸の向きや回転速度がわずかに変化する影響がこの第 2 項に現れることになるが、気象力学では地球自転の角速度ベクトルは一定であるものとし、第 2 項の影響は考えないことが多い。

(1.4.11) 式の右辺第 3 項 $2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}_R$ はコリオリ加速度である。これの符号を変えた $-2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}_R$ がコリオリ力である。

さらに、(1.4.11) の右辺第 4 項について、$\boldsymbol{r}$を回転軸に平行な成分 $\boldsymbol{r}_\parallel$ と垂直な成分 $\boldsymbol{r}_\perp$ に分けると、

$$\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\Omega} \times [\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{r}_\parallel + \boldsymbol{r}_\perp)] = \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}_\perp) = -\Omega^2 \boldsymbol{r}_\perp$$

となる。これは自転軸に直交し、空気塊から回転軸方向に向かう見かけの求心加速度である。回転座標系の運動方程式ではこれの符号を変えたものが遠心力として現れる。

以上に基づき、慣性系における加速度を回転系のそれに書き換えると、地球とともに回転する座標系で表現した運動方程式は、(1.3.39a) に外力としてコリオリ力と遠心力を加えた

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - 2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{g} + \boldsymbol{F_r}\ ,\quad \text{ただし}\ \boldsymbol{g} \equiv \boldsymbol{g}^* + \Omega^2 \boldsymbol{R} \tag{1.4.12}$$

となる。ここでは回転系における速度$\boldsymbol{v}_R$を$\boldsymbol{v}$と書いている。

(1.4.12) 式に現れる $\boldsymbol{g}$ は、(1.4.2) 式で示したように、万有引力による重力加速度 $\boldsymbol{g}^*$ と、地球とともに回転する座標系に現れる遠心力の和であり、通常、これを重力加速度とする。遠心力は常に自転軸から遠ざかる方向に働くので、赤道と極以外では $\boldsymbol{g}$ は地球の中心に向かわない（図 1.4 参照）。このように定義しなおした重力場に対して、

$$\nabla\Phi = -\boldsymbol{g} \tag{1.4.13}$$

で定義されるスカラー量 Φ を**ジオポテンシャル**（geopotential）と呼ぶ。これは重力場の下での単位質量の物体が持つポテンシャルエネルギーとみなせる。地球の形状はこのジオポテンシャルに対する等ポテンシャル面である回転楕円体に近い形状をしている（図 1.4）。気象力学では通常はこの差を無視して、地球を完全な球体として扱う。

1.5 基礎方程式系の球座標表示

地球表面全体にわたって大気の運動を記述する場合は、球座標系を用いる。この節では球座標系により基礎方程式系を記述する。球座標系では、地球の中心を原点として、経度方向を λ、緯度方向を φ、鉛直方向を r とする。このうちrのみ長さの次元を持ち、λとφは角度である。一方、単位ベクトル $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$ は各地点においてλ、φ、r がそれぞれ増大する方向である東、北、上向きを取る（図 1.9）。この単位ベクトル $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$ は場所によって向きが異なることに注意が必要である（例えば日本における東・北・上と、ブラジルにおける東・北・上は、慣性系で見ると異なる方向である）。対象とする質点や空気塊の位置変化によっても向きが変化する。このような単位ベクトルを用いた速度ベクトルは

$$\boldsymbol{v} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + w\boldsymbol{k} \tag{1.5.1}$$

と表せる。u,v,wはそれぞれ東向き、北向き、上向きの速度成分で、これらは幾何学的な考察により

$$u = r\cos\varphi\frac{d\lambda}{dt}\,,\quad v = r\frac{d\varphi}{dt}\,,\quad w = \frac{dr}{dt} \tag{1.5.2}$$

と表される。これらを用いると、任意のスカラー関数 $f(\lambda,\varphi,r,t)$ のラグランジュ微分の球座標表示は

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial\lambda}\frac{d\lambda}{dt} + \frac{\partial f}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{dr}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{u}{r\cos\varphi}\frac{\partial f}{\partial\lambda} + \frac{v}{r}\frac{\partial f}{\partial\varphi} + w\frac{\partial f}{\partial r} \tag{1.5.3}$$

となる。

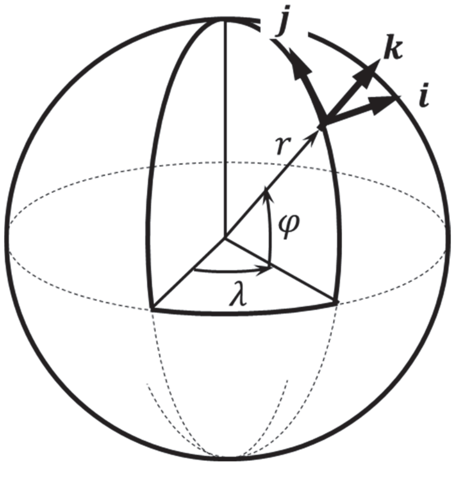


図 1.9　球座標系と単位ベクトル。

1.5.1 加速度の球座標表示

次に、運動方程式に必要な、速度ベクトル$\boldsymbol{v}$のラグランジュ微分の球座標表示を求める。(1.5.1) より

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{du}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dv}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{dw}{dt}\boldsymbol{k}+u\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}+v\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}+w\frac{d\boldsymbol{k}}{dt} \tag{1.5.4}$$

である。右辺第 4～6 項は、着目している空気塊の移動により単位ベクトルの方向が変化するために生じる項である。

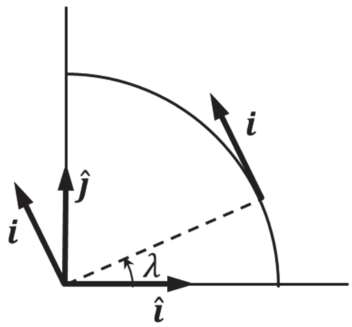


図 1.10　慣性系に固定された単位ベクトル $\hat{\boldsymbol{\imath}},\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ と、自転する地球上に固定された単位ベクトル $\boldsymbol{i}$ の関係を、北極側から見た図。$\hat{\boldsymbol{\imath}},\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ は赤道面上に、$\widehat{\boldsymbol{k}}$（図にはない）は赤道面に垂直（自転軸と平行）に取られている。$\boldsymbol{i}$ は自転する地球上の東向き単位ベクトル。（小倉 (1978) に基づき作成）

ここで、図 1.10 のように慣性系に固定した単位ベクトル $(\hat{\boldsymbol{\imath}},\hat{\boldsymbol{\jmath}},\widehat{\boldsymbol{k}})$ も考え、それと球座標系での単位ベクトル $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$ の関係を確認しておく。まず、$\boldsymbol{i}$ の方向は $\widehat{\boldsymbol{k}}$ には無関係で、$\hat{\boldsymbol{\imath}},\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ だけで表すことができ、また経度λだけに依存して、

$$\boldsymbol{i}=-\sin\lambda\,\hat{\boldsymbol{\imath}}+\cos\lambda\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} \tag{1.5.5}$$

と表せる。これは $|\boldsymbol{i}|=1$ の単位ベクトルの条件を満たしている。同様にして、

$$\boldsymbol{j}=-\sin\varphi\,(\cos\lambda\,\hat{\boldsymbol{\imath}}+\sin\lambda\,\hat{\boldsymbol{\jmath}})+\cos\varphi\,\widehat{\boldsymbol{k}} \tag{1.5.6}$$

$$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\cos\varphi\,(\cos\lambda\,\hat{\boldsymbol{\imath}}+\sin\lambda\,\hat{\boldsymbol{\jmath}})+\sin\varphi\,\widehat{\boldsymbol{k}} \tag{1.5.7}$$

である。これらから、逆に、

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\imath}}&=-\sin\lambda\,\boldsymbol{i}-\cos\lambda\sin\varphi\,\boldsymbol{j}+\cos\lambda\cos\varphi\,\boldsymbol{k}\\ \hat{\boldsymbol{\jmath}}&=\cos\lambda\,\boldsymbol{i}-\sin\lambda\sin\varphi\,\boldsymbol{j}+\sin\lambda\cos\varphi\,\boldsymbol{k}\\ \widehat{\boldsymbol{k}}&=\cos\varphi\,\boldsymbol{j}+\sin\varphi\,\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{1.5.8}$$

が求められる。一方、(1.5.5～7) を偏微分して

$$\begin{gathered}\frac{\partial\boldsymbol{i}}{\partial\lambda}=-\cos\lambda\,\hat{\boldsymbol{\imath}}-\sin\lambda\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}\,,\qquad\frac{\partial\boldsymbol{j}}{\partial\lambda}=\sin\lambda\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{\imath}}-\cos\lambda\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}\,,\\ \frac{\partial\boldsymbol{k}}{\partial\lambda}=-\sin\lambda\cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{\imath}}+\cos\lambda\cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{\jmath}},\end{gathered} \tag{1.5.9}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{i}}{\partial \varphi} = 0\,, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial \varphi} = -\cos\lambda\cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{\imath}} - \sin\lambda\cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} - \sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{k}}\,,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial \varphi} = -\cos\lambda\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{\imath}} - \sin\lambda\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{k}}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{i}}{\partial r} = \frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial r} = \frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial r} = 0$$

これをさらに、(1.5.8) を用いて右辺も球座標系の単位ベクトルで書き直すと、

$$\begin{gathered} \frac{\partial \boldsymbol{i}}{\partial \lambda} = \sin\varphi\,\boldsymbol{j} - \cos\varphi\,\boldsymbol{k}\,, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial \lambda} = -\sin\varphi\,\boldsymbol{i}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial \lambda} = \cos\varphi\,\boldsymbol{i} \\ \frac{\partial \boldsymbol{i}}{\partial \varphi} = 0\,, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial \varphi} = -\boldsymbol{k}\,, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial \varphi} = \boldsymbol{j}\,, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{i}}{\partial r} = \frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial r} = \frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial r} = 0 \end{gathered} \tag{1.5.10}$$

が得られる。(1.5.10) と (1.5.2) を使うと、

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{i}}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dt} + \frac{\partial \boldsymbol{i}}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial \boldsymbol{i}}{\partial r}\frac{dr}{dt} = \frac{u}{r\cos\varphi}(\sin\varphi\,\boldsymbol{j} - \cos\varphi\,\boldsymbol{k}) \tag{1.5.11}$$

$$\frac{d\boldsymbol{j}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dt} + \frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial r}\frac{dr}{dt} = -\frac{u}{r\cos\varphi}\sin\varphi\,\boldsymbol{i} - \frac{v}{r}\boldsymbol{k} \tag{1.5.12}$$

$$\frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dt} + \frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial r}\frac{dr}{dt} = \frac{u}{r\cos\varphi}\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \frac{v}{r}\boldsymbol{j} \tag{1.5.13}$$

が得られる。これらを (1.5.4) に代入すると、

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \left(\frac{du}{dt} - \frac{uv}{r}\tan\varphi + \frac{uw}{r}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{dv}{dt} + \frac{u^2}{r}\tan\varphi + \frac{vw}{r}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{dw}{dt} - \frac{u^2+v^2}{r}\right)\boldsymbol{k} \tag{1.5.14}$$

となる。(1.5.14) の右辺で、時間微分でない項（$1/r$ に比例する）を、メトリック加速度、またはメトリック項という。これらは地球の表面が曲率を持つため曲線座標系を用いることによって生じる項である。

(1.5.4) 式について、付録 1E では、図を用いて説明している。

1.5.2 コリオリ加速度の球座標表示

地球自転の角速度ベクトル$\boldsymbol{\Omega}$を慣性系の単位ベクトル $(\hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ で表すと、$\boldsymbol{\Omega} = \Omega\hat{\boldsymbol{k}}$ である。これを球座標系での単位ベクトル $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ で表すと、(1.5.8) 式より $\boldsymbol{\Omega} = \Omega(\cos\varphi\,\boldsymbol{j} + \sin\varphi\,\boldsymbol{k})$ である。(1.4.11) よりコリオリ加速度は $2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}$ で、球座標では以下の形に表される。これは第 1.4.2 項で表されたものと同じである。

$$2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v} = 2\Omega[(-v\sin\varphi + w\cos\varphi)\boldsymbol{i} + u\sin\varphi\,\boldsymbol{j} - u\cos\varphi\,\boldsymbol{k}] \tag{1.5.15}$$

1.5.3 運動方程式の球座標表示

球座標での気圧傾度は、幾何学的考察により以下の関係が容易にわかる。（付録 1D.1 も参照）

$$\nabla p = \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial p}{\partial \lambda}\boldsymbol{i} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \varphi}\boldsymbol{j} + \frac{\partial p}{\partial r}\boldsymbol{k} \tag{1.5.16}$$

重力以外の外力 $\boldsymbol{F_r}$ は、次のように書く。

$$\boldsymbol{F} = F_\lambda \boldsymbol{i} + F_\varphi \boldsymbol{j} + F_r \boldsymbol{k} \tag{1.5.17}$$

(1.5.14) (1.5.15) (1.5.16) (1.5.17) を用いて運動方程式 (1.3.39a) の東西･南北･鉛直成分を書き下すと、

$$\frac{du}{dt} - \frac{uv}{r}\tan\varphi + \frac{uw}{r} - 2\Omega v \sin\varphi + 2\Omega w \cos\varphi = -\frac{1}{\rho}\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial p}{\partial \lambda} + F_\lambda \tag{1.5.18a}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{u^2}{r}\tan\varphi + \frac{vw}{r} + 2\Omega u \sin\varphi = -\frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \varphi} + F_\varphi \tag{1.5.18b}$$

$$\frac{dw}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{r} - 2\Omega u \cos\varphi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} - g + F_r \tag{1.5.18c}$$

となる。ただし、

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{r\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} + w\frac{\partial}{\partial r} \tag{1.5.19}$$

である。

1.5.4 運動方程式以外の方程式の球座標表示

質量保存則（連続の式） (1.3.39b) はスカラー方程式なので、そのラグランジュ微分を (1.5.19) で置き換えれば良い。また発散項は

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}(v\cos\varphi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 w) \tag{1.5.20}$$

と表される（付録 1D.1 参照）。これらにより、質量保存則の球座標表示は、次の形になる。

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\left[\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}(v\cos\varphi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 w)\right] = 0 \tag{1.5.21}$$

状態方程式 (1.3.39c) はもちろんそのままである。

$$p = \rho R T \tag{1.3.39c}$$

熱力学第 1 法則 (1.3.39d) も、スカラー方程式なので、そのラグランジュ微分を (1.5.19) で置き換えれば良い。

$$C_p\frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt} = J \quad \text{または} \quad \frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{R/C_p}\frac{J}{C_p} = \frac{J}{C_p \Pi(p)} \tag{1.3.39d}$$

1.6 球座標系におけるエネルギー保存則と角運動量保存則

この章の最後に、球座標で表した基礎方程式系について、エネルギーと角運動量の保存がどのように成り立っているかを見ておこう。

1.6.1 エネルギー保存

運動方程式 (1.5.18a-c) に、それぞれu, v, w をかけて和をとると、コリオリ加速度とメトリック加速度に関係する項が消えて、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right)=-\frac{\boldsymbol{v}}{\rho}\cdot\nabla p-gw+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F} \tag{1.6.1}$$

が得られる。ここで、$gw=g(dz/dt)=(d/dt)gz$ に注意して、これを左辺に移し、$K=(u^2+v^2+w^2)/2$ 、$\Phi=gz$ （Φはジオポテンシャル。第 1.4 節参照）とおくと、単位質量当たりの空気塊の持つ運動エネルギーと位置エネルギーの和（力学的エネルギー）の時間変化に関する方程式

$$\frac{d}{dt}(K+\Phi)=-\frac{\boldsymbol{v}}{\rho}\cdot\nabla p+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F} \tag{1.6.2}$$

が得られる。一方、熱力学第 1 法則は、

$$C_v\frac{dT}{dt}=J-p\frac{d\alpha}{dt} \tag{1.3.28}$$

から、連続の式（質量保存則）も使って右辺を変形して

$$C_v\frac{dT}{dt}=J+\frac{p}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt}=J-\frac{p}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{v} \tag{1.6.3}$$

が得られる。この左辺は理想気体に関しては内部エネルギーの時間変化 dU/dt に等しいことに注意して、(1.6.2) と (1.6.3) を加えると、

$$\frac{d}{dt}(K+\Phi+U)=J-\frac{1}{\rho}\nabla\cdot(p\boldsymbol{v})+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F} \tag{1.6.4}$$

となる。この式の右辺第 2 項と第 3 項は、単位質量当たりの空気塊が周囲からなされた仕事と解釈される。ただし、これまでの式変形を逆にたどれば、右辺第 2 項には体積変化（$\nabla\cdot\boldsymbol{v}$）と圧力勾配（$\nabla p$）の 2 つの寄与がある。体積変化に伴う部分は内部エネルギーの変化に寄与し、圧力勾配に伴う部分は空気塊の運動と位置エネルギーに寄与している。従って、これは、力学的エネルギーと内部エネルギーを共に含んだ形での単位質量当たりの空気塊に対するエネルギー保存則となっている。

次に、(1.6.4) を単位体積当たりの保存則の形に書き換えてみる。そのためには連続の式 (1.3.8) を用いて導かれる次の関係式

$$\rho\frac{d\psi}{dt}=\frac{\partial(\rho\psi)}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\psi\boldsymbol{v}) \tag{1.6.5}$$

を用いる。ここで、ψは任意のスカラー関数である。これを (1.6.4) に適用すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E)+\nabla\cdot[(\rho E+p)\boldsymbol{v}]=\rho J+\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F} \tag{1.6.6}$$

$$E\equiv K+\Phi+U=\frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)+\Phi+C_vT \tag{1.6.7}$$

が得られる。これを座標系に対して固定された任意の閉領域で積分し、ガウスの発散定理を用いると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\rho E dV=-\iint\rho E\boldsymbol{v}\cdot dS-\iint p\boldsymbol{v}\cdot dS+\iiint\rho J dV+\iiint\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F}dV \tag{1.6.8}$$

を得る。これは、考えている閉領域内部の流体の全エネルギーの変化が、領域の境界を通じて出入りするエネルギーと、境界を通じて圧力によりなされる仕事（次項参照）、及び非断熱加熱と摩擦力の仕事により決まることを示している。これは全エネルギーに対するオイラー的なエネルギー保存則である。

この式を大気全体に適用すると、地表面ではそれに垂直な速度成分はなく、大気上端では密度も気圧も 0 になるので、右辺第 1 項と第 2 項は消える。従って、非断熱加熱と摩擦力がなければ、大気の全エネルギーが保存されることがわかる。

【問題】運動方程式 (1.5.18a-c) からエネルギー保存に関係する (1.6.1) 式へと変形する際に、コリオリ加速度に関係する項とメトリック加速度に関係する項が消えるのはなぜか、ベクトルを用いて説明せよ。（ヒント①：これらの式の左辺の変形は、加速度ベクトル$d\boldsymbol{v}/dt$と速度ベクトル$\boldsymbol{v}$を用いてどのように表されるか。ヒント②：コリオリ加速度は $2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}$ である。③メトリック加速度は単位ベクトルの時間変化 $d\boldsymbol{i}/dt$ 等に関連する。）

【問題】(1.6.5) と (1.6.6) を示せ。

1.6.2 運動している空気塊に対して気圧によりなされる仕事

$\boldsymbol{v}=(u,v,w)$ の速度で運動している大気中において、図 1.11 のような微小直方体状の空気塊に対して、気圧によって周囲からなされる単位時間当たりの仕事を考える。x軸に直交する面（面積$\delta y\delta z$）に働く気圧によってなされる単位時間当たりの仕事は、気圧が面に直交して働くことを考慮すると、

$$(p\ \delta y\delta z\ u)_{x-\frac{\delta x}{2},y,z}+(-p\ \delta y\delta z\ u)_{x+\frac{\delta x}{2},y,z}\approx-\frac{\partial(pu)}{\partial x}\delta x\delta y\delta z$$

同様に、y軸及びz軸に直交する面を通しての仕事率は、それぞれ

$$-\frac{\partial(pv)}{\partial y}\delta x\delta y\delta z\ ,\quad -\frac{\partial(pw)}{\partial z}\delta x\delta y\delta z$$

であるので、この微小直方体状の空気塊が単位時間に周囲からの気圧によってなされる仕事は、

$$-\left[\frac{\partial(pu)}{\partial x}+\frac{\partial(pv)}{\partial y}+\frac{\partial(pw)}{\partial z}\right]\delta x\delta y\delta z=-[\nabla\cdot(p\boldsymbol{v})]\delta x\delta y\delta z$$

となる。ここから、単位体積当たりとの仕事率は $-[\nabla\cdot(p\boldsymbol{v})]$、単位質量当たりの仕事率は $-(1/\rho)[\nabla\cdot(p\boldsymbol{v})]$である。

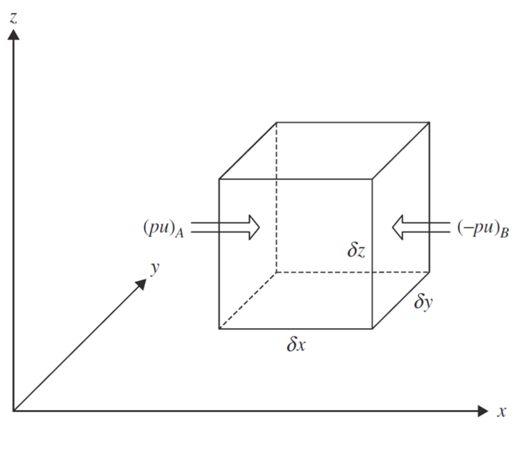


図 1.11　x方向の圧力によって微小直方体になされる仕事。（Holton and Hakim 2012）

1.6.3 絶対角運動量の保存

球座標で表示した場合の東向き風速 u は、外部の慣性系から見ると $u+\Omega r\cos\varphi$ の速度を持っていることになる。すると、緯度 φ において地球の自転軸に直交する平面で見た単位質量当たりの空気塊の角運動量 M は、

$$M = r\cos\varphi\,(u+\Omega r\cos\varphi) \tag{1.6.9}$$

で与えられる。この慣性系から見た角運動量を**絶対角運動量**と呼ぶ。これの時間微分（ラグランジュ微分）をとると、

$$\frac{dM}{dt} = r\cos\varphi\frac{du}{dt} - ur\frac{d\varphi}{dt}\sin\varphi + u\frac{dr}{dt}\cos\varphi + 2\Omega r\frac{dr}{dt}\cos^2\varphi - 2\Omega r^2\frac{d\varphi}{dt}\cos\varphi\sin\varphi$$

となる。(1.5.2) より、$v = r\,d\varphi/dt$、$w = dr/dt$ であることから、上の式は次の形に書き換えられる。

$$\frac{dM}{dt} = r\cos\varphi\frac{du}{dt} - uv\sin\varphi + uw\cos\varphi + 2\Omega rw\cos^2\varphi - 2\Omega rv\cos\varphi\sin\varphi \tag{1.6.10}$$

一方、球座標で表示した東西方向の運動方程式

$$\frac{du}{dt} - \frac{uv}{r}\tan\varphi + \frac{uw}{r} - 2\Omega v\sin\varphi + 2\Omega w\cos\varphi = -\frac{1}{\rho}\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial p}{\partial\lambda} + F_\lambda \tag{1.5.18a}$$

を用いて (1.6.10) から du/dt を消去すると、

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\lambda} + r\cos\varphi\,F_\lambda \tag{1.6.11}$$

であることがわかる。これは、単位質量当たりの絶対角運動量の時間変化率が、空気塊に働くトルク（回転軸の周りの力のモーメント。力と距離の積）に等しいことを示しており、角運動量保存則の一つの表現になっている。

ここで (1.6.5) を使って (1.6.11) を単位体積当たりの保存則に書き換えると、

$$\frac{\partial(\rho M)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho M\boldsymbol{v}) = -\frac{\partial p}{\partial\lambda} + \rho r\cos\varphi\,F_\lambda \tag{1.6.12}$$

となる。これを、座標系に対して固定された任意の閉領域で積分し、ガウスの発散定理を用いると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint \rho M dV = -\iint \rho M\boldsymbol{v}\cdot dS - \iiint \frac{\partial p}{\partial\lambda}dV + \iiint \rho r\cos\varphi\,F_\lambda dV \tag{1.6.13}$$

が得られる。これは、考えている閉領域内部の流体の絶対角運動量の変化（左辺）が、領域の境界を通じて出入りする絶対角運動量（右辺第 1 項）と、気圧の東西傾度（右辺第 2 項）と、摩擦力によるモーメント（右辺第 3 項）によって決まることを示している。この式を大気全体に適用すると、地表面ではそれに垂直な速度成分はなく、大気上端では密度が 0 になるので、右辺第 1 項が消える。地表面が水平であれば（山や谷がなければ）、$\partial p/\partial\lambda$を$\lambda$方向に 1 周することにより右辺第 2 項も消える。さらに、摩擦力がなければ、右辺第 3 項も消えるので、大気の絶対角運動量が保存される。

【注意】空気塊には内力である気圧傾度力が働いているので、外力が 0 であってもトルクは生じる。従って、空気塊の角運動量は一般に保存しないが、重要なのは、運動方程式の左辺を角運動量の時間変

化の形に変換できるということである。このとき方程式の右辺側はトルクの形になり、空気塊の絶対角運動量の変化率が空気塊に働くトルクに等しいという角運動量保存則が成立する。このことは、運動方程式が成立する以上、当然のことと思えるかもしれないが、第 2 章で見るように、運動方程式を近似する場合、近似の仕方によっては運動方程式の左辺を角運動量の時間微分の形に書けないことが起こりうる。その場合、方程式系は角運動量保存則が成立しない方程式系となる。

第 1 章の参考文献

Orlanski, I., 1975: A rational subdivision of scales for atmospheric processes. Bull. Amer. Meteor. Soc., 56, 527–530.

付録 1A　テイラー展開による近似

気象力学では、テイラー展開で 2 次以上の項を無視する近似がしばしば行われ、近似記号 $\approx$ で表される。1 変数では、

$$f(x+\delta x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\delta x^k\frac{d^k}{dx^k}f(x)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}\delta x+O(\delta x^2)\approx f(x)+f'(x)\delta x \tag{1A.1}$$

となる。これは近似だが、両辺をδxで割って$\delta x\to 0$ の極限をとれば

$$\lim_{\delta x\to 0}\frac{[f(x+\delta x)-f(x)]}{\delta x}=\frac{df}{dx}=f'(x)$$

のように厳密に等号で結ぶことができる。

多変数の場合は、$\delta x_1, \delta x_2, \cdots, \delta x_N$ のオーダーがすべて δx 程度の場合、

$$\begin{aligned}
&f(x_1+\delta x_1, x_2+\delta x_2, \cdots, x_N+\delta x_N)\\
&\quad=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\delta x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots\delta x_N\frac{\partial}{\partial x_N}\right)^k f(x_1, x_2, \cdots, x_N)\\
&\quad=f(x_1, x_2, \cdots, x_N)+\frac{1}{1!}\left(\delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\delta x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots\delta x_N\frac{\partial}{\partial x_N}\right)f(x_1, x_2, \cdots, x_N)+O((\delta x)^2)\\
&\quad\approx f(x_1, x_2, \cdots, x_N)+\delta x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\delta x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\cdots\delta x_N\frac{\partial f}{\partial x_N}
\end{aligned} \tag{1A.2}$$

となる。ここで、無視された項 $O((\delta x)^2)$ のうち例えば 2 次の項は、

$$\frac{1}{2!}\left(\delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\delta x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots\delta x_N\frac{\partial}{\partial x_N}\right)^2 f(x_1, x_2, \cdots, x_N)$$

である。すなわち、「2 次以上の項を無視する」とは$\delta {x_i}^2$や $\delta x_i\delta x_j$ 、またはそれ以上の微小量がかかっている 2 次以上の微分の項を無視することである。

付録 1B　ラグランジュ微分とオイラー微分

第 1.3 節で、気象要素の時間変化を考える際に、① 着目する空気塊の気象要素の時間変化に着目す

る方法、すなわちラグランジュ（Lagrange）の方法と、② 場所を固定した気象要素の時間変化に着目する方法、すなわちオイラー（Euler）の方法の、2 種類の考え方があると書いた。それらにおいて用いる座標系を、それぞれ、ラグランジュ座標系、オイラー座標系という。

ラグランジュの方法では、初期時刻 $t=0$ に座標 (x_0, y_0, z_0) に存在した空気塊（流体粒子）に着目し、時刻 t におけるその位置を

$$x = f_1(x_0, y_0, z_0, t)\,, \qquad y = f_2(x_0, y_0, z_0, t)\,, \qquad z = f_3(x_0, y_0, z_0, t) \tag{1B.1}$$

で表す。ここではx_0, y_0, z_0, tが独立変数、x, y, zは従属変数であり、空気塊の速度は

$$u = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{x_0,y_0,z_0}, \qquad v = \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{x_0,y_0,z_0}, \qquad w = \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{x_0,y_0,z_0} \tag{1B.2}$$

また加速度は

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{x_0,y_0,z_0} = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)_{x_0,y_0,z_0}, \qquad \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{x_0,y_0,z_0} = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_{x_0,y_0,z_0}, \qquad \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{x_0,y_0,z_0} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)_{x_0,y_0,z_0} \tag{1B.3}$$

と表されるので、関数 f_1、f_2、f_3 がわかれば流体の運動は完全にわかる。この時間微分を、しばしば D/Dt または単に d/dt を用いて、

$$u = \frac{dx}{dt}\,, \qquad v = \frac{dy}{dt}, \qquad w = \frac{dz}{dt}\,, \qquad \frac{du}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\,, \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}\,, \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \tag{1B.4}$$

のように表す。

オイラーの方法では、時刻tにおける瞬間の各物理量をx, y, zの関数として扱う。ここではx, y, zが独立変数である。速度u, v, wや気圧pなどもx, y, zの関数として記述される。

ここで、物理量 $F = F(x, y, z, t)$ の時間変化をラグランジュ的に考える。時刻tに座標 (x, y, z) に存在した空気塊は、時刻 $t + \delta t$ には座標 $(x + u\delta t, y + v\delta t, z + w\delta t)$ に位置する。するとこの空気塊の物理量Fの変化は

$$\delta F = F(x + u\delta t, y + v\delta t, z + w\delta t, t + \delta t\,) - F(x, y, z, t)$$

となり、テイラー展開により

$$\delta F = \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{x,y,z} \delta t + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) u\delta t + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) v\delta t + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) w\delta t + O((\delta t)^2) \tag{1B.5}$$

と書ける。$\delta F/\delta t$ の $\delta t \to 0$ における極限をとり

$$\frac{dF}{dt} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta F}{\delta t} = \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{x,y,z} + u\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) + v\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) + w\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) \tag{1B.6}$$

で表される dF/dt は運動する空気塊に伴うFの変化であるのでラグランジュ微分と呼ぶ。これに対して局所的な時間微分 $(\partial F/\partial t)_{x,y,z}$ を単に $\partial F/\partial t$ と書いてオイラー微分と呼ぶ。これらを用いると

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) + v\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) + w\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) \tag{1B.7}$$

の関係で表される。

さらに詳細には、例えば今井（1993）を参照していただきたい。

付録 1B の参考文献

今井功、1993：流体力学。岩波書店、254pp。

付録 1C　ベクトルの公式

有用なベクトルの公式をまとめておく。Φ は任意のスカラー、$\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{C}$は任意のベクトルを指す。

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) \tag{1C.1}$$

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} \tag{1C.2}$$

$$\nabla\cdot(\Phi\boldsymbol{A})=\nabla\Phi\cdot\boldsymbol{A}+\Phi\nabla\cdot\boldsymbol{A} \tag{1C.3}$$

$$\nabla\times(\Phi\boldsymbol{A})=\nabla\Phi\times\boldsymbol{A}+\Phi\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{1C.4}$$

$$(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\nabla|\boldsymbol{A}|^2+(\nabla\times\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{A} \tag{1C.5}$$

$$\nabla\times\nabla\Phi=0 \tag{1C.6}$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0 \tag{1C.7}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A} \tag{1C.8}$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B}) \tag{1C.9}$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(\nabla\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} \tag{1C.10}$$

【問題】上のそれぞれの公式を証明せよ。

付録 1D　直交曲線座標系におけるベクトル解析

n次元空間に導入されたn本の座標曲線が、空間のあらゆる点で直交しているとき、それを**直交曲線座標**と呼ぶ。ここでは 3 次元空間における直交曲線座標の下でのベクトル解析の一般論について述べる（例えば大岩ほか 2016 なども参照）。まず、3 次元の直交**直線**座標系（デカルト座標系）での座標は、 単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_x=(1,0,0)$、$\boldsymbol{e}_y=(0,1,0)$、$\boldsymbol{e}_z=(0,0,1)$ のように選んで、$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+x\boldsymbol{e}_z$ で表すことができる。これらの $\boldsymbol{e}_i$ は各座標軸の接線ベクトルであるとも言え、互いに直交している。一方、ここで考える直交**曲線**座標における座標を (u_1,u_2,u_3) とすると、その各座標軸に沿った接線ベクトルは、

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u_\alpha}=\frac{\partial x}{\partial u_\alpha}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial y}{\partial u_\alpha}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial z}{\partial u_\alpha}\boldsymbol{e}_z \quad (\alpha=1,2,3) \tag{1D.1}$$

と書け、これらが相互に直交するように定義される。この接線ベクトルの各成分の大きさとして

$$h_\alpha=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u_\alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u_\alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u_\alpha}\right)^2} \tag{1D.2}$$

で計算される (h_1,h_2,h_3) が、スケール因子と呼ばれる（用語は文献により異なる）。微小な線素の長さを dsとすると、直交直線座標系では $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$ で、座標変換すると

$$ds^2 = {h_1}^2 {du_1}^2 + {h_2}^2 {du_2}^2 + {h_3}^2 {du_3}^2 \tag{1D.3}$$

となる。

ここで改めて、直交曲線座標系に付随する局所的な座標軸の座標曲線に沿った単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ とすると、この座標系で表した任意のベクトル場

$$\boldsymbol{A}(u_1, u_2, u_3) = A_1\boldsymbol{e}_1 + A_2\boldsymbol{e}_2 + A_3\boldsymbol{e}_3$$

とスカラー場 $f(u_1, u_2, u_3)$ に対して、

$$\nabla f = \frac{\boldsymbol{e}_1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1} + \frac{\boldsymbol{e}_2}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2} + \frac{\boldsymbol{e}_3}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3} \tag{1D.4}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 h_2 A_3)\right] \tag{1D.5}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{A} &= \frac{\boldsymbol{1}}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1\boldsymbol{e}_1 & h_2\boldsymbol{e}_2 & h_3\boldsymbol{e}_3 \\ \partial/\partial u_1 & \partial/\partial u_2 & \partial/\partial u_3 \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} \\ &= \frac{\boldsymbol{e}_1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3 A_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(h_2 A_2)\right] + \frac{\boldsymbol{e}_2}{h_3 h_1}\left[\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 A_1) - \frac{\partial}{\partial u_1}(h_3 A_3)\right] \\ &\quad + \frac{\boldsymbol{e}_3}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 A_2) - \frac{\partial}{\partial u_2}(h_1 A_1)\right]\end{aligned} \tag{1D.6}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial h_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\right)\right] \tag{1D.7}$$

が成り立つ。

また速度場 $\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + v_3\boldsymbol{e}_3$ に対しては、以下が成り立つ。

$$v_i = \frac{ds_i}{dt} = h_i\frac{du_i}{dt} \tag{1D.8}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3}\frac{du_i}{dt}\frac{\partial f}{\partial u_i} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3}\frac{v_i}{h_i}\frac{\partial f}{\partial u_i} = \frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla f \tag{1D.9}$$

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{dA_j}{dt}\boldsymbol{e}_j + A_j\frac{d\boldsymbol{e}_j}{dt}\right) = \sum_{j=1}^{3}\left[\left(\frac{\partial A_j}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla A_j\right)\boldsymbol{e}_j + A_j\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{v_i}{h_i}\frac{\partial \boldsymbol{e}_j}{\partial u_i}\right)\right] \tag{1D.10}$$

1D.1　球座標系におけるベクトル解析

直交曲線座標系のひとつである球座標系（λ, φ, r）におけるベクトル解析の演算をまとめる。直交直線座標系との関係は

$$(x, y, z) = (r\cos\varphi\cos\lambda, r\cos\varphi\sin\lambda, r\sin\varphi) \tag{1D.11}$$

と書けるので、スケール因子は $(h_1, h_2, h_3) = (r\cos\varphi, r, 1)$ である。単位ベクトルを $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ とし、$\boldsymbol{A} = A_\lambda\boldsymbol{i} + A_\varphi\boldsymbol{j} + A_r\boldsymbol{k}$ は任意のベクトル、fは任意のスカラー関数であるとすると、以下が成り立つ。

$$\nabla f = \frac{\boldsymbol{i}}{r\cos\varphi}\frac{\partial f}{\partial\lambda} + \frac{\boldsymbol{j}}{r}\frac{\partial f}{\partial\varphi} + \boldsymbol{k}\frac{\partial f}{\partial r} \tag{1D.12}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial A_\lambda}{\partial\lambda} + \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi A_\varphi\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) \tag{1D.13}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{i}}{r}\left[\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\varphi\right)\right] + \frac{\boldsymbol{j}}{r\cos\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cos\varphi\, A_\lambda\right) - \frac{\partial A_r}{\partial\lambda}\right] + \frac{\boldsymbol{k}}{r\cos\varphi}\left[\frac{\partial A_\varphi}{\partial\lambda} - \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\, A_\lambda\right)\right] \tag{1D.14}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{r^2\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) \tag{1D.15}$$

1D.2 円筒座標系におけるベクトル解析

台風や竜巻のような軸対称構造に近い現象の運動の解析には、円筒座標系（または円柱座標系：cylindrical coordinate）を用いるのが便利である（図 1D.1）。これも直交曲線座標系のひとつである。ここではこの座標系（r,λ,z）におけるベクトル解析の演算をまとめる。rは動径成分（radial component）、λは接線成分（azimuthal component or tangential component）、zは鉛直成分（vertical component）である。直交直線座標系との関係は

$$(x,y,z) = (r\cos\lambda, r\sin\lambda, z) \tag{1D.16}$$

と書けるので、この場合のスケール因子は $(h_1,h_2,h_3) = (1,r,1)$ である。単位ベクトルを $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ とすると、任意のベクトル$\boldsymbol{A} = A_r\boldsymbol{i} + A_\lambda\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$ と任意のスカラー関数fについて以下が成り立つ。

$$\nabla f = \boldsymbol{i}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\boldsymbol{j}}{r}\frac{\partial f}{\partial\lambda} + \boldsymbol{k}\frac{\partial f}{\partial z} \tag{1D.17}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\lambda}{\partial\lambda} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1D.18}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{i}}{r}\left[\frac{\partial A_z}{\partial\lambda} - \frac{\partial}{\partial z}(rA_\lambda)\right] + \boldsymbol{j}\left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right] + \frac{\boldsymbol{k}}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\lambda) - \frac{\partial A_r}{\partial\lambda}\right] \tag{1D.19}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{1D.20}$$

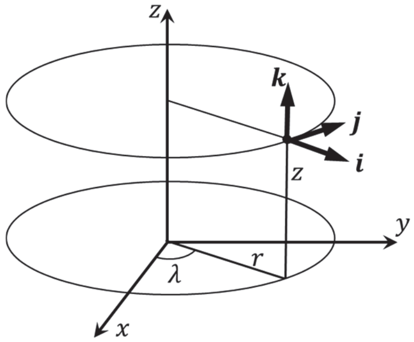


図 1D.1　円筒座標系と単位ベクトル。

【補足】一般座標系

近年のメソ数値モデルでは、地形に沿った座標を取るために、座標軸が直交しない座標系が用いられる（例えば河野ほか 2014)。直交に限定しない一般座標系の座標変換については計量テンソル（metric tensor）を用いて考える。ここでは詳細には説明しないが、上記の直交曲線座標系におけるスケール因子h_αは計量テンソルの対角成分の平方根に対応する。そして計量テンソルの非対角成分が 0 か否かが座標系の直交・非直交に対応する。これらに興味のある方は、フライシュ（2013)、石原（1997)、武藤（1973)、アルフケン・ウェーバー（1999）などを参照していただきたい。

付録 1D の参考文献

アルフケン　ジョージ・ブラウン、ウェーバー　ハンス・J、1999：ベクトル・テンソルと行列。講談社、351pp。

フライシュ　ダニエル、2013：物理のためのベクトルとテンソル。岩波書店、239pp。

石原繁、1997：テンソル–科学技術のために。裳華房、210pp。

河野耕平、松林健吾、石田純一、室井ちあし、2014：力学過程。次世代非静力学モデル asuca、数値予報課報告・別冊第 60 号、29-39。

武藤義夫、1973：テンソル解析入門。森北出版、182pp。

大岩顕、奥薗透、松野俊一、岡隆史、有田亮太郎、2016：基礎系数学　ベクトル解析。丸善出版、172pp。

付録 1E　加速度の球座標表示の図的説明

加速度のラグランジュ微分による表現を、第 1.5 節で

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{du}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dv}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{dw}{dt}\boldsymbol{k}+u\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}+v\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}+w\frac{d\boldsymbol{k}}{dt} \tag{1.5.4}$$

と表していた。(1.5.4) 式では、空気塊が球面上を運動するのに伴って単位ベクトルの方向が変化することにより、右辺第 4 項〜第 6 項が現れている。第 1.5 節では球座標系における単位ベクトルの変化について、慣性系の単位ベクトルを介して説明した。ここでは図的に説明する（Holton 2004 等を参照)。

まず、(1.5.4) 式の右辺第 4 項の $d\boldsymbol{i}/dt$ を考える。これはxのみに依存する（図 1E.1 左を参照。つまり、運動を考えている空気塊が南北方向や鉛直方向に移動したり、同じ場所で時間が経過したとしても、ベクトル$\boldsymbol{i}$は変化しない）ので、

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}=u\frac{\partial\boldsymbol{i}}{\partial x}$$

である。このベクトルの大きさ（$\boldsymbol{i}$の時間変化）を考えると、地球の半径a（ここでは大気の厚さは相対的に薄いとして $r\approx a$ としている)、緯度φにおいては、図 1E.1 左より、$\delta x=\delta\lambda a\cos\varphi$、及び $|\delta\boldsymbol{i}|=\delta\lambda|\boldsymbol{i}|$ から

$$\frac{|\delta\boldsymbol{i}|}{|\boldsymbol{i}|}=\frac{\delta x}{a\cos\varphi}$$

が言え、また $|\boldsymbol{i}|=1$ なので、

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{i}}{\partial x}\right| = \frac{1}{a\cos\varphi}$$

となる。またベクトル $\partial\boldsymbol{i}/\partial x$ の方向は回転軸の方向を向いている（図 1E.1 右を参照）ので、

$$\frac{\partial \boldsymbol{i}}{\partial x} = \frac{1}{a\cos\varphi}(\sin\varphi\,\boldsymbol{j} - \cos\varphi\,\boldsymbol{k})$$

である。よって

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} = \frac{u}{a\cos\varphi}(\sin\varphi\,\boldsymbol{j} - \cos\varphi\,\boldsymbol{k})$$

が得られる。

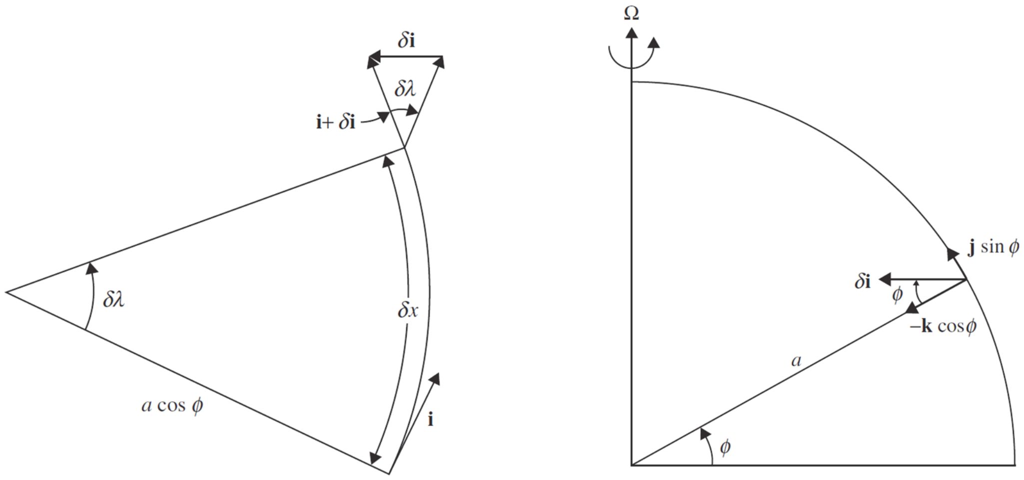


図 1E.1　単位ベクトル$\boldsymbol{i}$の変化量$\delta\boldsymbol{i}$に関する模式図。（左）北極側から見た単位ベクトル$\boldsymbol{i}$の経度依存性。（右）南北断面におけるベクトル $\delta\boldsymbol{i}$ の、北向き（$\boldsymbol{j}$方向）と鉛直上向き（$\boldsymbol{k}$方向）への分解。（Holton and Hakim 2012）

次に、(1.5.4) 式の右辺第 5 項の $d\boldsymbol{j}/dt$ を考える。$\boldsymbol{j}$ はxとyの関数であるので、

$$\frac{d\boldsymbol{j}}{dt} = u\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial x} + v\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial y}$$

である。東西方向の移動 δx に伴う変化は、図 1E.2 左において、δxと$a/\tan\varphi$をそれぞれ辺とする三角形を考えると、

$$\frac{|\delta\boldsymbol{j}|}{|\boldsymbol{j}|} = \frac{\delta x}{a/\tan\varphi}$$

と説明できる。ベクトル $\partial\boldsymbol{j}/\partial x$ の方向はxの負の方向であることから、

$$\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial x} = -\frac{\tan\varphi}{a}\boldsymbol{i}$$

と書ける。南北方向の移動に関しては、図 1E.2 右から明らかに $|\delta\boldsymbol{j}| = \delta\varphi|\boldsymbol{j}| = \delta\varphi$ である。ここで、$\delta y = a\delta\varphi$ であり、また $\delta\boldsymbol{j}$ は鉛直下向き（$-\boldsymbol{k}$ の方向）なので、

$$\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial y} = -\frac{1}{a}\boldsymbol{k}$$

である。これらから、

$$\frac{d\boldsymbol{j}}{dt} = -\frac{u \tan\varphi}{a}\boldsymbol{i} - \frac{v}{a}\boldsymbol{k}$$

が得られる。

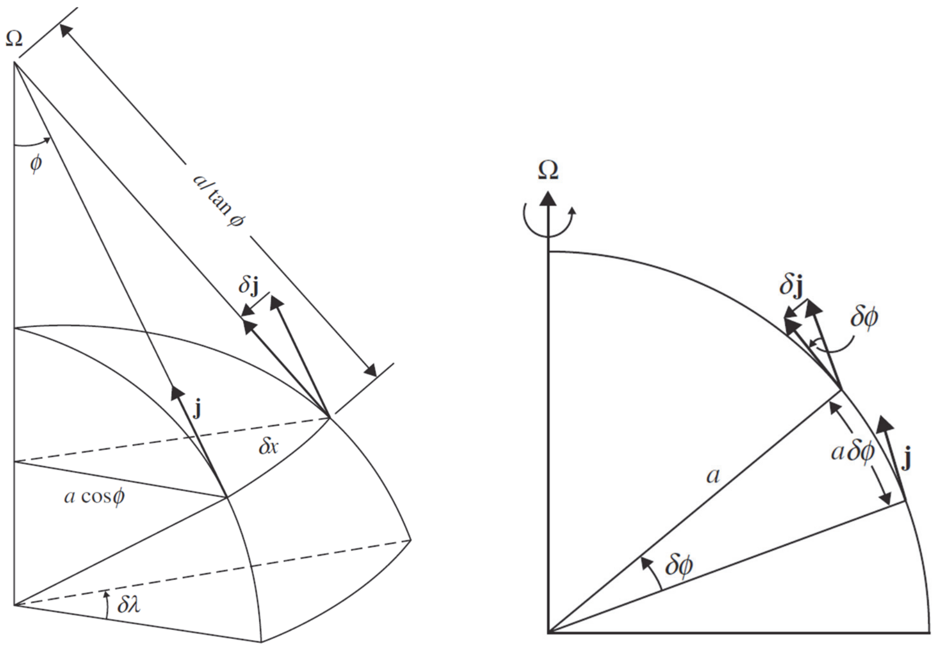


図 1E.2　単位ベクトル$\boldsymbol{j}$の変化量$\delta\boldsymbol{j}$に関する模式図。（左）単位ベクトル$\boldsymbol{j}$の経度依存性。（右）南北断面における単位ベクトル$\boldsymbol{j}$の緯度依存性。（Holton and Hakim 2012）

さらに、$\boldsymbol{k}$ についても同様にして、

$$\frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = \frac{u}{a}\boldsymbol{i} + \frac{v}{a}\boldsymbol{j}$$

であることがわかる。

以上を (1.5.4) 式に適用することにより、

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \left(\frac{du}{dt} - \frac{uv}{r}\tan\varphi + \frac{uw}{r}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{dv}{dt} + \frac{u^2}{r}\tan\varphi + \frac{vw}{r}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{dw}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{r}\right)\boldsymbol{k} \tag{1.5.14}$$

と同様の式が得られる。

第 2 章 プリミティブ方程式

第 1 章で述べたように、大気中には、水平スケールが数 cm の境界層の乱れから、波長が 10000 km 以上の超長波まで、さまざまなスケールの擾乱が存在する。原理的には、第 1 章で導出した基礎方程式が、これらすべてのスケールの擾乱を支配するが、この章では、天気図上の高低気圧スケール（水平スケールが数千 km の総観規模）またはそれ以上の現象を主たる対象にして、基礎方程式を簡略化することを考える。気象学で「大規模現象」と言う場合は、この総観規模以上のスケールの現象をいうことが多い。地球大気における大規模現象の大きな特徴は、現象の鉛直スケールと比較して水平スケールが著しく大きい（アスペクト比＝鉛直スケール／水平スケールが小さい）ため、その運動の取り扱いにおいては鉛直方向の加速度をほとんど無視できるということである。これは、静止大気において厳密に成り立っている静力学平衡（静水圧平衡とも言う）が、大規模現象であれば運動がある場合も良い近似で成り立つことを意味する。

この章では、第 1 章で導出した運動方程式にスケールアナリシスを適用し、大規模場において静力学平衡が非常に良い近似で成り立つことを示し、その事実を用いて第 1 章の基礎方程式を簡略化する。この簡略化した方程式系を、プリミティブ方程式と呼ぶ。また、静力学平衡が成立すれば、気圧は高度の単調減少関数となるので、気圧を高度に変わる鉛直座標として採用することができる。章の後半では、気圧座標系を用いた場合のプリミティブ方程式を導く。また等密度とした場合の考察に有用な浅水方程式系についても紹介する。

2.1 大気の鉛直構造

2.1.1 静力学平衡

はじめに、第 1 章で求めた球座標表示の運動方程式 (1.5.18a-c) を再掲する。

$$\frac{du}{dt}-\frac{uv}{r}\tan\varphi+\frac{uw}{r}-2\Omega v\sin\varphi+2\Omega w\cos\varphi=-\frac{1}{\rho}\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial p}{\partial\lambda}+F_\lambda \tag{2.1.1a}$$

$$\frac{dv}{dt}+\frac{u^2}{r}\tan\varphi+\frac{vw}{r}+2\Omega u\sin\varphi=-\frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\varphi}+F_\varphi \tag{2.1.1b}$$

$$\frac{dw}{dt}-\frac{u^2+v^2}{r}-2\Omega u\cos\varphi=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}-g+F_r \tag{2.1.1c}$$

ここで、大気が静止している（$u=v=w=0$）とすると、摩擦力 $\boldsymbol{F}=\left(F_\lambda,F_\varphi,F_r\right)$ は生じないはずである。これらを上の式に代入すると、(2.1.1a,b) より、大気が静止し続ける場合は水平気圧傾度は 0 となるはずとなる。逆に言うと、水平気圧傾度があれば大気には必ず水平運動が生じる。

一方、(2.1.1c) より、鉛直方向には

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g=0$$

である関係が成り立つ。ただし、ここでは地球の半径をaとして $z=r-a$ で定義される鉛直座標zを導入している。これにより

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \tag{2.1.2}$$

を**静力学平衡**（または**静水圧平衡**）の関係式と呼ぶ。重力加速度の大きさgは厳密には高さとともに減少するが、それを定数とみなして上の式を高さzから大気上端（無限遠）まで積分すると、高度zの関数である密度（$\rho = \rho(z)$）から気圧も高度の関数として

$$p(z) = g \int_z^{\infty} \rho(z')dz' \tag{2.1.3}$$

が得られる。この関係式は、ある地点のある高度における気圧が、それより上にある大気の全質量にgをかけたものに等しいことを示している。また $\rho > 0$ なので、(2.1.2) 式は気圧pと高度zが単調な関数関係で結ばれていることも示している。

2.1.2 ジオポテンシャル高度と層厚

第 1 章で見たように、単位質量当たりの重力gに対し、(1.4.13) 式

$$\nabla\Phi = -\boldsymbol{g}$$

を満たすスカラー関数Φをジオポテンシャルと呼んだ。ただし、$\boldsymbol{g}$ は鉛直下向きだが、$g \equiv |\boldsymbol{g}| > 0$ で、$\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{k}$ である。そして Φ はzのみの関数で、$d\Phi/dz = g$ である。ジオイド面（平均海面） $z = 0$ におけるジオポテンシャルの値を $\Phi(0) = 0$ とおくと、

$$\Phi(z) = \int_0^z g dz' \tag{2.1.4}$$

となる。これは単位質量の空気塊を海面から高度zにまで持ち上げるのに必要な仕事に等しい。

ジオポテンシャルの定義を、静力学平衡の式を用いて表し、さらに状態方程式を用いると、

$$d\Phi = gdz = -\frac{dp}{\rho} = -\frac{RT}{p}dp = -RTd\ln p$$

これを鉛直方向に積分すると、ジオポテンシャルの差をpの関数として表現する**測高公式**

$$\Phi(p_2) - \Phi(p_1) = R\int_{p_2}^{p_1} Td\ln p \tag{2.1.5}$$

が得られる。ジオイド面における標準重力加速度をg_0として

$$Z(p) \equiv \frac{\Phi(p)}{g_0} \tag{2.1.6}$$

によって定義される**ジオポテンシャル高度** Z は、対流圏や成層圏下部では幾何学的高度zとほぼ等しい。以下では簡単のため、重力加速度gを定数として扱うことにする。

気圧 p_2と p_1の間のジオポテンシャル高度の差

$$Z_T \equiv Z_2 - Z_1 = \frac{R}{g}\int_{p_2}^{p_1} Td\ln p \tag{2.1.7}$$

は、p_2と p_1の間の大気層の厚さにほぼ等しい。これを**層厚**（thickness）と呼ぶ。ここで、p_2とp_1の間の平均温度を

$$\langle T \rangle = \frac{\int_{p_2}^{p_1} T d \ln p}{\int_{p_2}^{p_1} d \ln p}$$

で定義すれば、

$$Z_T = \frac{R \langle T \rangle}{g} \ln \frac{p_1}{p_2} \tag{2.1.8}$$

と書くことができる。すなわち、2 つの等圧面の間の層厚はその層の平均気温に比例する　という関係が得られる。なお、(2.1.8) 式では平均気温を用いているが、湿潤空気の場合は平均気温の代わりに平均仮温度を適用する（仮温度については第 1.3 節参照）。

【参考】GPS ゾンデ以前の高層気象観測用ゾンデでは、高度の観測値が得られなかったので、観測された気圧や気温から測高公式を用いてジオポテンシャル高度を計算していた。現在の GPS ゾンデ観測では逆に、高度・気温・湿度の観測値から静力学平衡の式を用いて気圧を計算しているものもある（例えば阿部 2015）。

2.1.3 大気の鉛直成層

大気の状態を表すT、p、ρは状態方程式で結び付けられている。そこにさらに静力学平衡の関係が成り立つと、乾燥大気ならばこの 3 つの変数の間に 2 つの関係式が存在することになるので、独立な変数は 1 つだけということになる。つまり、T、p、ρのうち 1 つを決めれば残りの 2 つは自動的に決まる。そこで以下では、理想気体と静力学平衡の仮定の下で、1 つの変数に簡単な仮定をおいた場合に大気の状態がどのように決まるのか、いくつかの例で見て、現実の対流圏大気の気温減率（約 6.5 K km^{-1}）と比較してみることにする。

a. 等密度大気

まず、密度 ρ がどの高さでも同じと仮定した大気を考えてみる。地上気圧をp_sとすると、静力学平衡の式 (2.1.2) から

$$p = p_s - \rho g z \tag{2.1.9}$$

が得られる。これにより、大気の厚さは有限であり、その厚さをHとすれば$H = p_s/(\rho g)$、あるいは地上気温をT_sとして$H = RT_s/g$の関係がある。$T_s = 273$ K とすれば、$H \cong 8$ km となる。また等密度大気の気温減率Γは

$$\Gamma \equiv -\frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{1}{\rho R}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{g}{R} \cong 34\ \mathrm{K\,km^{-1}} \tag{2.1.10}$$

で与えられる。すなわち等密度大気の気温減率は高さによらない。またこの値は現実大気の気温減率よりはるかに大きい。

b. 等温大気

次には、気温が高度によらず一定でTの場合を考える。静力学平衡の式 (2.1.2) と状態方程式から、

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{gp}{RT} \tag{2.1.11}$$

であり、気温Tが一定なので、ここでも地上気圧をp_sと置けば、

$$p = p_s e^{-z/H} \ , \quad H = RT/g \tag{2.1.12}$$

である。このとき$z \to \infty$ で $p \to 0$ である。このときのHを等温大気の**スケールハイト**という。また当然のことながら気温減率 $\Gamma = 0$ である。

c. 気温減率が一定の大気

Tが高さとともに一定の気温減率Γで減少している場合、地上気温をT_sとして$T = T_s - \Gamma z$ と表すことができる。この場合、(2.1.11) より

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{gp}{R(T_s - \Gamma z)} \tag{2.1.13}$$

となるので、気圧の高度分布は

$$p = p_s \left(\frac{T}{T_s}\right)^{g/(R\Gamma)} \tag{2.1.14}$$

で与えられる。$\Gamma > 0$ の場合は、T/T_sが高さとともに減少するので、気圧pも高さとともに減少する。$\Gamma < 0$ の場合は、$T/T_s > 1$ だが、$g/(R\Gamma) < 0$ になるので、気圧は高さとともに減少する。このことは静力学平衡の式 (2.1.2) で$\rho > 0$である限り気圧は必ず高度とともに減少することからもわかる。

d. 等温位大気

温位 $\theta = T(p_0/p)^{R/C_p}$ が高さによらず一定の場合を考える。温位の定義式の対数をとって高度zで微分すると、静力学平衡の式と状態方程式も使うと、

$$\frac{1}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial z} - \frac{R}{C_p p}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{g}{C_p T} \tag{2.1.15}$$

であるので、温位が高さによらず一定（$d\theta/dz = 0$）の場合の減率は

$$\Gamma = -\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{g}{C_p} \cong 9.8 \ \mathrm{K\ km^{-1}} \tag{2.1.16}$$

これは乾燥空気を断熱的に鉛直に変位させたときの減率なので、**乾燥断熱減率**（dry adiabatic lapse rate）といい、Γ_d で表す。

$$\Gamma_d \equiv \frac{g}{C_p} \tag{2.1.17}$$

等温位大気は前項で述べた気温減率一定の大気の一種であるから、気圧の高度分布は (2.1.14) 式の Γ を Γ_d で置き換えれば得られ、気圧が 0 になるのは $T = 0$ になる高さである。気温減率一定の大気 $T = T_s - \Gamma z$ で Γ_dを適用すると $T = 0$ の高さは $H = C_p T_s/g$ となる。T_s = 273 K ならば $H \cong$ 28 km である。

e. 標準大気

現実大気の鉛直成層は、これまで見たような単純な分布ではない。平均的には図 2.1 のような分布であるとされている。図は標準大気による気温分布で、航空その他の実用上の理由から平均的・仮想的に決められたものである。

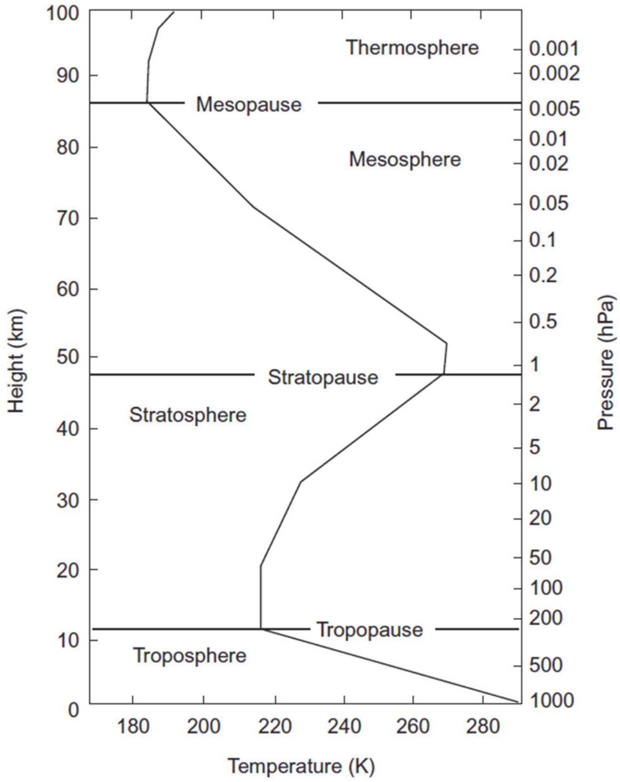


図 2.1　米国標準大気に基づく気温の高度分布。（Holton and Hakim 2012）

【問題】　地表の基準高度を 0 m、基準気圧を 1013.25 hPa、基準気温を 15.0 ℃、標準重力加速度を 9.80665 m s^{-2}、地表から高度 11.0 km（対流圏界面相当）までの気温減率を 6.5 K $(km)^{-1}$、そこから高度 20.0 km までの気温減率を 0.0 K $(km)^{-1}$（すなわち等温大気）、さらにそこから高度 32.0 km（成層圏界面相当）までの気温減率を－1.0 K $(km)^{-1}$（そこでは上空ほど気温が高い）とする。この仮定の下で、高度 11.0、20.0、32.0 km における気圧を求めよ。また指定気圧面 1000、925、850、700、600、500、400、300、250、200、150、100、70、50、30、20、10 hPa の（ジオポテンシャル）高度を求めよ。

2.1.4　静的安定度

密度成層している大気にとって重要な物理量に、鉛直方向の密度傾度がある。これが浮力と直接結びつくからである。

いま、乾燥大気中に仮想的な小さな空気塊（air parcel）を考える。この空気塊ははじめは周囲の空気と同じ温度・圧力（従って密度も同じ）を持っていたとして、それを断熱的に（すなわち周囲の空気と熱交換を行うことなく）微小量 δz だけ変位させたとする。その際、空気塊を微小に変位させても周囲の気圧は変わらず、かつ空気塊の気圧は直ちに周囲の気圧と同じになるとする。この仮定の下で空気塊の微小変位により大気の安定性を調べる方法を、パーセル法（parcel method）という。

この空気塊に働く力は、空気塊の質量 m_pに働く重力 $m_p g$と、空気塊に排除された周囲の空気の質量$\bar{m}$による浮力 $\bar{m}g$（アルキメデスの原理）である。よって、この空気塊の運動を支配する方程式は、

$$m_p \frac{d^2\delta z}{dt^2} = -m_p g + \bar{m}g \tag{2.1.18}$$

となる。この両辺を空気塊の体積で除すると、

$$\frac{d^2\delta z}{dt^2} = g\frac{\bar{\rho}(z+\delta z) - \rho_p(z+\delta z)}{\rho_p(z+\delta z)} \tag{2.1.19}$$

が得られる。ここで、$\bar{\rho}(z)$と$\rho_p(z)$はそれぞれ、周囲の空気の密度と空気塊の密度であり、共に高度zの関数である。これにより、空気塊をもとの位置から上に変位させたとき、ρ_pが$\bar{\rho}$より小さければ上向きに加速され、空気塊は元の位置からさらに離れようとする。上に変位させたときに周囲の空気の密度より大きければ、空気塊は下向きに加速され、元の位置に戻ろうとする。

最初に述べた空気塊に関する仮定と状態方程式により、(2.1.19) 式は、空気塊とその周囲の気温（$T_p(z)$と$\bar{T}(z)$）、同じく温位（$\theta_p(z)$と$\bar{\theta}(z)$）を用いて

$$\frac{d^2\delta z}{dt^2} = g\frac{T_p(z+\delta z) - \bar{T}(z+\delta z)}{\bar{T}(z+\delta z)} = g\frac{\theta_p(z+\delta z) - \bar{\theta}(z+\delta z)}{\bar{\theta}(z+\delta z)} \tag{2.1.20}$$

とも書ける。空気塊の初期の位置をzとすると、高さ$z+\delta z$における空気塊の温位は、断熱変化であることから $\theta_p(z+\delta z) = \theta_p(z)$ である。また周囲の温位$\bar{\theta}(z+\delta z)$は、δzが微小であることから

$$\bar{\theta}(z+\delta z) \approx \bar{\theta}(z) + \frac{\partial\bar{\theta}(z)}{\partial z}\delta z = \theta_p(z) + \frac{\partial\bar{\theta}(z)}{\partial z}\delta z$$

のように近似できる。ここでは初期には高度zで $\bar{\theta}(z) = \theta_p(z)$ であったことを用いている。よって (2.1.20) は

$$\frac{d^2\delta z}{dt^2} \approx -\frac{g}{\bar{\theta}(z+\delta z)}\frac{\partial\bar{\theta}(z)}{\partial z}\delta z \approx -\frac{g}{\bar{\theta}(z)}\frac{\partial\bar{\theta}(z)}{\partial z}\delta z \tag{2.1.21}$$

と書ける。もし $\partial\bar{\theta}/\partial z > 0$ ならば、これは単振動の方程式になるので、大気の成層状態は安定であると言える。その時の振動数は

$$N = \sqrt{\frac{g}{\bar{\theta}}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial z}} \tag{2.1.22}$$

で与えられる。これは安定成層している流体中の自由振動の振動数であり、ブラント・バイサラ振動数、あるいは浮力振動数と呼ばれる。ブラント・バイサラ振動数は大気の静的安定度の指標として用いられ、この値が大きいほど大気の成層状態が安定であると言える。

ここで、気温減率が一定の大気のブラント・バイサラ振動数を計算してみる。そのような大気の気圧は (2.1.14) で与えられているので、それを温位の定義式に代入すれば、

$$\bar{\theta} = \bar{T}\left(\frac{p_0}{p_s}\right)^{R/C_p}\left(\frac{T_s}{\bar{T}}\right)^{g/(C_p\Gamma)} \tag{2.1.23}$$

が得られる。これから

$$N^2 = \frac{g}{\bar{\theta}}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial z} = g\left(1 - \frac{g}{C_p\Gamma}\right)\frac{1}{\bar{T}}\frac{\partial\bar{T}}{\partial z} = g\frac{\Gamma_d - \Gamma}{\bar{T}} \tag{2.1.24}$$

と表される。対流圏での典型的な値として、$\Gamma =$ 6 K (km)$^{-1}$、$\bar{T}$ = 300 K を取れば、N = 1.16×10^{-2} s^{-1} であり、周期は $2\pi/N \cong 9$ 分 となる。

$N^2 < 0$ の場合は、(2.1.21) の解は時間とともに指数関数的に増大する運動を表す。このとき大気は静的に不安定な成層であるという。従って、(2.1.24) より、大気の成層の静的安定性について

$$\begin{cases} \Gamma < \Gamma_d & ：安定 \\ \Gamma = \Gamma_d & ：中立 \\ \Gamma > \Gamma_d & ：不安定 \end{cases}$$

が言える。平均的にみれば、大気の温位は高さとともに増大する安定な成層をしている。そうでなければ大気中で対流が生じ、中立～安定な成層状態に落ち着く。

2.2 有効位置エネルギー

第 1 章で示したように、大気の全エネルギーは運動エネルギーと位置エネルギーと内部エネルギーの和からなり、摩擦と非断熱加熱がなければ保存される。ここでは、静力学平衡が成り立つ場合において、単位面積当たりの大気（単位気柱）のエネルギーについて調べる。

2.2.1 単位気柱のエネルギー

まず、単位体積当たりの重力による位置エネルギーを、大気全層で積分してみる。地表面の位置を $z = 0$、地上気圧を p_s、重力加速度gを一定として、静力学平衡の式 (2.1.2) とジオポテンシャルの定義式 (2.1.4) を用いて部分積分すると、

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \rho\Phi dz &= -\int_0^\infty \frac{1}{g}\frac{\partial p}{\partial z}\Phi dz = -\frac{1}{g}[p\Phi]_0^\infty + \frac{1}{g}\int_0^\infty p\frac{\partial\Phi}{\partial z}dz = \int_0^\infty p dz \\ &= \int_0^\infty \rho RT dz = -\frac{1}{g}\int_0^\infty \frac{\partial p}{\partial z}RT dz = \frac{1}{g}\int_0^{p_s} RT dp \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

のように変形できる。ただし、$z = 0$ のとき$\Phi = 0$、$z \to \infty$ のとき $p\Phi \to 0$ を用いた。

この結果を、単位面積当たり（単位気柱）の位置エネルギーと内部エネルギーの和に代入すると、

$$\int_0^\infty \rho(\Phi + U)dz = \frac{1}{g}\int_0^{p_s} RT dp + \frac{1}{g}\int_0^{p_s} C_v T dp = \frac{1}{g}\int_0^{p_s} C_p T dp \tag{2.2.2}$$

となる。つまり、静力学平衡のもとでは、大気の位置エネルギーと内部エネルギーの和は、大気のエンタルピーに等しい。以下ではこれを、全位置エネルギー（total potential energy）と呼ぶことにする。

ここで、大気の運動エネルギーと全位置エネルギーの大きさを見積もってみる。単位底面積の気柱が持つ運動エネルギーをK、水平風速$\boldsymbol{V}$の代表的な大きさをU =10 m s^{-1} とすると、

$$K = \frac{1}{g}\int_0^{p_s}\frac{1}{2}|V|^2 dp \sim \frac{U^2 p_s}{g} \approx \frac{10^2 \times 1 \times 10^5}{9.8} \quad (\mathrm{J\,m^{-2}}) \ \approx 10^6\ (\mathrm{J\,m^{-2}}) \tag{2.2.3}$$

一方、同じく単位底面積の気柱が持つ全位置エネルギーをP、代表的な温度を T =250 K とすると、

$$P = \frac{1}{g}\int_0^{p_s} C_p T dp \sim \frac{C_p T p_s}{g} \approx \frac{1\times 10^3 \times 250 \times 1 \times 10^5}{9.8} \quad (\mathrm{J\ m^{-2}}) \\ \approx 10^9\ (\mathrm{J\ m^{-2}}) \tag{2.2.4}$$

となる。従って、大気の持つエネルギーのうち運動エネルギーは小さく、ほとんどは全位置エネルギーであることがわかる。大気の運動エネルギーが全位置エネルギーの変換によって生じたとすると、全位置エネルギーのうち、断熱的に運動エネルギーに変換できる最大値を**有効位置エネルギー**（available potential energy）という。

2.2.2 有効位置エネルギーの計算

図 2.2 に示したような、それぞれ一様な温位を持つ 2 つの気柱（$\theta_2 > \theta_1$）が鉛直の仕切りによって隣り合っている状態について、有効位置エネルギーを計算してみよう。2 つの気柱の質量と底面積は等しいものとするので、地上気圧は等しく、それをp_sとする。この場合の単位面積当たりの全位置エネルギーPを計算すると、(2.2.2) のTに温位の定義式を代入することにより、

$$P = \frac{C_p}{2g}\left[\int_0^{p_s} \theta_1 \left(\frac{p}{p_0}\right)^\kappa dp + \int_0^{p_s} \theta_2 \left(\frac{p}{p_0}\right)^\kappa dp\right] = \frac{C_p p_s^{1+\kappa}}{(1+\kappa) g p_0^\kappa}\frac{(\theta_1+\theta_2)}{2} \tag{2.2.5}$$

が得られる。ただし $\kappa \equiv R/C_p$ である。次に、仕切りを取ると、上層では温位θ_2の空気がθ_1の側へ、下層ではθ_1の空気がθ_2の側へ、共に断熱的に空気が移動する。その際に温位が保存されることから、温位θ_1の空気の上に温位θ_2の空気が積み重なった状態となる。これは全位置エネルギーが最小の状態となったことになる。2 つの気柱の質量が同じなので、境界面の気圧は $p_s/2$ となる。このときの単位面積当たりの全位置エネルギーP'は、

$$P' = \frac{C_p}{g}\left[\int_0^{p_s/2} \theta_2 \left(\frac{p}{p_0}\right)^\kappa dp + \int_{p_s/2}^{p_s} \theta_1 \left(\frac{p}{p_0}\right)^\kappa dp\right] \\ = \frac{C_p p_s^{1+\kappa}}{(1+\kappa) g p_0^\kappa}\left[\left(1-\frac{1}{2^{1+\kappa}}\right)\theta_1 + \frac{1}{2^{1+\kappa}}\theta_2\right] \tag{2.2.6}$$

となる。従って、有効位置エネルギーは

$$A \equiv P - P' = \frac{C_p p_s^{1+\kappa}}{(1+\kappa) g p_0^\kappa}\left(1-\frac{1}{2^\kappa}\right)\frac{\theta_2-\theta_1}{2} \tag{2.2.7}$$

のように計算される。$\theta_2 \approx \theta_1 = 300\ \mathrm{K}$、$\theta_2 - \theta_1 = 10\ \mathrm{K}$ として、有効位置エネルギーAと元の全位置エネルギーPの比を計算してみると、

$$\frac{A}{P} = \frac{\theta_2-\theta_1}{\theta_2+\theta_1}\left(1-\frac{1}{2^\kappa}\right) \approx \frac{10}{300+300}\left(1-\frac{1}{2^{2/7}}\right) \approx 10^{-2} \tag{2.2.8}$$

となり、非常に小さいことがわかる。

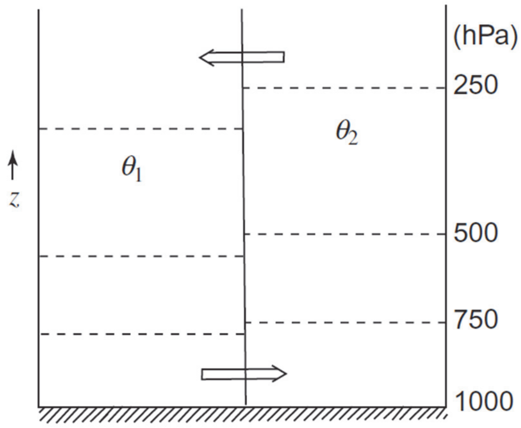


図 2.2　温位の異なる 2 種類の気体が鉛直の仕切りで分けられている模式図。破線は等圧面で、矢印は仕切りが取り除かれたときの気体の運動を表す。（Holton and Hakim 2012）

2.3 プリミティブ方程式のための近似

前節では静止した大気には静力学平衡が成り立っていることを示したが、複雑な方程式系を簡略化するには各項の意義を考えながら近似を施すことが必要である。この節では総観規模の気象現象を表現するための近似を考える。そして最終的に、静止大気だけでなく、総観規模以上のスケールで運動する大気についても静力学平衡近似が成り立つことが示される。

2.3.1 大気の厚さが薄いことによる近似

地球の半径が約 6 千 km であるのに対して、地球の大気の厚さは対流圏で 10 km 程度、中間圏まで含めても 80 km 程度で、地球半径と比較するとごく薄い。このため、球座標で表した空気塊の位置(λ, φ, r)に対して、地球の半径を a として $r = a + z$ とすると、$|z| \ll a$ である。このことを考慮すると、前節で求めた大気の基礎方程式の球座標表示で、方程式に現れる r を $a + z$ で置き換え、さらに $a + z \cong a$ とおく近似が考えられる。その際、$1/r$ は $1/a$ で、また $\partial/\partial r$ は座標変換により $\partial/\partial z$ で置き換える。これは shallow atmosphere approximation と呼ばれる（例えば Vallis 2006）。この近似では鉛直方向の成層や鉛直シアーの存在は考慮する。この近似を、地球を球体と考えることも含めて、伝統的近似（traditional approximation）と呼ぶ場合もある。なお、いわゆる浅水近似（shallow water approximation、第 2.5 節参照）は鉛直方向に一様とする近似で、ここで扱うものとは異なる。

第 1 章で求めた球座標系の運動方程式 (1.5.18a-c) に、上記の近似を施すと、

$$\frac{d^* u}{dt} - \frac{uv}{a}\tan\varphi + \frac{uw}{a} - 2\Omega v\sin\varphi + 2\Omega w\cos\varphi = -\frac{1}{\rho a\cos\varphi}\frac{\partial p}{\partial \lambda} + F_\lambda \tag{2.3.1a}$$

$$\frac{d^* v}{dt} + \frac{u^2}{a}\tan\varphi + \frac{vw}{a} + 2\Omega u\sin\varphi = -\frac{1}{\rho a}\frac{\partial p}{\partial \varphi} + F_\varphi \tag{2.3.1b}$$

$$\frac{d^* w}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{a} - 2\Omega u\cos\varphi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g + F_r \tag{2.3.1c}$$

となる。ただし、

$$\frac{d^*}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda} + \frac{v}{a}\frac{\partial}{\partial\varphi} + w\frac{\partial}{\partial z} \tag{2.3.2}$$

であり、(1.5.19) の d/dt とはrをaに置き換えている点が異なる。

連続の式は、第 1 章の (1.5.21) に近似と座標変換を施して

$$\frac{d^*\rho}{dt} + \rho\left[\frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial u}{\partial\lambda} + \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(v\cos\varphi) + \frac{\partial w}{\partial z}\right] = 0 \tag{2.3.3}$$

状態方程式と熱力学第 1 法則は、慣性系における方程式 (1.3.39c, d) から

$$p = \rho RT$$

$$C_p\frac{d^*T}{dt} - \frac{1}{\rho}\frac{d^*p}{dt} = J \qquad \text{または} \qquad \frac{d^*\theta}{dt} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{R/C_p}\frac{J}{C_p} = \frac{J}{C_p\Pi(p)}$$

となる。

【問題】地球の大きさを直径 20cm のサッカーボールに例えると、大気の厚さはどれくらいか。単なる数値だけでなく、具体的なものに例えて答えよ。

【問題】上記の近似を施した方程式系は、エネルギー保存則を満たすが、角運動量保存則（第 1.6.3 項）を満たさなくなっている。このことを確認せよ。

2.3.2 スケールアナリシスによる近似

前項で大気の厚さが薄いことによる近似により若干の簡略化が行われたが、それでも運動方程式 (2.3.1a-c) には多くの項がある。そして、実はこれらの項は大きさに差があり、一部の項は他の項と比較して常に小さいので無視できる。ここでは、中緯度の高低気圧などの総観規模現象の力学を考えたいので、それに関する時間・空間等の変数に関して、総観規模現象を特徴づける量を書きだしてみる。

水平スケール	L	～	10^6 m
鉛直スケール	H	～	10^4 m
水平風速	U	～	10 m s^{-1}
鉛直速度	W	～	10^{-2} m s^{-1}　（1 cm s^{-1}）
時間スケール	L/U	～	10^5 s　（1 日）
気圧	P	～	10^5 kg m^{-1} s^{-2}　（1000 hPa）
水平気圧変動	δP	～	10^3 kg m^{-1} s^{-2}　（10 hPa）
地球の自転	$f_0 = 2\Omega\sin\varphi_0$	～	10^{-4} s^{-1}　（φ_0= 45°）
地球半径	a	～	10^7 m
地表付近の大気密度	ρ	～	1 kg m^{-3}
動粘性率	ν	～	10^{-5} m^2 s^{-1}

これらの特徴的なスケール程度の変化が生じると仮定して、運動方程式 (2.3.1a-c) の各項の大きさ

について比較を行う。

運動方程式の水平成分：

$\dfrac{d^*u}{dt}$	$-\dfrac{uv}{a}\tan\varphi$	$\left[+\dfrac{uw}{a}\right]$	$-2\Omega v\sin\varphi$	$\langle +2\Omega w\cos\varphi\rangle$	$=$	$-\dfrac{1}{\rho a\cos\varphi}\dfrac{\partial p}{\partial\lambda}$	$+F_\lambda$	(2.3.4a)
$\dfrac{d^*v}{dt}$	$+\dfrac{u^2}{a}\tan\varphi$	$\left\{+\dfrac{vw}{a}\right\}$	$+2\Omega u\sin\varphi$		$=$	$-\dfrac{1}{\rho a}\dfrac{\partial p}{\partial\varphi}$	$+F_\varphi$	(2.3.4b)
$\dfrac{U^2}{L}$	$\dfrac{U^2}{a}$	$\dfrac{UW}{a}$	f_0U	f_0W		$\dfrac{\delta P}{\rho L}$	$\dfrac{\nu U}{H^2}$	
10^{-4}	10^{-5}	10^{-8}	10^{-3}	10^{-6}		10^{-3}	10^{-12}	($\mathrm{m\ s^{-2}}$)

運動方程式の鉛直成分：

$\left(\dfrac{d^*w}{dt}\right)$	$+\left[\left\{-\dfrac{u^2+v^2}{a}\right\}\right]$	$\langle -2\Omega u\cos\varphi\rangle$	$=$	$-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}$	$-g$	$+F_r$	(2.3.4c)
$\dfrac{UW}{L}$	$\dfrac{U^2}{a}$	f_0U		$\dfrac{P}{\rho H}$		$\dfrac{\nu W}{H^2}$	
10^{-7}	10^{-5}	10^{-3}		10	10	10^{-15}	($\mathrm{m\ s^{-2}}$)

まず、運動方程式の水平成分 (2.3.4a,b) において、最大項のみを取り出すと、左辺は第 4 項（水平風速成分に働くコリオリ力）、右辺は第 1 項（水平気圧傾度力）になる。これは、運動方程式の水平成分を一次近似的にみれば、コリオリ力と気圧傾度力がほぼ釣り合っていることを示す。ここから、中緯度の総観規模の高低気圧に伴って吹く風に関して近似的に地衡風の関係が成り立っていることがわかる（第 3 章や第 5 章を参照）。この 2 項に次いで大きいのが、左辺第 1 項の加速度項である。それ以外の、メトリック項や風の鉛直成分に働くコリオリ力の項は、相対的に小さい。摩擦力の項は特に小さい。

運動方程式の鉛直成分 (2.3.4c) では、右辺第 1 項（鉛直気圧傾度力）と第 2 項（重力）が圧倒的に大きい。第 2.1 節では大気が静止していれば鉛直気圧傾度力と重力が厳密に釣り合う静力学平衡状態になることを説明したが、中緯度の総観規模場では、運動があっても静力学平衡の関係が非常に良い近似で成り立つことが、上の表からわかる。（付録 2A 参照）

これらの見積もりによれば、式の中で各種の括弧で括った項は他の項に比べて十分小さいので、省略しても良いと考えられる。しかし、運動方程式の成分ごとに項の大きさを比較するだけでは十分ではなく、エネルギーや角運動量の保存性も考える必要がある。元の方程式においては、外力と気圧傾度力が働かなければ運動エネルギーと角運動量が保存されるので、近似された方程式においてもこれらの保存則が満足されることが期待される。

まずエネルギー保存に関しては、(2.3.4a-c) に、それぞれ対応する速度成分をかけて和をとると、第 1 章のエネルギー保存の項で述べたように運動エネルギーの時間変化に関する方程式が得られる。その際に、[ ] { } ⟨ ⟩ で括った項（これらはすべて見かけの力である）はエネルギー的に対応した項になっているので、和をとる際に互いに打ち消しあって、エネルギー方程式には残らない。従って、エネルギ

ーが保存されるためには、一方の項を近似で省略した場合には対応する項も必ず省略しなければならない。(2.3.4c) の左辺第 1 項 (d^*w/dt) は括弧 ( ) で括られているが対になる項がないので、この点での注意の必要はなく、単に他の項より小さいことを理由として省略することができる。

なお、この近似では、最終的に r を a で置き換える形になるが、$r=a$ で一定として (1.5.2) で $w=dr/dt=0$ とするものではない。仮に $w=0$ とすると、運動方程式からはwの含まれている項がすべて省略されることになる。すると、運動方程式の水平成分の $[+uw/a]$ と $\{+vw/a\}$ 及び $\langle +2\Omega w\cos\varphi\rangle$ の項は省略されるが、これらの項に対応するものであるはずの、運動方程式の鉛直成分の左辺第 2 項 $[\{-(u^2+v^2)/a\}]$ と第 3 項 $\langle -2\Omega u\cos\varphi\rangle$ が省略されずに残ってしまう。すると、エネルギー方程式ではバランスが取れなくなり、エネルギーが保存されなくなる。このように、単純に $w=0$ とするのではない点にも注意が必要である。

次に、角運動量保存について考えてみる。緯度φ、動径距離rにある単位質量の空気塊が持つ絶対角運動量の自転軸方向の成分は、(1.6.9) 式

$$M=r\cos\varphi\,(u+\Omega r\cos\varphi) \tag{1.6.9}$$

で与えられ、また単位質量の空気塊の東西方向の角運動量方程式は (1.6.11) 式

$$\frac{dM}{dt}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\lambda}+r\cos\varphi\,F_\lambda$$

であった。ここでは$r\cong a$ の近似は行っていない。この式の左辺のラグランジュ微分は近似を行わない時間微分 d/dt で、第 1.6 節で見た通り、

$$\begin{aligned}\frac{dM}{dt}&=r\cos\varphi\frac{du}{dt}-ur\frac{d\varphi}{dt}\sin\varphi+u\frac{dr}{dt}\cos\varphi+2\Omega r\frac{dr}{dt}\cos^2\varphi-2\Omega r^2\frac{d\varphi}{dt}\cos\varphi\sin\varphi\\&=r\cos\varphi\frac{du}{dt}-uv\sin\varphi+[uw\cos\varphi]+\langle 2\Omega rw\cos^2\varphi\rangle-2\Omega rv\cos\varphi\sin\varphi\end{aligned}$$

となる（$v=r\,d\varphi/dt$、$w=dr/dt$）。ここで、[ ] 〈 〉で括った項は、それぞれ、(2.3.4a) において同じ括弧で括った微小項に対応する。つまり、運動方程式でそれらの項を省略すると、運動方程式の左辺を絶対角運動量の時間微分の形に書くことができなくなる。すなわち、微小項を省略するだけでは絶対角運動量方程式が成立しなくなる。

一方、(1.6.9) 式において $r=a$ で一定として、新たな角運動量

$$M^*=a\cos\varphi\,(u+\Omega a\cos\varphi) \tag{2.3.5}$$

を定義し、Mの代わりにM^*、d/dt の代わりに d^*/dt を用いると、この近似における角運動量の時間変化は、$v=a\,d^*\varphi/dt$ も用いて

$$\frac{d^*M^*}{dt}=a\cos\varphi\frac{d^*u}{dt}-ua\frac{d^*\varphi}{dt}\sin\varphi-2\Omega a^2\frac{d^*\varphi}{dt}\cos\varphi\sin\varphi=a\cos\varphi\frac{d^*u}{dt}-uv\sin\varphi-2\Omega av\cos\varphi\sin\varphi$$

と書ける。ここに、(2.3.4a) において括弧の項を省略したものを使うと、

$$\frac{d^*M^*}{dt}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\lambda}+a\cos\varphi\,F_\lambda \tag{2.3.6}$$

が得られる。これにより、M^*が保存されることが示される。

なお、ここで行った近似のうち、鉛直運動wを含んだコリオリ項と微小なメトリック項の省略については、伝統的近似（traditional approximation）と呼ばれる（例えば Vallis (2006)参照。ただし第 2.3.1 項で述べた近似を伝統的近似と呼ぶこともあるので注意）。この近似を運動方程式の水平成分に対して施し、一方で、運動方程式の鉛直成分には静力学平衡近似を施すことが、ここでのスケールアナリシスによる近似に対応することになる。

2.3.3 球面座標系におけるプリミティブ方程式

これまでの近似、すなわち、地球半径に対して大気の厚さをごく薄いと考えることと、スケールアナリシスによって、総観規模現象に伴う大気の運動を表す運動方程式は、(2.3.1a-c) からさらに以下のようになる。

$$\frac{du}{dt} - \left(2\Omega + \frac{u}{a\cos\varphi}\right) v \sin\varphi = -\frac{1}{\rho a \cos\varphi}\frac{\partial p}{\partial \lambda} + F_\lambda \tag{2.3.7a}$$

$$\frac{dv}{dt} + \left(2\Omega + \frac{u}{a\cos\varphi}\right) u \sin\varphi = -\frac{1}{\rho a}\frac{\partial p}{\partial \varphi} + F_\varphi \tag{2.3.7b}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \tag{2.3.7c}$$

となる。ただし、

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{a}\frac{\partial}{\partial \varphi} + w\frac{\partial}{\partial z} \tag{2.3.8}$$

であり、(2.3.2) で定義した d^*/dt と同じである。以後、これを d/dt とする。鉛直方向の静力学平衡は、静止大気について成り立つことがこの章のはじめに示されていたが、運動する大気についても近似的に成り立つとして、鉛直方向の運動方程式は静力学平衡の式に置き換えられる。

連続の式は、(2.3.3) の近似のままで良く、状態方程式と熱力学第 1 法則は、(1.3.39c,d) の慣性系における方程式と同じ形になる（厳密にはd/dtが異なる）。これらを再掲しておく。

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\left[\frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}(v\cos\varphi) + \frac{\partial w}{\partial z}\right] = 0 \tag{2.3.9}$$

$$p = \rho R T \tag{2.3.10}$$

$$C_p\frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt} = J \quad \text{または} \quad \frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{R/C_p}\frac{J}{C_p} = \frac{J}{C_p\Pi(p)} \tag{2.3.11}$$

(2.3.7)～(2.3.11) のように近似した方程式系を、（球面座標系における）**プリミティブ方程式系**（primitive equations）という。

2.3.4 f 平面近似によるプリミティブ方程式

前項で示したプリミティブ方程式の運動方程式 (2.3.7a,b) には、それぞれにメトリック項が 1 個ずつ残っている。すなわち、(2.3.7a,b) とも、左辺第 2 項の括弧内が、地球自転に関するコリオリ項と、地球の曲率に関するメトリック項の和となっている。地球では自転が比較的速く、$\Omega a \gg |u|$ なので、括弧内の 2 つ目の項は無視して良いようにも見える。しかしそうすると、エネルギー保存則は成り立

つが、絶対角運動量が保存されなくなる。そこで、ある緯度φ_0を中心として、南北に十分狭い領域における運動に議論を絞ることにする。この場合には、上の各方程式の係数に現れている緯度φをφ_0で置き換えて良いだろう。そして独立変数λ, φの代わりに、次のように定義される新たな独立変数x、 yを導入する。

$$x = a\lambda \cos\varphi_0 \quad , \quad y = a(\varphi - \varphi_0) \tag{2.3.12a, b}$$

座標xは緯度φ_0における緯度円に沿って東向きに測った距離、座標yはその緯度円の 1 点を原点として球面に沿って北向きに測った距離を表す。ただし、$|y| \ll a$ とする。また、**コリオリパラメータ**

$$f_0 = 2\Omega \sin\varphi_0 \tag{2.3.13}$$

を定義しておく。このf_0は緯度に依存せず定数である。すると、プリミティブ方程式 (2.3.7a)～(2.3.9) は次のように近似できる。

$$\frac{du}{dt} - f_0 v = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + F_x \tag{2.3.14a}$$

$$\frac{dv}{dt} + f_0 u = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + F_y \tag{2.3.14b}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \tag{2.3.14c}$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0 \tag{2.3.14d}$$

ラグランジュ微分は

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z} \tag{2.3.15}$$

と表される。これを***f*平面近似**という。ここでは東西方向の微分と南北方向の微分をそれぞれ、

$$\frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda} = \frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial x} \cong \frac{\partial}{\partial x}\,, \qquad \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\varphi} = \frac{\partial}{\partial y}$$

のように変換している。

水平風ベクトルを $\boldsymbol{V} = (u, v, 0)$、等高度面上の水平微分のみからなるナブラ演算子を$\nabla_z$、鉛直上向きの単位ベクトルを$\boldsymbol{k}$とすると、(2.3.14a,b) を次のようにまとめて表すこともできる。

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} + f_0\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla_z p + \boldsymbol{F} \tag{2.3.16}$$

f平面近似によるプリミティブ方程式は、外見上は慣性系の方程式系に緯度変化のないコリオリ力を加えた基礎方程式系と似ている。ただし、これまで述べたさまざまな近似の結果として得られた方程式であることに注意すべきである。

なお、**絶対運動量** $f_0 y - u$ を導入すると、それに関する次の方程式が運動方程式のx成分 (2.3.14a) から得られる。

$$-\frac{d}{dt}(f_0 y - u) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + F_x \tag{2.3.17}$$

これは球座標系の基礎方程式系における絶対角運動量方程式 (1.6.11) に対応する。実際、球座標系の

プリミティブ方程式系における絶対角運動量の定義 (2.3.5) に (2.3.12b) から$\varphi = \varphi_0 + y/a$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
M^* &= \Omega a^2 \cos^2\varphi + ua\cos\varphi \\
&\approx \Omega a^2 \left(\cos\varphi_0 - \frac{y}{a}\sin\varphi_0\right)^2 + ua\left(\cos\varphi_0 - \frac{y}{a}\sin\varphi_0\right) \\
&\approx \Omega a^2 \cos^2\varphi_0 - 2\Omega ay\cos\varphi_0\sin\varphi_0 + ua\cos\varphi_0 \\
&= \Omega a^2\cos^2\varphi_0 - a\cos\varphi_0\,(f_0 y - u)
\end{aligned}
\tag{2.3.18}
$$

のように近似できる。ここでは、$|y| \ll a$ としていることから、テイラー展開により

$$
\cos\varphi \approx \cos\varphi_0 - \frac{y}{a}\sin\varphi_0
$$

と近似できることと、さらに微小量の 2 次以上の項を省略することを用いている。これを (1.6.11) で$r = a$ とした式に代入して、(2.3.12a) を用いてλを消去し、F_λ を F_x と置き換えれば、(2.3.17) 式が得られる。ここから、もとの角運動量保存則はf平面近似の運動方程式でも成り立つことがわかる。

2.4 気圧座標系

静力学平衡が成り立っている大気では、気圧は高さとともに単調に減少している。従って、zの代わりにpを鉛直座標として使うことができる。鉛直座標としてpを用いる座標系を、気圧座標系あるいはp座標系と呼ぶ。以下では、f平面近似したプリミティブ方程式を気圧座標系で表すことにする。これによって方程式系がさらに簡単になる。

2.4.1 座標変換

z座標系からp座標系への座標変換には、気圧の等しい面（等圧面）で見た物理量の水平微分がどうなるかを考察する必要がある。図 2.3 のように等圧面上に 2 点 1, 2 をとり、そこでの物理量の値をψ_1、ψ_2とする。このとき物理量の等圧面上でのx微分の定義は

$$
\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_p = \lim_{\delta x\to 0}\frac{\psi_2 - \psi_1}{\delta x}
$$

で与えられる。図からわかるように、

$$
\frac{\psi_2 - \psi_1}{\delta x} = \frac{\psi_3 - \psi_1}{\delta x} + \frac{\psi_2 - \psi_3}{\delta z}\frac{\delta z}{\delta x}
$$

なので、この式で $\delta x \to 0$ とすると

$$
\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_p = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_z + \frac{\partial\psi}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p
$$

となる。これより

$$
\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_z = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_p - \frac{\partial\psi}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p
$$

を得る。一方、静力学平衡が成り立っていると、

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \frac{\partial \psi}{\partial p} \tag{2.4.1}$$

が言えるので、

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_z = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_p + \rho g \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p \frac{\partial \psi}{\partial p} \tag{2.4.2a}$$

が成立する。同様にして、

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_z = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_p + \rho g \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_p \frac{\partial \psi}{\partial p} \tag{2.4.2b}$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_z = \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_p + \rho g \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_p \frac{\partial \psi}{\partial p} \tag{2.4.3}$$

が得られる。

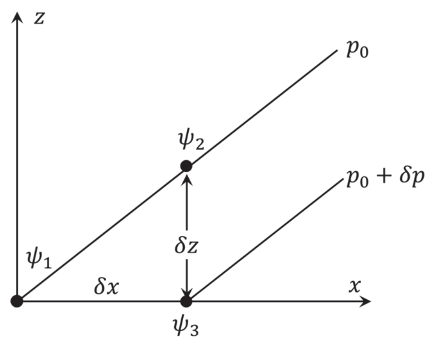


図 2.3　等圧面上での水平微分に関する模式図。

別の見方では、図 2.3 で

$$\frac{\psi_2 - \psi_1}{\delta x} = \frac{\psi_3 - \psi_1}{\delta x} + \frac{\psi_2 - \psi_3}{\delta p}\frac{\delta p}{\delta x}$$

のように考え、この式で $\delta x \to 0$ とし、またy方向にも同様にして

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_p = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_z - \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z \frac{\partial \psi}{\partial p} \tag{2.4.4a}$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_p = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_z - \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_z \frac{\partial \psi}{\partial p} \tag{2.4.4b}$$

と表せる。これは、(2.4.2a,b) 各式の右辺第 2 項で等圧面上のジオポテンシャル高度の水平傾度を用いていた代わりに、等高度面上の水平気圧傾度を用いて表したものである。

物理量ψのラグランジュ微分は、はじめz系で表し、それを (2.4.1)、(2.4.2a,b) 及び (2.4.3) を用いてp系に変換すると、

$$\frac{d\psi}{dt}=\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_z+u\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_z+v\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_z+w\frac{\partial\psi}{\partial z}$$
$$=\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_p+u\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_p+v\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_p+\rho g\left[\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_p+u\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p+v\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_p-w\right]\frac{\partial\psi}{\partial p}$$

と書ける。ここで$\psi=p$としてωを定義すると、

$$\omega\equiv\frac{dp}{dt}=\rho g\left[\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_p+u\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p+v\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_p-w\right] \tag{2.4.5}$$

が得られる。ωは気圧座標系における鉛直速度で、オメガまたは**鉛直 p 速度**と呼ぶ。これを用いると、

$$\frac{d\psi}{dt}=\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_p+u\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_p+v\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_p+\omega\frac{\partial\psi}{\partial p} \tag{2.4.6}$$

と書くことができる。すなわち、p座標系でのラグランジュ微分は、z座標系でのラグランジュ微分の $w\,\partial/\partial z$ を $\omega\,\partial/\partial p$ で置き換えるだけで、形式的には全く同一の形に書ける。ただし、ωとwの間の変換は (2.4.5) 式で与えられることに注意しなければならない。

2.4.2 運動方程式と静力学平衡の式

はじめに、気圧傾度力を気圧座標系で表すことを考える。(2.4.2a,b) で $\psi=p$ とおくか、または (2.4.4a,b) で $\psi=z$ とおいて静力学平衡の式も用いると、気圧pの水平勾配と等圧面上でのジオポテンシャルΦの水平勾配の間には、

$$\nabla_z p=\rho g\nabla_p z=\rho\nabla_p\Phi \tag{2.4.7}$$

が言える。∇_zは幾何学的高度zを一定にした水平 2 次元の勾配演算子、∇_pは等圧面（p一定）上での 2 次元水平勾配演算子である。これより、前節で求めたベクトル形式での水平運動方程式 (2.3.16) は

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}+f_0\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{V}=-\nabla_p\Phi+\boldsymbol{F} \tag{2.4.8}$$

と表され、気圧傾度力が密度に依存しなくなる。

一方、(2.4.1) において $\psi=z$ とおくと $1=-\rho g\,\partial z/\partial p$ となり、これをさらに変形して

$$\frac{\partial z}{\partial p}=-\frac{1}{\rho g} \tag{2.4.9}$$

が得られる。これにジオポテンシャルΦと比容 $\alpha=1/\rho$ または状態方程式 $p=\rho RT$を用いれば、

$$\frac{\partial\Phi}{\partial p}=-\alpha \qquad \text{または} \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial p}=-\frac{RT}{p} \tag{2.4.10}$$

と表せる。これが気圧座標系における静力学平衡の表現である。

2.4.3 連続の式

ここではまず、z座標系における連続の式 (2.3.14d) を再掲し

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0 \qquad \text{または} \qquad \frac{d\rho}{dt}+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0 \tag{2.4.11}$$

をp座標系に変換することを考える。(2.4.6) において $\psi=\rho$ とおくと、

$$\frac{d\rho}{dt}=\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_p+u\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)_p+v\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)_p+\omega\frac{\partial\rho}{\partial p} \tag{2.4.12}$$

となる。一方、z座標系での速度場の発散をp座標系で書き換えると、(2.4.1)～(2.4.2) を使って

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{v}&=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_z+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_z+\frac{\partial w}{\partial z}\\&=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_p+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_p-\rho g\frac{\partial w}{\partial p}+\rho g\left[\frac{\partial u}{\partial p}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p+\frac{\partial v}{\partial p}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_p\right]\end{aligned} \tag{2.4.13}$$

が得られる。ここで、(2.4.5) を変形した下の式

$$w=\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_p+u\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p+v\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_p-\frac{1}{\rho g}\omega$$

をpで偏微分し、(2.4.9) を使えば、

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial p}&=\left[\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right]_p\frac{\partial z}{\partial p}+\frac{\partial u}{\partial p}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p+\frac{\partial v}{\partial p}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_p+\frac{\omega}{\rho^2 g}\frac{\partial\rho}{\partial p}-\frac{1}{\rho g}\frac{\partial\omega}{\partial p}\\&=\frac{1}{\rho^2 g}\frac{d\rho}{dt}-\frac{1}{\rho g}\frac{\partial\omega}{\partial p}+\frac{\partial u}{\partial p}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p+\frac{\partial v}{\partial p}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_p\end{aligned}$$

と書ける。これを (2.4.13) に代入して、さらに (2.4.7) も使うと、

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_p+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_p+\frac{\partial\omega}{\partial p}=0 \tag{2.4.14}$$

が得られる。すなわち、気圧座標系での速度場の発散は、恒等的に 0 に等しい。これが気圧座標系での連続の式の表現である。言い換えると、気圧座標系における連続の式は、非発散流体の場合と同じ形に書ける。連続の式がこのように簡単になることは、気圧座標系の利点の一つである。

2.4.4 熱力学方程式

z座標系における熱力学方程式の表現は (2.3.11) で

$$C_p\frac{dT}{dt}-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt}=J$$

であった。これと、(2.4.6) において $\psi=T,p$ としたものより、

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_p+\boldsymbol{V}\cdot\nabla_p T+\left(\frac{\partial T}{\partial p}-\frac{1}{C_p}\frac{RT}{p}\right)\omega=\frac{J}{C_p} \tag{2.4.15}$$

が得られる。この式のωにかかる部分を$-S_p$ とおくと、

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_p+\boldsymbol{V}\cdot\nabla_p T-S_p\omega=\frac{J}{C_p} \tag{2.4.16}$$

ただし

$$S_p\equiv\frac{1}{C_p}\frac{RT}{p}-\frac{\partial T}{\partial p}=-\frac{T}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial p}=-T\frac{\partial\ln\theta}{\partial p} \tag{2.4.17}$$

と書ける。この (2.4.16) が気圧座標系における熱力学的エネルギー保存の（従属変数として気温を用いた）表現である。そしてS_pはp座標系で表した大気の静的安定度の符号を変えたものに対応する。これはまた $\Gamma_d = g/C_p$ と $\Gamma = -\partial T/\partial z$ を用いて次のようにも書ける。

$$S_p = \frac{\Gamma_d - \Gamma}{\rho g}$$

熱力学第 1 法則は、(2.3.11) で気温Tでなく温位θを用いて次のように表すこともできた。

$$\frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{R/C_p} \frac{J}{C_p} = \frac{J}{C_p \Pi(p)}$$

この場合は、気圧座標系で書いても方程式の形は変わらず、単に $w\,\partial/\partial z$ を $\omega\,\partial/\partial p$ で置き換えるだけで良い。よって、温位θを用いた場合の方程式は、

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)_p + \boldsymbol{V}\cdot\nabla_p\theta + \omega\frac{\partial \theta}{\partial p} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{R/C_p} \frac{J}{C_p} = \frac{J}{C_p \Pi(p)} \tag{2.4.18}$$

となる。ここで注意すべき点は、z座標系の方程式 (2.3.11) における右辺のpは未知量であったが、p座標系の方程式 (2.4.18) における右辺のpは既知量であることである。

2.4.5　気圧座標系におけるプリミティブ方程式

これまでの議論をまとめて、気圧座標系におけるプリミティブ方程式系として、以下が得られる。

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} + f_0\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{V} = -\nabla_p\Phi + \boldsymbol{F} \tag{2.4.19a}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{RT}{p} \tag{2.4.19b}$$

$$\nabla_p\cdot\boldsymbol{V} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \tag{2.4.19c}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_p + \boldsymbol{V}\cdot\nabla_p T - S_p\omega = \frac{J}{C_p} \quad \left(S_p \equiv \frac{1}{C_p}\frac{RT}{p} - \frac{\partial T}{\partial p}\right) \tag{2.4.19d}$$

5 個の従属変数 $\boldsymbol{V}, \omega, \Phi, T$ （$\boldsymbol{V}$は 2 成分）に対して 5 個の方程式があることになるので、任意の時刻における従属変数の値から、次の時刻における従属変数の値を決定することができるようになる。

第 1 章の方程式系と比較すると、変数ρがなくなったことで、変数が 1 個減っている。また鉛直方向の運動方程式と状態方程式が静力学の式に変わり、方程式の数が 1 個減っている。

2.4.6　気圧座標系におけるプリミティブ方程式のエネルギー保存

気圧座標系で表現したプリミティブ方程式系が、摩擦力と非断熱加熱がない場合（$\boldsymbol{F} = 0,\ J = 0$）に、エネルギー保存則を満たすことを示そう。まず、$\boldsymbol{V}$と (2.4.19a) の内積を取り、(2.4.19c) を用いると、

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{V}|^2\right)\right]_p + \nabla_p\cdot\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{V}|^2\boldsymbol{V}\right) + \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{V}|^2\omega\right) = -\boldsymbol{V}\cdot\nabla_p\Phi \tag{2.4.20}$$

が得られる。この式の右辺を、(2.4.19b) と (2.4.19c) を用いて変形すると、

$$
\begin{aligned}
-\boldsymbol{V}\cdot\nabla_p\Phi = -\nabla_p\cdot\Phi\boldsymbol{V} + \Phi\nabla_p\cdot\boldsymbol{V} &= -\nabla_p\cdot\Phi\boldsymbol{V} - \Phi\frac{\partial\omega}{\partial p} \\
&= -\nabla_p\cdot\Phi\boldsymbol{V} - \frac{\partial}{\partial p}(\Phi\omega) + \omega\frac{\partial\Phi}{\partial p} \\
&= -\nabla_p\cdot\Phi\boldsymbol{V} - \frac{\partial}{\partial p}(\Phi\omega) - \frac{RT}{p}\omega
\end{aligned}
\tag{2.4.21}
$$

これを (2.4.20) に代入すると、

$$
\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{V}|^2\right)\right]_p + \nabla_p\cdot\left[\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{V}|^2 + \Phi\right)\boldsymbol{V}\right] + \frac{\partial}{\partial p}\left[\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{V}|^2 + \Phi\right)\omega\right] = -\frac{RT}{p}\omega \tag{2.4.22}
$$

となる。これは単位質量当たりの空気の運動エネルギー $1/2\,|\boldsymbol{V}|^2$ の方程式である。

次に、(2.4.19d) にC_pを乗じて (2.4.19c) を用いると、

$$
\left[\frac{\partial}{\partial t}(C_pT)\right]_p + \nabla_p\cdot(C_pT\boldsymbol{V}) + \frac{\partial}{\partial p}(C_pT\omega) = \frac{RT}{p}\omega \tag{2.4.23}
$$

が得られる。これは単位質量当たりの空気のエンタルピー $C_pT = C_vT + p\alpha$ の方程式である。(2.4.22) と (2.4.23) を加えれば、次のようなエネルギー保存を表す方程式が得られる。

$$
\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)_p + \nabla_p\cdot[(E+\Phi)\boldsymbol{V}] + \frac{\partial}{\partial p}[(E+\Phi)\omega] = 0 \tag{2.4.24}
$$

$$
E \equiv \frac{1}{2}|\boldsymbol{V}|^2 + C_pT = \frac{1}{2}(u^2+v^2) + C_pT \tag{2.4.25}
$$

そこで、(2.4.24) を大気の上端（$p=0$）から地上（$p=p_s$）まで積分してみる。$p=0$ では $\omega=0$、簡単のためにp_sが一定とすれば $p=p_s$ でも $\omega=0$ となるので、

$$
\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{p_s} E\frac{dp}{g} + \nabla_p\cdot\int_0^{p_s}(E+\Phi)\boldsymbol{V}\frac{dp}{g} = 0 \tag{2.4.26}
$$

となる。ここで、単位面積当たりのエネルギーの時間変化率にするために、重力加速度で割ってある。さらに、この式を閉じた水平領域Dで面積積分すると、2 次元のガウスの発散定理を用いることにより、

$$
\frac{\partial}{\partial t}\iint_D\int_0^{p_s} E\,dxdy\frac{dp}{g} + \oint_C\int_0^{p_s}(E+\Phi)\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,dl\frac{dp}{g} = 0 \tag{2.4.27}
$$

ここで、左辺第 2 項の最初の積分は領域Dの境界Cに沿った線積分であり、$\boldsymbol{n}$ は境界における水平外向きの法線ベクトルを表す。この式から、もし境界を横切る水平風成分がなければ（$\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}=0$）、大気の全エネルギーが保存されることがわかる。

2.4.7 地上気圧の予報方程式

気圧座標系におけるプリミティブ方程式を、実際の数値計算（数値予報など）に用いる場合は、さらに変形して次のような形にしておくのが便利である。まず、連続の式 (2.4.19c) を大気上端 $p=0$ からpまで積分すると、$p=0$ では $\omega=0$ なので

$$
\omega(p) = -\int_0^p \nabla_p\cdot\boldsymbol{V}\,dp \tag{2.4.28}
$$

と表せる。ここで特に地表面 $p = p_s$ の場合を考えると、

$$\omega_s = \omega(p_s) = -\int_0^{p_s} \nabla_p \cdot \boldsymbol{V}\, dp \tag{2.4.29}$$

が得られる。一方、ωの定義式

$$\omega \equiv \frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y} + w\frac{\partial p}{\partial z} \tag{2.4.30}$$

を、簡単のために地表面が水平で海面高度 $z = 0$ であるとすると、地表面での境界条件 $w_s = 0$ （流れは地表面を横切らない）も考慮すると、

$$\omega_s = \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{z=0} + \left(u\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{z=0} + \left(v\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{z=0} + \left(w\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{\partial p_s}{\partial t} + \boldsymbol{V}_s \cdot \nabla p_s \tag{2.4.31}$$

となる。ただし地表面での水平風速を$\boldsymbol{V}_s$とした。これらから、地上気圧p_sの気圧座標系での時間変化を与える方程式として

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} = -\boldsymbol{V}_s \cdot \nabla p_s - \int_0^{p_s} \nabla_p \cdot \boldsymbol{V}\, dp \tag{2.4.32}$$

が得られる。

2.4.8 気圧座標系のプリミティブ方程式の利用

これまでに求めた時間微分項を含む 4 個の方程式、すなわち水平運動の方程式 (2.4.19a) 2 成分と熱力学方程式 (2.4.19d)、及び地上気圧の方程式 (2.4.32) の合計 4 個を使うことで、ある時刻における（初期値）$\boldsymbol{V}, \omega, \Phi, T, p_s$から、次の時刻における 4 個の変数 $\boldsymbol{V}, T, p_s$を適当な計算スキームで計算することができる。その際に必要な他の変数ω, Φについては、時間微分を含まない 2 個の方程式、すなわち静力学の式 (2.4.19b) と連続の式 (2.4.19c) から求めることができる。この意味で、変数 $\boldsymbol{V}, T, p_s$を**予報変数**、ω, Φを**診断変数**と呼ぶことがある。また時間微分項を含む 4 個の方程式を**予報方程式**、時間微分を含まない方程式を**診断方程式**と呼ぶ。

以上から、プリミティブ方程式において、ある時刻の場の状態を完全に決定し、かつ次の時刻の場の状態を予測するのに最低限必要な量は、予報変数である $\boldsymbol{V}, T, p_s$のみであることがわかる。また $\boldsymbol{V}, T$ は 3 次元の量だが、p_sは 2 次元の量である。このことは第 1 章で見た基礎方程式における予報変数が 5 つの 3 次元量（$\boldsymbol{v}$, ρ, pまたはT）であったことと比べると、数値計算を行う上で大幅な計算機資源の節約につながることがわかる。このことから、地球全体といった広い範囲における大規模運動を扱う場合は、プリミティブ方程式に基づいた数値予報モデルが使われることが多い。

2.4.9 気圧座標系の利点と欠点

気圧座標系を用いることによる利点と欠点は次のとおりである。

利点：

(1) 質量保存則（連続の式）が、密度を含まない簡単な形になる。

(2) 気圧傾度力にも密度を含まなくなり、等圧面上のジオポテンシャルの傾度が同じであれば気圧（高度）に関係なく地衡風の強さは同じとなる。（第 3 章）

(3)　温度風の式が簡単になる。（第 3 章）

(4)　渦度方程式が傾圧性による渦度変化の項を含まなくなる。（第 4 章）

(5)　従来の高層観測が指定気圧面を基準に行われてきた。（ただし、GPS ゾンデの導入により、この利点は小さくなっている。）

欠点：

(1)　地表面における気圧は一定でないため、地表面における境界条件の扱いが複雑になる。

(2)　静的安定度 S_p が強い気圧（高度）依存性を持つ。

(3)　成層圏は鉛直解像度が粗くなる傾向がある。

2.5 浅水方程式系

これまで見てきたプリミティブ方程式系の特徴である静力学平衡に加え、密度が一定の場合には、さらに簡単な方程式系が得られる。等密度大気（第 2.1 節）は有限の高さで気圧が 0 となり、自由表面を持つことになるため、大気としては現実的な仮定ではないが、地球の大きさと比較して大気をごく薄い層と見なせるような場合には、ごく簡単化したこの近似で議論することがある。なお、液体の水は近似的に非圧縮と見なせるので、密度一定の仮定から得られる方程式系は、海洋の運動の記述には適している。これは浅水近似（shallow water approximation）と呼ばれる。

このテキストで用いる主要な方程式系は、プリミティブ方程式系と、それを発展させた準地衡風方程式系だが、第 3 章・第 4 章・第 7 章のそれぞれ一部では、大気の大規模運動の特徴を調べるために浅水方程式系を用いる（図 1.2 も参照）。それに先立ってこの第 2.5 節では、この方程式系と、それによって表される最も基本的な波動である浅水波の式を導出しておく。

2.5.1 方程式系の導出

z座標系、f平面近似によるプリミティブ方程式 (2.3.16) と (2.3.14c,d) において、密度を一定値ρ_0とし、さらに摩擦力を無視すると、今の出発点となる基礎方程式系は次のようになる。

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} + f_0 \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{V} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla_z p \tag{2.5.1a}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_0 g \tag{2.5.1b}$$

$$\nabla_z \cdot \boldsymbol{V} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{2.5.1c}$$

ただし、$\boldsymbol{V} \equiv (u, v, 0)$ で、

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{V} \cdot \nabla_z + w \frac{\partial}{\partial z}\ , \quad \nabla_z \equiv \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_z , \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_z , 0 \right] \tag{2.5.2}$$

である。ここでは∇_zは等高度面（z 一定の平面）における水平勾配演算子で、高度により値が変わる。

いま、地形がないときの地表面の座標を $z = 0$ とし、地表面の地形による起伏を $z = h_B(x, y)$ で表すことにする（図 2.4a）。これはこれから考える流体の底面の高度である。また流体の自由表面の高度

を $z = h(x, y)$ とする。このとき (2.5.1b) を流体中のある高さzから自由表面hまで積分すると、

$$p(h) - p(z) = -\rho_0 g(h - z)$$

が得られる。自由表面における圧力は $p(h) = 0$ なので

$$p(z) = \rho_0 g(h - z) \tag{2.5.3}$$

である。これを (2.5.1a) に代入すると、

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} + f_0 \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{V} = -g\nabla_z h \tag{2.5.4}$$

が得られる。この式の右辺はzに依存しないので、もし$\boldsymbol{V}$がある時刻にzに依存していなければ、その後も$\boldsymbol{V}$はzに依存せず、$\partial \boldsymbol{V}/\partial z = 0$ である。従って、改めてこの式を

$$\frac{d_H \boldsymbol{V}}{dt} + f_0 \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{V} = -g\nabla_H h \tag{2.5.5}$$

と書くことにする。∇_Hは高度に依存しない水平勾配演算子である。ラグランジュ微分は

$$\frac{d_H}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{V} \cdot \nabla_H \tag{2.5.6}$$

である。

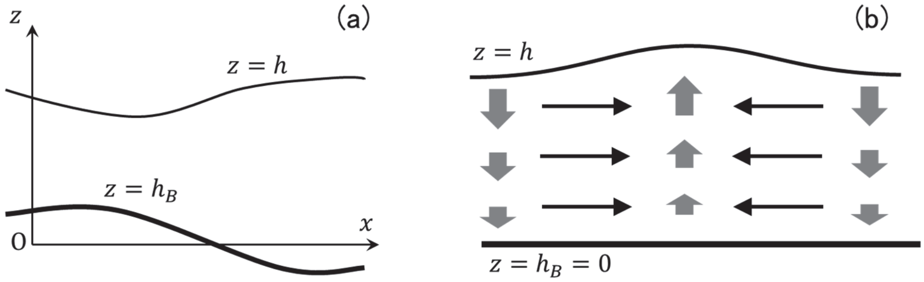


図 2.4　(a) x-z断面における底面地形h_Bと等密度大気の自由表面hの例。(b) 底面の起伏がない（$h_B = 0$）場合の水平運動（細矢印）・鉛直運動（太矢印）と自由表面hの変化の関係。

次に、連続の式 (2.5.1c) を変形する。$\boldsymbol{V}$がzに依存しないことにより、水平発散 $\nabla_z \cdot \boldsymbol{V}$も$z$に依存しないので、$\nabla_H \cdot \boldsymbol{V}$と書こう。このことに注意して、(2.5.1c) を底面の高さh_Bから zまで積分すると、

$$w(x, y, z, t) - w(x, y, h_B, t) = -(z - h_B)\nabla_H \cdot \boldsymbol{V} \tag{2.5.7}$$

と書ける。一方、底面の高度は時間変化しない（$\partial h_B/\partial t = 0$）ことから、

$$w(x, y, h_B, t) \equiv \left.\frac{dz}{dt}\right|_{z=h_B} = \frac{d_H h_B}{dt} = \boldsymbol{V} \cdot \nabla_H h_B$$

これは底面における鉛直速度が底面の起伏に沿った水平運動によって生じることを表す。これにより (2.5.7) は

$$w(x, y, z, t) = (h_B - z)\nabla_H \cdot \boldsymbol{V} + \boldsymbol{V} \cdot \nabla_H h_B \tag{2.5.8}$$

と表すことができる（$h_B = 0$ の場合について図 2.4b を参照）。自由表面 $z = h$ におけるwは、

$$w(x, y, h, t) = (h_B - h)\nabla_H \cdot \boldsymbol{V} + \boldsymbol{V} \cdot \nabla_H h_B$$

と書ける。一方、これは自由表面高度hの時間変化でもあるので

$$w(x,y,h,t) \equiv \left.\frac{dz}{dt}\right|_{z=h} = \frac{d_H h}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + \boldsymbol{V}\cdot\nabla_H h$$

とも書ける。従って、これらを使って

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \boldsymbol{V}\cdot\nabla_H h = (h_B - h)\nabla_H\cdot\boldsymbol{V} + \boldsymbol{V}\cdot\nabla_H h_B$$

と表せる。これを変形して、

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla_H\cdot\{(h-h_B)\boldsymbol{V}\} = 0 \tag{2.5.9}$$

が得られる。

得られた運動方程式 (2.5.5) と連続の式（質量保存則） (2.5.9) を、**浅水方程式系**（shallow water equations）という。この方程式系は静力学平衡 (2.5.1b) を前提としているので、水平スケールが深さhよりも十分大きな現象の記述に適している。

2.5.2 エネルギー保存則

簡単のために、底面の起伏がない場合（$h_B = 0$）について、浅水方程式系がエネルギー保存則を満たすことを示そう。水平風速$\boldsymbol{V}$がzによらないので、単位底面積の気柱が持つ運動エネルギーKは

$$K = \frac{1}{2}\rho_0 h|\boldsymbol{V}|^2 \tag{2.5.10}$$

一方、単位底面積の気柱が持つ重力による位置エネルギーUは

$$U = \int_0^h \rho_0 gz dz = \frac{1}{2}\rho_0 g h^2 \tag{2.5.11}$$

力学的エネルギー $K+U$ の時間微分は、(2.5.5) と (2.5.9) を使うと、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(K+U) &= \frac{1}{2}\rho_0\frac{\partial h}{\partial t}|\boldsymbol{V}|^2 + \rho_0 h\boldsymbol{V}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + \rho_0 g h\frac{\partial h}{\partial t} \\
&= \left(\frac{1}{2}\rho_0|\boldsymbol{V}|^2 + \rho_0 g h\right)(-\nabla_H\cdot h\boldsymbol{V}) + \rho_0 h\boldsymbol{V}\cdot[-(\boldsymbol{V}\cdot\nabla_H)\boldsymbol{V} - f_0\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{V} - g\nabla_H h] \\
&= -\nabla_H\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\rho_0|\boldsymbol{V}|^2 + \rho_0 g h\right)h\boldsymbol{V}\right] + h\boldsymbol{V}\cdot\nabla_H\left(\frac{1}{2}\rho_0|\boldsymbol{V}|^2 + \rho_0 g h\right) - \rho_0 h\boldsymbol{V}\cdot[(\boldsymbol{V}\cdot\nabla_H)\boldsymbol{V} + g\nabla_H h] \\
&= -\nabla_H\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\rho_0 h|\boldsymbol{V}|^2 + \rho_0 g h^2\right)\boldsymbol{V}\right]
\end{aligned}$$

となることから、次のエネルギー保存則が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t}(K+U) + \nabla_H\cdot[(K+2U)\boldsymbol{V}] = 0 \tag{2.5.12}$$

左辺第 1 項は単位質量当たりの全エネルギーの時間変化であり、第 2 項はエネルギーフラックスの発散である。もしある底面領域Dの上空の空気が剛体壁で囲まれているなら、壁に垂直な成分の風は 0 となるので、(2.5.12) 式をその領域について面積分してガウスの定理を用いれば、次の形に書けて全エネ

ルギーが保存されることが説明される。

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_D (K+U)\,dD = 0$$

(2.5.12) 式の第 2 項の括弧内が $K + 2U$ で、第 1 項の$K + U$と異なっている。これは気圧による力に対して気柱の空気がなす仕事のエネルギー変換を表している（Vallis 2006, p.140）ことに注意が必要である。

2.5.3 浅水波

波長が水深より十分大きい水面波を浅水波という。その伝播の様子は浅水方程式系によって調べることができる。浅水方程式系 (2.5.5) (2.5.9) において、コリオリ力と底面の起伏を無視する（すなわち $f_0 = 0$、$h_B = 0$ とする）と、

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + (\boldsymbol{V}\cdot\nabla_H)\boldsymbol{V} = -g\nabla_H h \tag{2.5.13}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla_H\cdot(h\boldsymbol{V}) = 0 \tag{2.5.14}$$

となる。ここで第 1.3 節で音波を扱ったときと同様に、摂動法を用いる。波がなく静止しているとき（$\boldsymbol{V} = 0$）の深さをH_0（定数）とし、静止状態からの変動成分に$'$をつけると、

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}', \qquad h = H_0 + h' \tag{2.5.15}$$

と表すことができる。これを (2.5.13) (2.5.14) に代入すると、

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}'}{\partial t} + (\boldsymbol{V}'\cdot\nabla_H)\boldsymbol{V}' = -g\nabla_H h' \tag{2.5.16}$$

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + \nabla_H\cdot[(H_0 + h')\boldsymbol{V}'] = 0 \tag{2.5.17}$$

ここで、$'$のついた項は変動が微小であるので、その 2 次の項を無視することにすると、

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}'}{\partial t} = -g\nabla_H h' \tag{2.5.18}$$

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + H_0\nabla_H\cdot\boldsymbol{V}' = 0 \tag{2.5.19}$$

と近似できる。(2.5.18) の発散をとったものと (2.5.19) を時間微分した式から$\boldsymbol{V}'$を消去すると、

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} = gH_0\nabla_H^2 h' \tag{2.5.20}$$

が得られる。これは 2 次元の波動方程式であり、水面の変位が速度$\sqrt{gH_0}$ で伝播することを示している。復元力は重力であり、浅水重力波とも呼ばれる。伝播速度が流体の密度などには関係なく、深さH_0のみによって決まることが特徴である。この速度は、海の深さが 1000 m であれば約 100 m s^{-1}、深さ 10 m であれば約 10 m s^{-1} であり、津波の進行速度が一般にこれで説明される。

第 2 章の参考文献

阿部豊雄、2015：気象庁における高層気象観測の変遷と観測値の特性。第 1 部：高層気象観測の変遷、天気、62、161－185。

付録 2A　静力学平衡が成り立つ条件

第 2.3 節における運動方程式の鉛直成分のスケーリングにおいては、鉛直加速度 dw/dt は、最大項の重力加速度や鉛直気圧傾度と比較して非常に小さいので、良い近似で省略できるように見える。しかし、運動がない静止状態を考えた場合に、鉛直気圧傾度は重力と釣り合って（すなわち静力学平衡となって）いるから、運動状態でも気圧のかなりの部分はその上の気柱の重さ（静水圧）によると考えられる。従って、鉛直加速度 dw/dt は、運動による気圧変化部分に伴う鉛直気圧傾度力と比較すべきとなる。

議論を簡単にするために、非圧縮大気を例として、この問題を考える。非圧縮大気では $d\rho/dt = 0$ が成り立つので、連続の式から大気の運動は非発散（$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$）になる。この関係を使って鉛直速度$w$のスケールを見積もってみると、

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

において、

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{U}{L}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{U}{L}, \qquad \frac{\partial w}{\partial z} \sim \frac{W}{H} \tag{2A.1}$$

から、

$$W \sim \frac{H}{L} U = \delta U, \qquad \delta = \frac{H}{L} \tag{2A.2}$$

が言える。この鉛直スケールと水平スケールの比であるδをアスペクト比といい、$\delta \ll 1$ の現象では鉛直速度のスケールWは水平速度のスケールUと比較して無視できるほど小さい。

次に、気圧pと密度ρを

$$p = \bar{p}(z) + p'(x, y, z, t), \quad \rho = \bar{\rho}(z) + \rho'(x, y, z, t) \tag{2A.3}$$

のように平均部分（以下、静止部分と呼ぶ）と運動に伴う平均からのずれの部分（以下、運動部分と呼ぶ）に分ける。静止部分については静力学平衡が成り立つ。すなわち、

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\bar{\rho} g$$

である。このとき、運動方程式のx成分の各項の大きさは、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} - fv = -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial p'}{\partial x} \tag{2A.4}$$

$$\frac{U^2}{L} \qquad \frac{U^2}{L} \qquad \frac{U^2}{L} \qquad \frac{UW}{H} \qquad fU \qquad \frac{P}{\rho L}$$

となる。運動方程式のy成分についても同様で、運動部分の気圧の大きさは、

$$P = \rho U[U, fL]_{max} \tag{2A.5}$$

であることがわかる。ただし、$[U, fL]_{max}$は U とfLのうち大きい方であることを表す。

一方、運動方程式のz成分（ただし静止部分の鉛直気圧傾度は静力学平衡するので除く）の右辺第 2 項以外の項の大きさは、

$$\rho\left[\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right] = -\frac{\partial p'}{\partial z} - \rho' g \tag{2A.6}$$

$$\rho\left[\frac{UW}{L} \quad \frac{UW}{L} \quad \frac{UW}{L} \quad \frac{W^2}{H}\right] \qquad \frac{P}{H}$$

ここから、鉛直気圧傾度力による加速度に対する鉛直加速度の比は、

$$\frac{\text{鉛直加速度}}{\text{鉛直気圧傾度力による加速度}} = \rho\left|\frac{dw/dt}{\partial p'/\partial z}\right| \sim \frac{\rho(UW/L)}{P/H} \tag{2A.7}$$

となる。これに (2A.5) 式と (2A.2) 式を用いると、

$$\rho\left|\frac{dw/dt}{\partial p'/\partial z}\right| \sim \frac{\rho(UW/L)}{\rho U[U, fL]_{max}/H} = \frac{H(W/L)}{[U, fL]_{max}} = \frac{(H/L)^2 U}{[U, fL]_{max}} = \frac{\delta^2 U}{[U, fL]_{max}} \tag{2A.8}$$

となる。この比は

- $U/fL \geq 1$ のとき　δ^2
- $U/fL \leq 1$ のとき　$Ro\delta^2$　（$Ro \equiv U/fL$　：ロスビー数）

従って、運動部分についても $\delta^2 \ll 1$ であれば静力学近似が精度良く成り立つことがわかる。

中緯度の高低気圧は、L～10^6m、H～10^4m のスケールであるから、アスペクト比 δ =10^{-2} で、ロスビー数 Ro～0.1 も用いると、10^{-5}の精度で静力学平衡の近似が成立することがわかる。

一方、積乱雲は、L～10^4m、H～10^4m 程度であるから、δ =1 で、静力学近似は使えない。従って、静力学近似の導入を前提としたプリミティブ方程式は、対流現象を扱うのには適当でない。

付録 2B　さまざまな鉛直座標で表したプリミティブ方程式

静力学平衡の下では、気圧と高度の間に単調な関数関係があり、それを利用して気圧を高度座標の代わりに使うことができた。同様のことが可能な変数・座標系としては、$\sigma = p/p_s$ を用いるσ座標系、$\ln(p/p_0)$ を用いる対数気圧座標系、温位θを用いる温位座標系等がある。ここではいくつかの鉛直座標系の下でのプリミティブ方程式の表現を見ておく。

2B.1　一般鉛直座標変換

ここでは一般化した鉛直座標変数として $\xi(x, y, z, t)$ を採用し、(x, y, z, t) 座標系における微分演算を (x, y, ξ, t) 座標系における微分演算に変換する。第 2.4 節のp座標系への変換と同様に、任意のスカラー量ψに対して、

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)_z = \left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)_\xi - \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)_\xi \frac{\partial\psi}{\partial z} \qquad s = x, y, t \tag{2B.1}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{1}{\partial z/\partial\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\xi} \tag{2B.2}$$

が成立する。これより一般鉛直座標系における水平ナブラ演算子について、

$$\nabla_z\psi = \nabla_\xi\psi - \frac{1}{\partial z/\partial\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\nabla_\xi z \tag{2B.3}$$

$$\nabla_z \cdot \boldsymbol{A} = \nabla_\xi \cdot \boldsymbol{A} - \frac{1}{\partial z/\partial\xi}\left(\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial\xi}\right)\cdot\nabla_\xi z \tag{2B.4}$$

が成り立つ。（$\boldsymbol{A}$は任意のベクトルである）

ラグランジュ微分は、$\boldsymbol{V} = (u, v, 0)$（$u = dx/dt$、$v = dy/dt$）、$\dot{\xi} = d\xi/dt$ として

$$\frac{d\psi}{dt} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_\xi + \boldsymbol{V}\cdot\nabla_\xi\psi + \dot{\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\xi} \tag{2B.5}$$

と表される。

2B.2　一般鉛直座標系におけるプリミティブ方程式

- 運動方程式

一般鉛直座標系におけるナブラ演算 (2B.3) 式において、$\psi = p$ とし、さらに静力学平衡の関係を用いると、気圧傾度力の項は

$$\frac{1}{\rho}\nabla_z p = \frac{1}{\rho}\left(\nabla_\xi p - \frac{\partial p}{\partial z}\nabla_\xi z\right) = \alpha\nabla_\xi p + \nabla_\xi\Phi$$

と表される（$\alpha = 1/\rho$）。よって、運動方程式の水平成分は

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} + f\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{V} = -\alpha\nabla_\xi p - \nabla_\xi\Phi + \boldsymbol{F} \tag{2B.6}$$

となる。ξがpのみの関数であれば、右辺第 1 項は消え、水平気圧傾度力はΦのみで表される。

- 静力学平衡の式

(2B.2) 式で $\psi = p$ として静力学の式を使うと

$$\frac{1}{\partial z/\partial\xi}\frac{\partial p}{\partial\xi} + \rho g = 0$$

これに $\partial z/\partial\xi$ をかけて整理すると

$$\frac{\partial p}{\partial\xi} + \rho\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} = 0 \tag{2B.7}$$

が得られる。

- 連続の式

z座標系での連続の式

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0 \tag{2B.8}$$

における左辺第 2 項の発散（3 次元）を一般鉛直座標で表すと、(2B.4) と (2B.2) を使って

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=\nabla_z\cdot\boldsymbol{V}+\frac{\partial w}{\partial z}=\nabla_\xi\cdot\boldsymbol{V}-\frac{1}{\partial z/\partial\xi}\left(\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial\xi}\right)\cdot\nabla_\xi z+\frac{1}{\partial z/\partial\xi}\frac{\partial w}{\partial\xi} \tag{2B.9}$$

である。一方、(2B.5) 式で $\psi=z$ とすると、

$$w=\frac{dz}{dt}=\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_\xi+\boldsymbol{V}\cdot\nabla_\xi z+\dot{\xi}\frac{\partial z}{\partial\xi} \tag{2B.10}$$

であり、これをξで偏微分した

$$\frac{\partial w}{\partial\xi}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial\xi}\cdot\nabla_\xi z+\boldsymbol{V}\cdot\nabla_\xi\frac{\partial z}{\partial\xi}+\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial\xi}\frac{\partial z}{\partial\xi}+\dot{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial z}{\partial\xi}\right) \tag{2B.11}$$

を (2B.9) 式に代入して

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{v}&=\nabla_\xi\cdot\boldsymbol{V}+\frac{1}{\partial z/\partial\xi}\left[\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla_\xi+\dot{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\right]\left(\frac{\partial z}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial\xi}\\&=\frac{1}{\partial z/\partial\xi}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial\xi}\right)+\nabla_\xi\cdot\boldsymbol{V}+\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial\xi}\end{aligned} \tag{2B.12}$$

が得られる。

ここで、ξ座標系における単位体積当たりの質量として定義した密度 $\tilde{\rho}$ を導入する。これは擬密度（pseudo-density）と呼ばれる（Hoskins and James 2014, p.99）(*)。z座標系における空気塊の質量が $\delta m=\rho\delta x\delta y\delta z$ であるときに、同じ空気塊の質量がξ座標系では $\delta m=\tilde{\rho}\delta x\delta y\delta\xi$ であることから、$\rho\delta z=\tilde{\rho}\delta\xi$ であるといえるので、

$$\tilde{\rho}=\rho\frac{\partial z}{\partial\xi}=-\frac{1}{g}\frac{\partial p}{\partial\xi} \tag{2B.13}$$

である。これと (2B.12) を (2B.8) に用いると、連続の式は

$$\frac{d\tilde{\rho}}{dt}+\tilde{\rho}\left(\nabla_\xi\cdot\boldsymbol{V}+\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial\xi}\right)=0 \tag{2B.14}$$

または

$$\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial t}+\nabla_\xi\cdot(\tilde{\rho}\boldsymbol{V})+\frac{\partial}{\partial\xi}(\tilde{\rho}\dot{\xi})=0 \tag{2B.15}$$

のように書ける。

- 熱力学方程式と状態方程式

熱力学第一法則については、ラグランジュ微分が (2B.5) 式で与えられることに注意すれば、z座標系の場合と同じ形で書ける。また状態方程式は微分を含まないスカラー関数の関係式なので、座標変換の影響は受けない。

(*) 英語の “pseudo-” には物理学においては「擬」を充てることが多いので、ここでは “pseudo-density”

を「擬密度」とする。

【問題】(2B.6) (2B.7) (2B.14) の各式におけるξにzあるいはpを入れることで、z座標系あるいはp座標系におけるプリミティブ方程式の運動方程式、静力学平衡の式、及び連続の式が得られることを確かめよ。また擬密度を求めることにより、p座標系における連続の式に密度が含まれず風速の発散のみとなる理由を説明せよ。

2B.3　σ 座標系におけるプリミティブ方程式

気圧座標系から派生したものとして、気圧pを地表面気圧 p_sで規格化した

$$\sigma \equiv \frac{p}{p_s} \tag{2B.16}$$

を鉛直座標とするのをσ座標系（sigma coordinate）と呼ぶ。これは $\sigma = 1$ が常に地表面を表すので、地表面における境界条件を与えやすい利点があるため、かつては全球数値予報モデルの鉛直座標としてよく用いられていた。ただし、σ座標系は地表面の境界条件を与えやすくするために導入されたが、地形の影響が高高度に及んでしまう欠点がある。このため近年は、σ座標とp座標を組み合わせたハイブリッド座標系がしばしば採用される。

- ラグランジュ微分

$$\frac{d}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_\sigma + \boldsymbol{V}\cdot\nabla_\sigma + \dot{\sigma}\frac{\partial}{\partial\sigma} \qquad \dot{\sigma} \equiv \frac{d\sigma}{dt} \tag{2B.17}$$

- 静力学平衡の式

(2B.7) 式と $p = \sigma p_s$ から、

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma} = -\alpha p_s = -\frac{RT}{\sigma} \tag{2B.18}$$

- 運動方程式

(2B.6) 式と$p = \sigma p_s$ を用いて、

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} + f\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{V} = -RT\nabla_\sigma \ln p - \nabla_\sigma\Phi + \boldsymbol{F} = -RT\nabla_\sigma \ln p_s - \nabla_\sigma\Phi + \boldsymbol{F} \tag{2B.19}$$

ここに静力学平衡の式 (2B.18) も使ってTを消去すれば

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} + f\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{V} = \sigma\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}\nabla_\sigma \ln p_s - \nabla_\sigma\Phi + \boldsymbol{F} \tag{2B.20}$$

- 連続の式

(2B.13) 式と $p = \sigma p_s$ から

$$\tilde{\rho} = -\frac{p_s}{g}$$

これを (2B.14) 式に用いてさらに変形すると

$$\frac{d}{dt}\ln p_s + \nabla_\sigma \cdot \boldsymbol{V} + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} = 0 \tag{2B.21}$$

- 熱力学方程式

　熱力学第一法則

$$C_p \frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt} = J$$

に、$p = \sigma p_s$ から導かれる

$$\frac{dp}{dt} = p_s \dot{\sigma} + \sigma \frac{dp_s}{dt}$$

を適用すると、

$$C_p \frac{dT}{dt} = \frac{RT}{p_s \sigma}\left(p_s \dot{\sigma} + \sigma \frac{dp_s}{dt}\right) + J = RT\left(\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} + \frac{1}{p_s}\frac{dp_s}{dt}\right) + J$$

が得られる。これに連続の式 (2B.21) を使って

$$C_p \frac{dT}{dt} = RT\left(\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} - \nabla_\sigma \cdot \boldsymbol{V} - \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma}\right) + J \tag{2B.22}$$

- 地上気圧の予報方程式と鉛直速度

　連続の式 (2B.21) を書き換えると

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} + \boldsymbol{V} \cdot \nabla_\sigma p_s + \dot{\sigma}\frac{\partial p_s}{\partial \sigma} + p_s \nabla_\sigma \cdot \boldsymbol{V} + p_s \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} = 0$$

これをフラックス形式にすると

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} = -\nabla_\sigma \cdot (p_s \boldsymbol{V}) - \frac{\partial}{\partial \sigma}(p_s \dot{\sigma}) \tag{2B.23}$$

これをさらに $\sigma = 1$ （地表面）から σ まで積分すると、

$$(\sigma - 1)\frac{\partial p_s}{\partial t} = -\int_1^\sigma \nabla_\sigma \cdot (p_s \boldsymbol{V}) d\sigma - p_s \dot{\sigma}$$

となる。ここで、$\sigma = 1$（地表面）における鉛直速度を $\dot{\sigma} = 0$ としている。これにより、任意の高度（σ）における$\dot{\sigma}$が

$$\dot{\sigma} = \frac{(1-\sigma)}{p_s}\frac{\partial p_s}{\partial t} - \frac{1}{p_s}\int_1^\sigma \nabla_\sigma \cdot (p_s \boldsymbol{V}) d\sigma \tag{2B.24}$$

のように水平風の 3 次元分布と地上気圧分布から求められる。この右辺第 1 項にある地上気圧の時間変化については、この式で $\sigma = 0$ （大気上端）とおき、そこでの鉛直速度を $\dot{\sigma} = 0$ とすると、地上気圧の予報方程式

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} = -\int_0^1 \nabla_\sigma \cdot (p_s \boldsymbol{V})\, d\sigma \tag{2B.25}$$

が得られる。

2B.4 対数気圧座標系におけるプリミティブ方程式

気圧 p を基準気圧 p_0 （多くの場合は 1000hPa とする）で規格化し、さらに対数を取った

$$Z \equiv -H \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) \ , \qquad H = \frac{RT_0}{g} \tag{2B.26}$$

で定義した Z を鉛直座標としたものを対数気圧座標系（logarithm-pressure coordinate）と呼ぶ。ここで、T_0（定数）は大気の平均的気温であり、Hはそれに対するスケールハイトで定数である。定義より、$p = p_0 e^{-Z/H}$ である。等温大気の場合は Zは幾何学的高度zと同等になる。

p座標系やσ座標系では対流圏と比較して成層圏の鉛直解像度が低くなるが、対数気圧座標系では気圧座標系の利点を保ちつつ上の短所を回避できる。σ座標系が数値モデルに適しているのに対して、対数気圧座標系は理論的な考察に適しており、傾圧不安定の議論などに用いられる。本テキストでは第 7 章の内部ロスビー波の節、及び第 8 章の Eady 問題の節で使用されている。

Zによる鉛直微分は以下のように表される。

$$\frac{\partial}{\partial p} = \frac{dZ}{dp}\frac{\partial}{\partial Z} = -\frac{H}{p}\frac{\partial}{\partial Z} \ , \qquad \frac{\partial}{\partial z} = -\rho g \frac{\partial}{\partial p} = \frac{gH}{RT}\frac{\partial}{\partial Z} = \frac{T_0}{T}\frac{\partial}{\partial Z}$$

- 鉛直速度

$$W \equiv \frac{dZ}{dt} = -H\left(\frac{1}{p}\frac{dp}{dt}\right) = -\frac{H}{p}\omega \tag{2B.27}$$

- ラグランジュ微分

$$\frac{d}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_Z + \boldsymbol{V}\cdot\nabla_Z + W\frac{\partial}{\partial Z} \tag{2B.28}$$

- 運動方程式

(2B.6) 式から

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} + f\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{V} = -\nabla_Z\Phi + \boldsymbol{F} \tag{2B.29}$$

- 静力学平衡の式

(2B.7) 式と、$\partial p/\partial Z = -p/H$から

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Z} = \frac{RT}{H} = g\frac{T}{T_0} \tag{2B.30}$$

- 連続の式

(2B.13) と、$\partial p/\partial Z = -p/H$ から、この場合の擬密度は

$$\tilde{\rho} = \frac{p}{gH} = \rho_0 e^{-Z/H} \ , \qquad \rho_0 = \frac{p_0}{RT_0} \tag{2B.31}$$

である。これを (2B.14) に用いて変形すると

$$\frac{d}{dt}\ln p + \nabla_Z\cdot\boldsymbol{V} + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0$$

であり、またZの定義より $\ln p = \ln p_0 - Z/H$ であるから

$$\frac{d}{dt}\ln p = -\frac{1}{H}\frac{dZ}{dt} = -\frac{W}{H}$$

を用いると、

$$\nabla_Z \cdot \boldsymbol{V} + \frac{\partial W}{\partial Z} - \frac{W}{H} = 0 \tag{2B.32}$$

$$\nabla_Z \cdot \boldsymbol{V} + \frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial Z}(pW) = 0 \tag{2B.33}$$

が得られる。

- 熱力学方程式

熱力学第一法則

$$C_p\frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt} = J$$

において、左辺第 2 項を

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt} = -\frac{RT}{p}\frac{dp}{dt} = -RT\frac{d}{dt}\ln p = \frac{RT}{H}W = g\left(\frac{T}{T_0}\right)W$$

のように書き換えると

$$C_p\frac{dT}{dt} + g\left(\frac{T}{T_0}\right)W = J \tag{2B.34}$$

が得られる。

さらに静力学平衡の式 (2B.30) を用いて気温Tを層厚$\partial\Phi/\partial Z$で表すと

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{V}\cdot\nabla_Z\right)\frac{\partial\Phi}{\partial Z} + N_Z^2 W = \frac{RJ}{C_p H} \tag{2B.35}$$

と書ける。ここで、N_Z は対数気圧座標におけるブラント・バイサラ振動数で、

$$N_Z^2 = \frac{R}{H}\left(\frac{\partial T}{\partial Z} + \frac{R}{C_p H}T\right) = \frac{R}{H}\left(\frac{\partial T}{\partial Z} + \frac{g}{C_p}\frac{T}{T_0}\right) = \frac{g}{T_0}\left(\frac{\partial T}{\partial Z} + \frac{g}{C_p}\frac{T}{T_0}\right) \tag{2B.36}$$

と表される。これを通常のz座標系に変換し、また $\Gamma_d = g/C_p$、$\Gamma = -dT/dz$ も用いて変形すると、

$$N_Z^2 = \frac{g}{T_0}\frac{T}{T_0}\left(\frac{\partial T}{\partial z} + \Gamma_d\right) = \frac{g}{T_0}\frac{T}{T_0}(\Gamma_d - \Gamma)$$

となる。一方、通常のz座標系で表したブラント・バイサラ振動数Nは

$$N^2 = g\frac{\Gamma_d - \Gamma}{T}$$

であったので、対数気圧座標におけるN_Zとの間には

$$N_Z^2 = \left(\frac{T}{T_0}\right)^2 g\frac{\Gamma_d - \Gamma}{T} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^2 N^2 \tag{2B.37}$$

の関係がある。状態方程式と (2B.31) を使うと、

$$\frac{N_Z^2}{N^2} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^2 = \left(\frac{\tilde{\rho}}{\rho}\right)^2$$

であることもわかる。

2B.5　温位座標系におけるプリミティブ方程式

大気が安定な状態では、温位 $\theta = T(p_0/p)^{R/C_p}$ は高度とともに単調に増加するので、温位θを鉛直座標として採用することができる（isentropic coordinate）。乾燥断熱条件の下では大気は温位を保存しながら移動するので、空気塊は等温位面上を移動することになる。従って、近似的に断熱と考えられる場合、温位座標系を使えば等温位面上で空気塊の動きを追跡できることになる。また、温位座標系は静的安定度が大きい成層圏や前線層付近の構造を見るのに適している。

- ラグランジュ微分

$$\frac{d}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_\theta + \boldsymbol{V}\cdot\nabla_\theta + \dot{\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} \qquad \dot{\theta} \equiv \frac{d\theta}{dt} \tag{2B.38}$$

- 運動方程式

(2B.6) 式を用いて、

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} + f\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{V} = -\alpha\nabla_\theta p - \nabla_\theta\Phi + \boldsymbol{F}$$

であるが、温位の定義式 $\theta = T(p_0/p)^{R/C_p}$ の対数を取って∇_θを作用させると（すなわち、θ面での水平勾配をとると）

$$\frac{1}{T}\nabla_\theta T - \frac{R}{pC_p}\nabla_\theta p = \frac{1}{\theta}\nabla_\theta\theta = 0$$

であるから

$$\frac{1}{\rho}\nabla_\theta p = C_p\nabla_\theta T$$

が言えるので、

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} + f\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{V} = -\nabla_\theta\left(C_pT + \Phi\right) + \boldsymbol{F} \tag{2B.39}$$

が得られる。ここで、**モンゴメリー流線関数**（Montgomery stream function）

$$\Psi \equiv C_pT + \Phi \tag{2B.40}$$

を導入する。これは位置エネルギーΦとエンタルピーC_pTの和である。これを用いると、(2B.39) 式は

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} + f\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{V} = -\nabla_\theta\Psi + \boldsymbol{F} \tag{2B.41}$$

と書ける。

- 静力学平衡の式

(2B.7) 式から、

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0$$

温位の定義式 $\theta = T(p_0/p)^{R/C_p}$ の対数を取って両辺をθで微分すると

$$\frac{1}{\theta} = \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial \theta} - \frac{R}{pC_p}\frac{\partial p}{\partial \theta}$$

これらより

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(C_p T + \Phi\right) = \frac{C_P T}{\theta} \tag{2B.42}$$

ここで、エクスナー関数（Exner function）（第 1 章で既出）

$$\Pi(p) \equiv \left(\frac{p}{p_0}\right)^{R/C_p} = \frac{T}{\theta} \tag{2B.43}$$

とモンゴメリー流線関数 (2B.40) も用いると、(2B.42) は

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = C_P \Pi(p) \tag{2B.44}$$

と書ける。

- 連続の式

(2B.13) の擬密度を、ここでは等温位面密度σとする。

$$\sigma = -\frac{1}{g}\frac{\partial p}{\partial \theta} \tag{2B.45}$$

これを用いて、(2B.15) より

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \nabla_\theta \cdot (\sigma \boldsymbol{V}) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sigma \dot{\theta}\right) = 0 \tag{2B.46}$$

が得られる。

- 熱力学方程式

第 1.3 節及び第 2.4 節において、熱力学方程式を温位で表すと

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{J}{C_P \Pi(p)}$$

であることが示されていた。一方、(2B.38) で $\dot{\theta} \equiv d\theta/dt$ としていたので、熱力学方程式は

$$\dot{\theta} \equiv \frac{d\theta}{dt} = \frac{J}{C_P \Pi(p)} \tag{2B.47}$$

である。断熱（$J = 0$）の場合に空気塊の運動が等温位面上に拘束されることが、温位座標系における鉛直速度$\dot{\theta} = 0$ に、また非断熱の場合に空気塊がもとの等温位面から鉛直に離れる速度が$\dot{\theta}$に対応する。

付録 2C　円筒座標系におけるプリミティブ方程式

付録 1D に示した円筒座標系（r, λ, z）において、u, v, wをそれぞれ動径方向、接線方向、鉛直方向の速度成分とすると

$$\boldsymbol{v} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + w\boldsymbol{k} \tag{2C.1}$$

ただし

$$u = \frac{dr}{dt}, \quad v = r\frac{d\lambda}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt} \tag{2C.2}$$

である。また任意のスカラー関数fのラグランジュ微分は

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial f}{\partial \lambda} + w\frac{\partial f}{\partial z} \tag{2C.3}$$

と表される。

このときのプリミティブ方程式系は以下のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial u}{\partial \lambda} + w\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} - fv = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + F_r \tag{2C.4a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial \lambda} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} + fu = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \lambda} + F_\lambda \tag{2C.4b}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial w}{\partial \lambda} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g + F_z \tag{2C.4c}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\rho r u) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \lambda}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \tag{2C.4d}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u\frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial \theta}{\partial \lambda} + w\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{J}{C_p \Pi(p)} \tag{2C.4e}$$

運動方程式の動径成分 (2C.4a) では、左辺第 5 項にメトリック項 $-v^2/r$ がある。これは接線速度vにより生じる見かけの力である遠心力と考えることで理解しやすい。

運動方程式の接線成分 (2C.4b) 式の左辺第 5 項のメトリック項 uv/r は、以下のように解釈できる。回転中心から半径rの距離を接線速度 v で円運動している空気塊があるとする。その半径rが動径速度uで $r + u\Delta t$ に変化すると、$|u\Delta t| \ll r$ であれば接線速度は角運動量保存により$v + \Delta v = v\{r/(r + u\Delta t)\} \cong v(1 - u\Delta t/r)$ に変化する。すなわち、円運動を仮定する座標系での接線方向の加速度として $\Delta v/\Delta t = -uv/r$ を考える必要があることがわかる。

さらに、(2C.4b) 式を考えるにあたって、原点を通る鉛直軸（回転軸）のまわりの絶対角運動量をMと定義する。

$$M \equiv rv + \frac{1}{2}fr^2 \tag{2C.5}$$

右辺第 1 項は自転する惑星に相対的な、回転軸のまわりの角運動量（相対角運動量）で、第 2 項は惑星自転による角運動量である。この第 2 項については以下のように考える。惑星自転の角速度Ωに対して、緯度φの地点での鉛直軸に関する角速度は $\Omega \sin\varphi = f/2$ である。この角速度による原点（回転軸）のまわりの接線速度は、原点から距離rの地点では $r \times f/2$ なので、それによる角運動量は (2C.5) 式

の右辺第 2 項のように書ける。

一方、絶対角運動量Mのラグランジュ微分は

$$\frac{dM}{dt} = r\frac{dv}{dt} + v\frac{dr}{dt} + fr\frac{dr}{dt} = r\frac{dv}{dt} + uv + fru$$

である。また接線方向の角運動量方程式は

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \lambda} + rF_\lambda$$

のように書けるので、以上から

$$r\frac{dv}{dt} + uv + fru = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \lambda} + rF_\lambda$$

となる。この式の両辺をrで割ると、 (2C.4b) 式に一致することから、(2C.5) 式で定義された角運動量の保存が説明できる。

第 3 章　力学的バランス

大気の運動は一般に非常に複雑だが、天気図に表されるような気象擾乱に伴う風の場と気圧場（または等圧面上のジオポテンシャル高度場）、あるいは温度場の間には、ある近似的なバランス関係が成り立っていることが多い。地衡風平衡の関係はそのようなものの代表である。その他にも旋衡風や傾度風と呼ばれるいくつかの典型的な風と力の間のバランス関係が存在する。また風の鉛直シアーと温度場の関係を与える温度風の関係も存在する。

ここでは前章で導いたプリミティブ方程式系の簡単な応用として、自然座標系を用いて水平運動方程式を記述し、大気の運動の背後に潜む基本的な力のつり合いと風の場の関係の概要を考察する。続いて、風と温度場の関係である温度風の関係を調べる。一方、初期状態が地衡風バランスしていない場合には重力波が発生し、十分時間が経過すると、地衡風平衡に至る。この過程を地衡風調節という。これについて浅水方程式系を用いて調べ、ロスビーの変形半径という重要な概念を学ぶ。

3.1　バランスした流れ

3.1.1　自然座標系

ここでは、大気の水平運動を考えやすくするために、水平面の座標系として、空気塊の速度$\boldsymbol{V}$の方向に関係した座標系を考える。その他の要素に関しては、簡単にするために、f平面近似で摩擦力を無視し、また鉛直座標系としては気圧傾度力がジオポテンシャルのみの関数として表せるp座標系を用いる。この場合の運動方程式の水平成分は、(2.4.19a) のように

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} + f\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{V} = -\nabla_p \Phi \tag{3.1.1}$$

と表せるので、各地点の水平速度ベクトルに沿った方向（接線方向）の単位ベクトルを$\boldsymbol{e}$、流れに垂直（法線方向）で流れに対して左向きとなる単位ベクトルを$\boldsymbol{n}$、さらに鉛直上向きの単位ベクトルを$\boldsymbol{k}$とする。これを**自然座標系**（natural coordinate system）と呼ぶ。この系において、水平風速ベクトルは $\boldsymbol{V} = V\boldsymbol{e}$ と書くことができる。ここでVは正のスカラー量で、空気塊の水平面上の動きに沿った曲線を$s(x, y, t)$ とすると$V \equiv ds/dt$ である。空気塊の運動に伴う加速度は、

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \frac{dV}{dt}\boldsymbol{e} + V\frac{d\boldsymbol{e}}{dt}$$

と書ける。右辺第 1 項は運動に沿った方向の速度変化、第 2 項は運動の方向の変化による加速度である。運動に伴う$\boldsymbol{e}$の変化率について、図 3.1 により幾何学的考察を行う。この空気塊の運動の方向が$\delta\psi$だけ微小に変化する場合、

$$\delta\psi = \frac{\delta s}{R} = \frac{|\delta \boldsymbol{e}|}{|\boldsymbol{e}|} = |\delta \boldsymbol{e}|$$

である。ここで、Rは空気塊の運動の曲率半径である。慣例により、曲率中心が$\boldsymbol{n}$の正の方向にあるときにRを正とするので、空気塊が運動の方向に対して左に向きを変えるとき（すなわち反時計回りの運動の場合）に$R > 0$、右に向きを変えるとき（時計回りの運動の場合）に$R < 0$となる。

さらに、$\delta s \to 0$ の極限を考えると、$\delta\boldsymbol{e}$は$\boldsymbol{n}$に平行な向きとなり、上の関係は $d\boldsymbol{e}/ds = \boldsymbol{n}/R$ となる。よって、

$$\frac{d\boldsymbol{e}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{e}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{\boldsymbol{n}}{R}V$$

以上から、次の関係が得られる。

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \frac{dV}{dt}\boldsymbol{e} + \frac{V^2}{R}\boldsymbol{n} \tag{3.1.2}$$

この関係は、空気塊の加速度が、空気塊の速度変化と、空気塊の軌跡（第 3.2 節の流跡線）の曲率による求心加速度の和として表されることを示す。

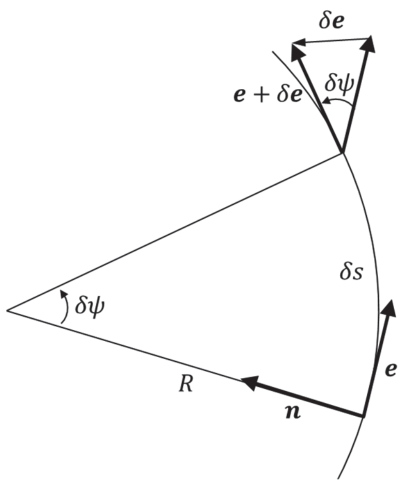


図 3.1　運動に沿った単位接線ベクトル$\boldsymbol{e}$の変化率。（Holton and Hakim, 2012 に基づき作成）

コリオリ力は、自然座標系では次の形に書ける。

$$-f\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{V} = -fV\boldsymbol{n} \tag{3.1.3}$$

一方、気圧傾度力は、

$$-\nabla_p \Phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial s}\boldsymbol{e} - \frac{\partial \Phi}{\partial n}\boldsymbol{n} \tag{3.1.4}$$

と表される。以上から、(3.1.1) は、

$$\frac{dV}{dt}\boldsymbol{e} + \frac{V^2}{R}\boldsymbol{n} + fV\boldsymbol{n} = -\frac{\partial \Phi}{\partial s}\boldsymbol{e} - \frac{\partial \Phi}{\partial n}\boldsymbol{n} \tag{3.1.5}$$

と書ける。これを接線方向（$\boldsymbol{e}$の係数）と法線方向（$\boldsymbol{n}$の係数）に分けると、

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial s} \tag{3.1.6}$$

$$\frac{V^2}{R} + fV = -\frac{\partial \Phi}{\partial n} \tag{3.1.7}$$

となる。これらはそれぞれ、流れに沿った方向と垂直な方向における力のつり合いを表す。(3.1.7) 式を**傾度風の式**（gradient wind equation）といい、その各項のバランスにより、いくつかの種類の水平運

動が説明できる。

3.1.2 地衡風

傾度風の式 (3.1.7) において、遠心力の項が他の 2 項と比較して無視できる場合、コリオリ力と気圧傾度力が釣り合う

$$fV_g = -\frac{\partial \Phi}{\partial n} \tag{3.1.8}$$

の関係が得られる。このときの風速 V_g を**地衡風**（geostrophic wind）と呼ぶ。現実の風が厳密な意味で地衡風になるには、運動の曲率半径Rが無限大にならなければならない。一般的に使われている地衡風近似の風は、流れの各点において等圧線の曲率を無視して（言い換えると、局所的な等圧線をその接線で近似して）、傾度風の式からその風を求めたものだということができる。

中緯度の総観規模現象では、風と気圧場の間に近似的に地衡風の関係が成り立っているとして議論されることが多いが、地衡風からのずれが無視できない場合も珍しくはない。そのことについては第 3.1.5 項で傾度風に関連してさらに述べる。

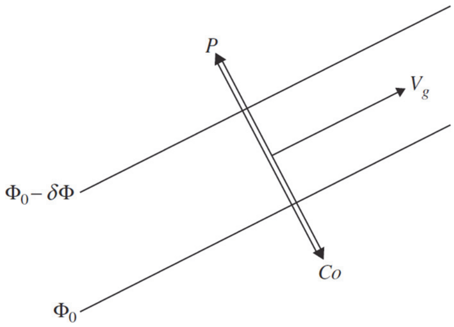


図 3.2　地衡風平衡における力のバランス（Holton and Hakim 2012）。
気圧傾度力を P で、コリオリ力を Co で表している。

3.1.3 慣性振動

水平面で気圧が一定ならば、気圧傾度力は 0 となるので、傾度風の式 (3.1.7) は、コリオリ力が遠心力と釣り合い、

$$\frac{V^2}{R} + fV = 0 \tag{3.1.9}$$

の関係となる。このとき、 $V \neq 0$ の場合の運動の曲率半径は

$$R = -\frac{V}{f} \tag{3.1.10}$$

と表される。ここではバランスした等速運動について考察しているので、(3.1.9) より、北半球では $R < 0$ の一定値を取ることになり、高気圧性（時計回り）の等速円運動となる。この運動の周期は

$$T = \left|\frac{2\pi R}{V}\right| = \frac{2\pi}{|f|} = \frac{2\pi}{2\Omega|\sin\varphi|} = \frac{(1/2)}{|\sin\varphi|}\ [\mathrm{day}] \tag{3.1.11}$$

で与えられ、運動の速度や半径によらず緯度のみで決まる一定の値を取る。これはその緯度でフーコーの振り子が一周する時間の半分である。この運動の原因となるコリオリ力と遠心力は、共に流体の慣性に由来する力なので、この運動は**慣性振動**（inertial oscillation）と呼ばれる。またこの運動の曲率半径を慣性円の半径と呼ぶことがある。

大気においては、大規模な運動（風）はほとんど気圧傾度力によって励起され維持されるため、気圧傾度力と関係なく生じる慣性振動は検知されにくい。これに対して、海洋においては、海面付近の海水の動きは風によって引き起こされることが多い。このため、海洋の圧力傾度力とは関係のない運動も観測されることになる。図 3.3 は漂流ブイの軌跡で、周期 1 日弱の高気圧性（時計回り）の回転運動が見られる。また図 3.4 では、海水の動きのエネルギースペクトルにおいて、慣性流の周期に近い運動にピークが見られる。

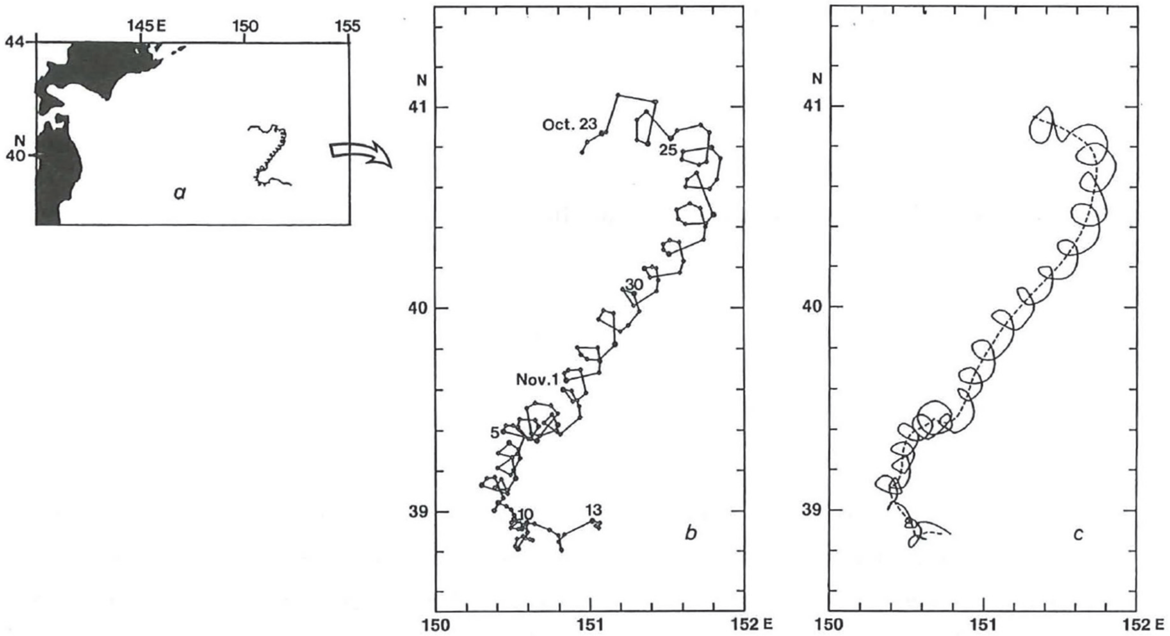


図 3.3　1981 年 10 月 23 日～11 月 13 日の漂流ブイの軌跡（石井 1998）。観測は 1 日 7 回～8 日程度（不定期）で、中央の図（b）は観測時刻の位置をつないだもの、右図（c）は観測位置を 1 時間ごとに内挿して作成した軌跡（実線）とその移動平均（破線）。

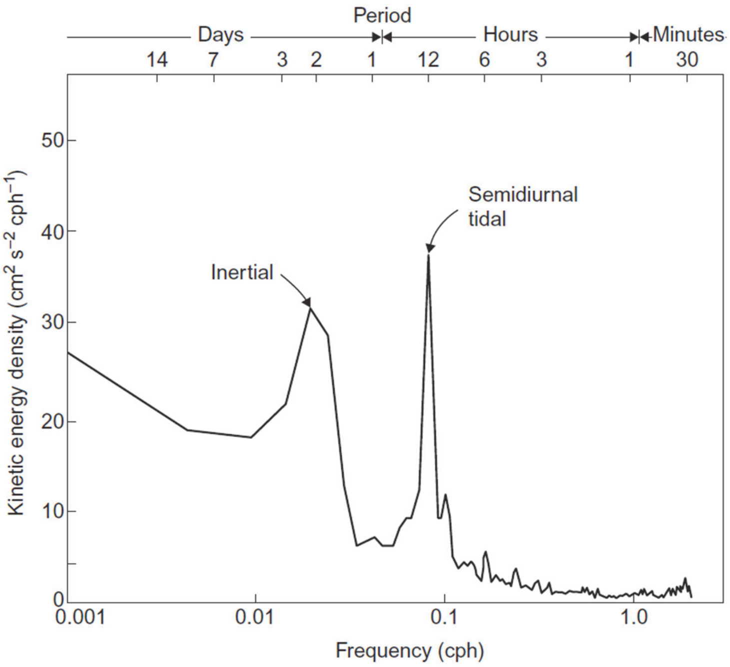


図 3.4　バルバドス（13°N）近海の深さ 30m における運動エネルギーのパワースペクトル。横軸は周波数（毎時）または周期、縦軸は周波数ごとの運動エネルギー密度を表す。53 時間（0.02 cycle per hour）の強いピーク（図中の inertial）は、緯度 13°における慣性周期に対応する。（Warsh et al. 1971 による図を Holton and Hakim 2012 から孫引き）

【高気圧性･低気圧性】

慣性振動について、北半球では時計回りに循環する運動が生じることが説明された。これは北半球では総観規模の高気圧と同じ方向の運動なので、高気圧性と呼ぶ。同様に、反時計回りの運動は北半球では低気圧性と呼んでいる。これに対して、南半球では $f < 0$ のため (3.1.10) 式では $R > 0$ となるので慣性振動は反時計回りの運動となるが、これは南半球の総観規模の高気圧と同じ方向の循環である。これらにより、北半球・南半球とも慣性振動は高気圧性の運動であると言える。

このあと、高気圧性(anticyclonic)･低気圧性(cyclonic)という表現が頻出するが、時計回り(clockwise)･反時計回り（counterclockwise）との対応は北半球と南半球とでは逆になることに注意が必要である。

3.1.4 旋衡風

擾乱の水平スケールが十分小さいときは、コリオリ力は気圧傾度力や遠心力と比較して無視できる。このときは

$$\frac{V^2}{R} = -\frac{\partial \Phi}{\partial n} \tag{3.1.12}$$

のバランス関係が成り立つ。このときの風を**旋衡風**（cyclostrophic wind）といい、その強さは

$$V = \sqrt{-R\frac{\partial\Phi}{\partial n}} \tag{3.1.13}$$

で表される。根号の中は正でなければならないので、循環が反時計回り（時計回り）のとき、すなわち $R>0$（$R<0$）のときは$\partial\Phi/\partial n<0$（$\partial\Phi/\partial n>0$）、すなわち相対的に気圧が低いのは空気塊の運動に対して左側（右側）でなければならない。すると、旋衡風となる循環は時計回りでも反時計回りでも、循環の中心は低気圧となる。これにより、気圧傾度力は循環の中心を向き、遠心力は外側を向く。（図 3.5）

このことに基づくと、竜巻は低気圧性循環・高気圧性循環のどちらもありうることになるが、北半球における竜巻の大半は低気圧性循環となっている。これは、竜巻が生じるような環境場が低気圧性循環を持つ傾向があるためと考えられる。

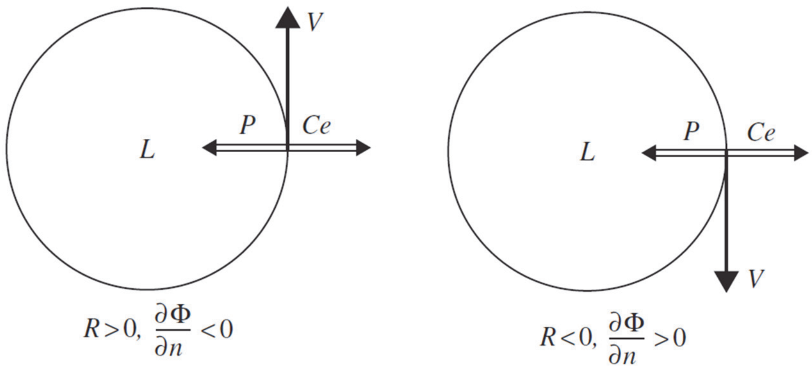


図 3.5　旋衡風に関する力のバランス（Holton and Hakim 2012）。Pは気圧傾度力、Ce は遠心力を表す。

【問題】トルネード（竜巻）において、渦の中心からの距離 300m における風速が 30 m s^{-1} となっている場合の力のバランスについて考察せよ。

3.1.5 傾度風

中緯度の総観規模の高気圧・低気圧に関しては、V〜10 m s^{-1}、R〜10^{6}m 程度のスケールと考えると、そこにおける単位質量当たりの空気塊にかかる遠心力の大きさは、10^{-4} m s^{-2} の程度となり、コリオリ力や気圧傾度力が 10^{-3} m s^{-2} の程度であるのと比較すると 1 桁小さい。しかし台風のように、風速がやや大きい一方で風の運動の曲率半径が数百 km よりも小さいと、遠心力の効果を無視することができない。その場合は、流れに直交する方向の力のバランスとして、コリオリ力・遠心力・気圧傾度力の 3 つが釣り合った**傾度風**（gradient wind）バランスを考えなければならない。これは傾度風の式 (3.1.7)

$$\frac{V^2}{R} + fV = -\frac{\partial\Phi}{\partial n}$$

で与えられる。これをVについて解くと、傾度風の大きさは次のように表される。

$$V = -\frac{fR}{2} \pm \sqrt{\frac{f^2R^2}{4} - R\frac{\partial\Phi}{\partial n}} \tag{3.1.14}$$

以下では北半球（$f > 0$）の場合について考える。また自然座標系では常に$V > 0$ となるように座標軸を取っていることにも注意していただきたい。通常の低気圧（図 3.6a）では $R > 0$ かつ $\partial\Phi/\partial n < 0$ なので、右辺第 1 項は常に負であり、また根号の中の第 2 項は常に正である。この場合に傾度風速Vが正であるためには、第 2 項が $fR/2$ よりも大きいこと、すなわち

$$V = -\frac{fR}{2} + \sqrt{\frac{f^2R^2}{4} - R\frac{\partial\Phi}{\partial n}} \tag{3.1.15}$$

であることが必要である。この式においては、水平気圧傾度 $|\partial\Phi/\partial n|$ も風速 V も共に上限なく大きくなることができる。以上により、通常の低気圧の傾度風速は、この式に関する議論においては上限はない。

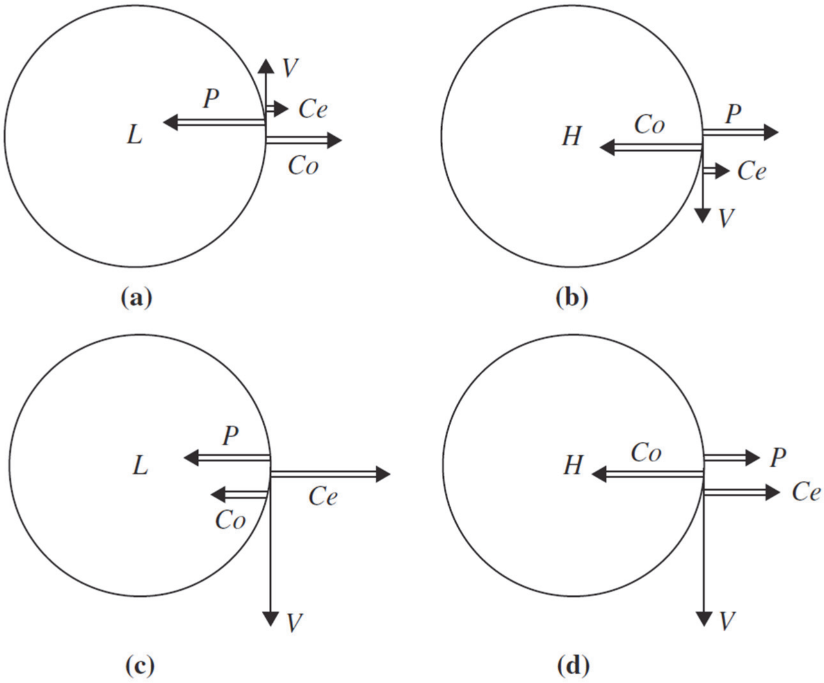


図 3.6　北半球における 4 種類の傾度風に関する力のバランス。(a) 通常の低気圧、(b) 通常の高気圧、(c) 通常とは異なる低気圧、(d) 通常とは異なる高気圧。Pは気圧傾度力、Ce は遠心力、Co はコリオリ力を表す。（Holton and Hakim 2012）

一方、通常の高気圧（図 3.6b）では $R < 0$ かつ $\partial\Phi/\partial n < 0$ である。この場合、(3.1.14) の右辺第 1 項は常に正だが、右辺第 2 項の根号の中が負にならないためには、

$$\left|\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right| \le \left|\frac{f^2R}{4}\right| \tag{3.1.16}$$

であることが必要で、通常の高気圧には気圧傾度に上限があることがわかる。そして気圧傾度が上限の値をとる場合は (3.1.14) の右辺第 2 項が 0 となり、このときの $V = |fR|/2$ が風速の上限の値であることになる。これらのことから、右辺第 2 項の符号は負で、通常の高気圧の傾度風は

$$V = -\frac{fR}{2} - \sqrt{\frac{f^2R^2}{4} - R\frac{\partial\Phi}{\partial n}} \tag{3.1.17}$$

であることもわかる。さらに、(3.1.16) において $|R| \to 0$ の場合に気圧傾度の上限が小さくなることから、高気圧の中心付近では気圧傾度が小さく、なだらかな気圧分布となる。

通常の低気圧・高気圧の場合は、コリオリ力と気圧傾度力の大きさに対して遠心力の大きさは相対的に小さいことが想定され、その仮定の下では以上のように説明される。しかし、理論的には風速が大きくなり遠心力が相対的に大きくなる場合も考えられる。以下では非現実的ではあるが理論的に考えられる低気圧・高気圧と傾度風について述べる。

図 3.6c は、通常とは異なる低気圧における力のバランスの模式図である。そこでは、気圧傾度力は低気圧中心の側を向くが、風の循環は通常の低気圧とは異なり時計回り（$R < 0$）なので、$\partial\Phi/\partial n > 0$ である。コリオリ力は気圧傾度力と同じく低気圧中心を向き、遠心力が気圧傾度力とコリオリ力の合力とバランスするように大きくなっている。しかし気圧傾度力とコリオリ力が同じ方向を向いているということは、風は地衡風と逆向き（antigeostrophic）で、地衡風近似ができないということで、大規模場の流れとして現実的でない。気圧傾度力よりコリオリ力の方が大きい場合はコリオリ力と遠心力が釣り合う慣性振動的な性質を持ち、コリオリ力より気圧傾度力の方が大きい場合は気圧傾度力と遠心力が釣り合う旋衡風的な性質を持つと言える。傾度風速は (3.1.15) と同様に根号の前の符号が正となる点では通常の低気圧（図 3.6a）と同様で、根号の中の値も上限がないので、風速Vは理論的には上限なく大きくなりうる。

図 3.6d は、通常とは異なる高気圧における力のバランスを示している。そこではそれぞれの力の方向は図 3.6b の通常の高気圧と同様だが、気圧傾度力より遠心力が強く、それに対応して風速が大きい。循環が時計回りであるため $R < 0$ で、$\partial\Phi/\partial n < 0$ である。根号の中の第 2 項が負であるため、根号の中が正になるためには、気圧傾度の大きさに上限が存在する。すなわち、この場合も高気圧の強度には上限があることになる。通常の高気圧と異なるのは、風速が (3.1.15) 式と同様に根号の前の符号が正で、通常の高気圧よりも風速が大きくなる点である。ただし、気圧傾度力が相対的に弱く、遠心力がコリオリ力とほぼ釣り合う状態という点では、慣性振動に類似した性質を持つともいえる。このことは (3.1.15) 式で $R = -|R|$ とし、かつ気圧傾度を 0 とすると、$V = f|R|$ となり、(3.1.10) 式と同じになることからもわかる。

以上の傾度風バランスについては、図 3.7 で説明することもできる。ここでは横軸には風速V（低気圧性循環の場合を正）、縦軸には気圧傾度（低気圧の場合は正）をとっていて、太線で傾度風の関係を表す。ここでは風速は低気圧性か否かで符号が変わり、曲率半径Rは常に正とする点で、ここまで用いていた自然座標系を用いた議論とは異なる。この図の太線のうち、右上象限の O-A が、図 3.6a に示した通常の低気圧に対応し、地衡風速より傾度風速の方が小さいことが示されている。左下象限のうち、O-B の部分は、図 3.6b に示した通常の高気圧に対応し、地衡風速より傾度風速の方が大きい。さらに、B-C の部分は図 3.6d に示した通常とは異なる高気圧、左上象限の C-D の部分は図 3.6c に示した通常とは異なる低気圧に、それぞれ対応する。特に C では気圧傾度が 0 だが時計回りの循環が生じることを表し、第 3.1.3 項の慣性振動にあたる。この C も含め、B-D の部分は地衡風速からはかけ離れた風速となり、大規模な高気圧・低気圧においてバランスした風で近似するのは適切でないことがわかる。

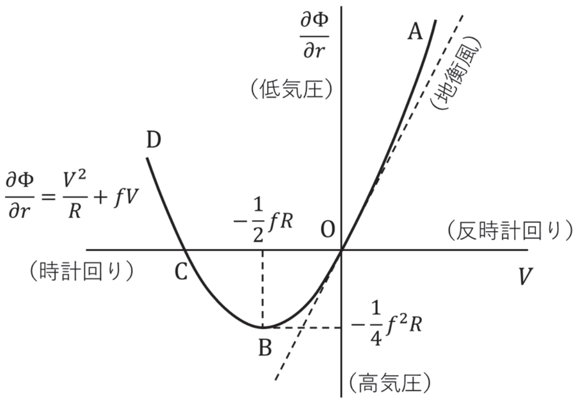


図 3.7　北半球における気圧傾度と傾度風の関係。横軸の風速Vは、反時計回りの場合は正、時計回りの場合は負で表し、縦軸の気圧傾度（ジオポテンシャル傾度、$\partial\Phi/\partial r$としている）は、低気圧の場合は正、高気圧の場合は負で表している。

【遠心力の効果による地衡風からのずれ】

傾度風と地衡風の大きさを比較することにより、曲率のある流れにおける遠心力の効果による地衡風からのずれを考える。傾度風の式 (3.1.7) の気圧傾度力を、(3.1.8) の地衡風 V_gで表すと、

$$\frac{V^2}{R} + fV = fV_g \tag{3.1.18}$$

と書ける。従って、地衡風と傾度風の比は、

$$\frac{V_g}{V} = 1 + \frac{V}{fR} \tag{3.1.19}$$

と表せる。通常の低気圧では $R > 0$ なので、傾度風速は常に地衡風速より小さく、通常の高気圧の場合は $R < 0$ なので傾度風速は常に地衡風速より大きい。現実に観測される大規模場の風速は、傾度風速に近い。そして実際に、低気圧やトラフでは地衡風速より風が弱く（subgeostrophc）、高気圧やリッジでは地衡風速より強い（supergeostrophic）風が観測される。

ところで、この第 3.1.5 項の冒頭でコリオリ力と遠心力を比較し、後者の大きさが 1 桁小さいと述べた。後出の第 3.4 節で、中緯度総観規模現象の典型的な値として地衡風からのずれ（非地衡風）が地衡風の 1/10 程度であることを示している。ただし、そこではコリオリパラメータfを $10^{-4}\ \mathrm{s}^{-1}$ としているが、これは北緯 45 度付近での値であり、北緯 30 度ではfは $0.73\times10^{-4}\ \mathrm{s}^{-1}$ となって、北緯 45 度と比較するとコリオリ力は小さい。またコリオリ力は風速の 1 乗に比例するのに対して、遠心力は風速の 2 乗に比例するので、風速が大きくなると遠心力の効果が相対的に大きくなる。このことを上の (3.1.19) 式で考察しよう。傾度風と地衡風のずれが 20%以上となる場合として、$V/f|R| > 0.2$ となる条件を考えると、曲率半径の大きさが 1000km の場合は北緯 45 度では風速 $20\ \mathrm{m\ s}^{-1}$、北緯 30 度では風速 $15\ \mathrm{m\ s}^{-1}$ となり、日本付近の緯度帯では風速があまり大きくなくても地衡風からのずれが無視できなくなりうることが説明できる。

3.2 流線と流跡線

前節でバランスした流れを議論するために定義した自然座標系では、$s(x,y,t)$ が平面上で空気塊の経路に沿った曲線として定義された。ある時間内に特定の空気塊を追跡した経路を、その空気塊の**流跡線**（trajectory）という。ゆえに、傾度風の式で用いられている、経路sの曲率半径Rは、空気塊の流跡線の曲率半径である。実際的には、天気図を使うと便利なので、Rはジオポテンシャル高度の等値線（または地上天気図の等圧線）の曲率半径で決められることが多い。しかしこの等値線は本当は地衡風の**流線**（streamline）である（ジオポテンシャル高度の等値線と流線の関係に関しては、付録 3A「流線関数」も参照）。流線はその瞬間の全地点の風速ベクトルに平行な線である。瞬間の速度場のスナップショットである流線と、個々の流体粒子のある時間内の運動を追跡したものである流跡線との違いを明確にしておくことは重要である。

なお、流体力学の教科書では trajectory を軌跡と記していることが多く、または（流体粒子の）粒跡線と記していることもあるが、気象学では流跡線と呼ぶことが多い。ここでは流跡線とする。

直交座標系において、水平面内の流跡線は、追跡したい個々の粒子に関して

$$\frac{ds}{dt}=V(x,y,t)\quad \text{ただし}\quad \frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y} \tag{3.2.1}$$

を一定の時間について積分することで決定される。これに対して、流線は

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{v(x,y,t_0)}{u(x,y,t_0)} \tag{3.2.2}$$

を時刻t_0におけるxに対して積分することで決定される。運動が定常状態である場合のみ、流跡線と流線が一致するが、通常は気象擾乱は移動しているので、空気塊の流跡線と流線は一致しない。傾度風の式で考察を行うために必要な曲率半径は流跡線で決定する必要があるので、移動する擾乱における流線の曲率と流跡線の曲率の関係を検討する。

図 3.8 で、平面上の各点における風向の方位角を$\beta(x,y,t)$ とする。またR_sとR_tをそれぞれ流線と流跡線の曲率半径とする。図から、$\delta s=R\delta\beta$ なので、$\delta s\to 0$ の極限では、

$$\frac{\partial\beta}{\partial s}=\frac{1}{R_s}\quad \text{かつ}\quad \frac{d\beta}{ds}=\frac{1}{R_t} \tag{3.2.3}$$

ここで、$\partial\beta/\partial s$ はある瞬間における流線における風向変化率（反時計回りの変化を正）を表し、$d\beta/ds$ は流跡線に沿った風向変化率を表す。すると、運動に伴う風向変化率は、

$$\frac{d\beta}{dt}=\frac{d\beta}{ds}\frac{ds}{dt}=\frac{V}{R_t} \tag{3.2.4}$$

これはオイラー微分を用いると以下のように表せる。

$$\frac{d\beta}{dt}=\frac{\partial\beta}{\partial t}+V\frac{\partial\beta}{\partial s}=\frac{\partial\beta}{\partial t}+\frac{V}{R_s} \tag{3.2.5}$$

これらから、局所的な風向変化率が次のように得られる。

$$\frac{\partial\beta}{\partial t}=V\left(\frac{1}{R_t}-\frac{1}{R_s}\right) \tag{3.2.6}$$

これはブラトンの式（Blaton’s equation）と呼ばれ、この式から、局所的な風向変化が生じない場合にの

み、流線と流跡線の曲率半径が一致することがわかる。

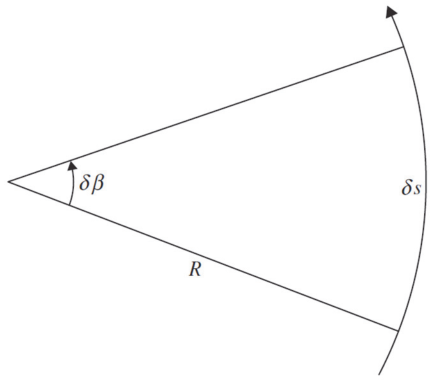


図 3.8　風向変化率 $\delta\beta$ と曲率半径Rの関係。（Holton and Hakim 2012）

流線と流跡線の関係を、中緯度の総観規模の低気圧について考えてみる。中緯度総観規模低気圧は、一般に、上層の偏西風に伴って東進するので、理想化すると、循環パターンが一定速度 $\boldsymbol{C}$ で東進すると考えることができる。すると、局所的な風向変化率は、瞬間的な流線パターンが速度 $\boldsymbol{C}$ で移動することによって生じると考えることができるので、

$$\frac{\partial\beta}{\partial t} = -\boldsymbol{C}\cdot\nabla\beta = -C\frac{\partial\beta}{\partial s}\cos\gamma \tag{3.2.7}$$

と書ける。ここでγは流線とシステムの移動方向との間の角度である。(3.2.7) を (3.2.6) に代入して (3.2.3) も使うと、流線の曲率半径は次のように表すことができる。

$$R_s = R_t\left(1 - \frac{C\cos\gamma}{V}\right) \tag{3.2.8}$$

図 3.9 は移動する低気圧性循環における空気塊の流跡線を太線で表している。これらの流跡線の始点の時刻における流線が細線の円で示される。すなわち、この円の上の各点においては、流線の曲率半径 R_s は同じ値を取る。しかしその各点を始点とする流跡線の曲率半径 R_t は異なる値を取る。図 3.9a はシステムの移動速度が循環の風速より小さい場合（$C < V$）で、図に示されている流跡線はすべて低気圧性の曲率（$R_t > 0$）を持っている。これに対して、図 3.9b では循環の風速よりもシステムの移動速度が大きい場合で､低気圧中心の南側の空気塊の流跡線が高気圧性曲率（$R_t < 0$）を持っている一方、低気圧中心の東側の空気塊の流跡線は大きな低気圧性曲率（曲率半径は小。$0 < R_t \ll R_s$）を持っている。これは、図 3.9a ではシステムの移動速度が遅く $C/V < 1$ のため、R_sと R_tの大きさは比較的変わりにくいが、図 3.9b ではシステムの移動速度が速く $C/V > 1$ のため、γの値によって R_sと R_tの関係が大きく変わることがわかる。このような場合には、実際の（流跡線によって決められるべき）傾度風は、瞬間値の流線（またはそれに対応する天気図上の等圧線・ジオポテンシャル高度等値線）の曲率から求めた傾度風とは大きく異なることになる。

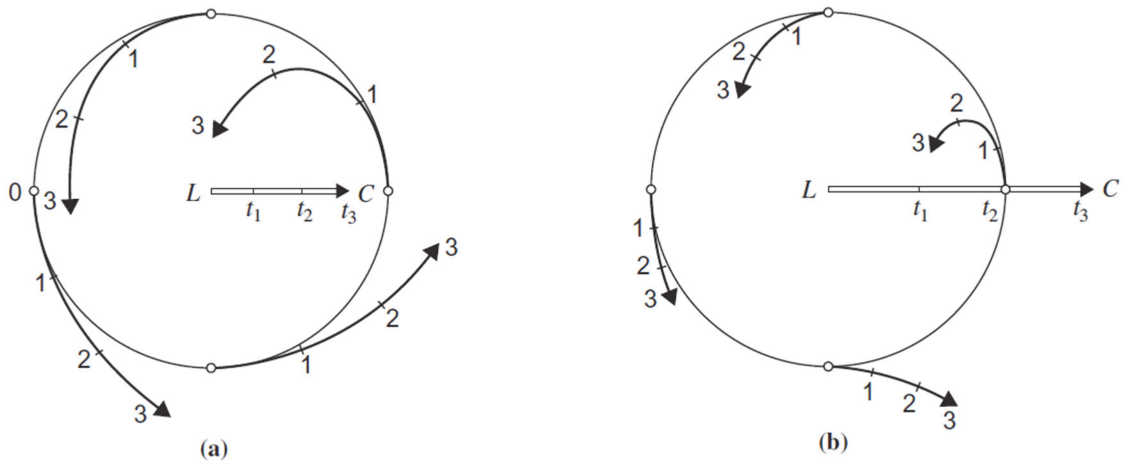


図 3.9　北半球で移動する低気圧性循環システムにおける空気塊の流跡線。(a) では$V = 2C$、(b) では $2V = C$ である。数字は経過時刻に対応する位置を表す。Lは低気圧中心。（Holton and Hakim, 2012）

3.3 水平風の鉛直分布

第 3.1 節では力学的バランスに基づく水平運動、第 3.2 節ではその水平運動の表現方法について記述した。第 3.3 節では高度における水平運動の鉛直方向の関係（鉛直シアー）について議論する。背景には、鉛直方向の熱力学的バランスである静力学平衡がある。

3.3.1 テイラー・プラウドマンの定理

z座標系、f平面近似で摩擦力を無視した運動方程式の水平成分は、

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} + f\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla_z p \tag{3.3.1}$$

であった。今回は、定常で、密度ρは一定であるとする。すると次のように書ける（地衡風の関係）。

$$f\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{V} = -\nabla_z\left(\frac{p}{\rho}\right) \tag{3.3.2}$$

一方、静力学平衡の式は密度一定の場合には

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\rho}\right) = -g \tag{3.3.3}$$

と書ける。 (3.3.2) をzで偏微分したものに (3.3.3) を使うと、

$$f\boldsymbol{k} \times \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial z} = 0 \tag{3.3.4}$$

となる。これは、回転軸に垂直な面内（水平面内）の流れは、高度によらず一定であることを示している。すなわち、回転系で摩擦が無視でき密度が一定の場合は、鉛直シアーが 0 となる。これをテイラー・プラウドマンの定理（Taylor–Proudman theorem）という。

もしこのような流体層の底に低い山のような障害物があると、その高度では障害物を避けるような流れになる。その流れと、鉛直シアー0 の関係から、障害物のある高度だけでなくその上の高度でも、

あたかもその山の上に仮想的な柱があってその柱を避けるような流れが生じる。この柱状に流体が動かない部分は、テイラー柱（Taylor column）（図 3.10 参照）と呼ばれる。このような密度一定の回転流体中の現象は、回転水槽実験で見ることができる。

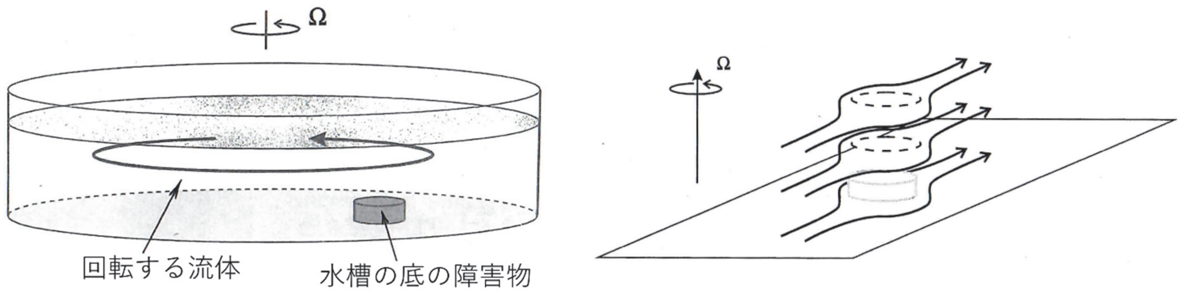


図 3.10　テイラー柱の回転水槽実験（左）と、実験で生じる流れの模式図（右）。（Marshall and Plumb 2008）

3.3.2 温度風

前項では密度一定の場合の鉛直シアーについて述べた。今度は密度が一定でない場合について考える。ただし、摩擦力を無視した気圧座標系の運動方程式を用いる（z座標系を用いた場合については付録 3B を参照）。

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} + f\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{V} = -\nabla_p \Phi \tag{3.3.5}$$

において、気圧傾度力とコリオリ力が釣り合った風$\boldsymbol{V}_g$が地衡風である。

$$f\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{V}_g = -\nabla_p \Phi \tag{3.3.6}$$

この式から

$$\boldsymbol{V}_g = \frac{1}{f}\boldsymbol{k} \times \nabla_p \Phi \tag{3.3.7}$$

が得られる。さらに (3.3.7) を成分ごとに書くと、

$$v_g = \frac{1}{f}\frac{\partial \Phi}{\partial x},\ \ u_g = -\frac{1}{f}\frac{\partial \Phi}{\partial y} \tag{3.3.8}$$

ここでは密度が一定でない場合を考えているが、p座標系を用いることで地衡風がジオポテンシャルの 1 変数のみで表され、方程式に密度が陽に現れなくなるので、議論が簡単になる。ここで、p座標系の静力学平衡の式

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{1}{\rho} = -\frac{RT}{p}$$

を、(3.3.7) をpで偏微分した式に使うと、

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}_g}{\partial p} = -\frac{R}{fp}\boldsymbol{k} \times \nabla_p T \tag{3.3.9}$$

成分ごとに書けば

$$f_0 \frac{\partial u_g}{\partial p} = \frac{R}{pf_0}\frac{\partial T}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v_g}{\partial p} = -\frac{R}{pf_0}\frac{\partial T}{\partial x}$$

あるいは、$\partial/\partial p = (1/p)\,\partial/\partial \ln p$ であることに注意すると、

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}_g}{\partial \ln p} = -\frac{R}{f}\boldsymbol{k} \times \nabla_p T \tag{3.3.10}$$

と書ける。これを**温度風の式**（thermal wind equation）と呼ぶ。

(3.3.10) 式をp_0 からp_1 まで積分すると（$p_0 > p_1$、すなわちp_1が上層）、

$$\boldsymbol{V}_g(p_1) - \boldsymbol{V}_g(p_0) = -\frac{R}{f}\int_{p_0}^{p_1}\left(\boldsymbol{k} \times \nabla_p T\right) d\ln p = \frac{R}{f}\boldsymbol{k} \times \nabla_p \int_{p_1}^{p_0} T\, d\ln p \tag{3.3.11}$$

が得られる。ここで気圧面 p_0 とp_1の間の平均温度を

$$\langle T \rangle = \frac{\int_{p_1}^{p_0} T\, d\ln p}{\int_{p_1}^{p_0} d\ln p} = \frac{\int_{p_1}^{p_0} T\, d\ln p}{\ln(p_0/p_1)} \tag{3.3.12}$$

で定義すると、(3.3.11) は

$$\boldsymbol{V}_T \equiv \boldsymbol{V}_g(p_1) - \boldsymbol{V}_g(p_0) = \frac{R}{f}\left(\boldsymbol{k} \times \nabla_p \langle T \rangle\right) \ln\left(\frac{p_0}{p_1}\right) \tag{3.3.13}$$

で表される。成分ごとに書くと、

$$u_T = -\frac{R}{f}\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial y}\ln\left(\frac{p_0}{p_1}\right), \quad v_T = \frac{R}{f}\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x}\ln\left(\frac{p_0}{p_1}\right) \tag{3.3.14}$$

と書ける。一方、この 2 つの気圧面の風速差を、(3.3.8) のようにジオポテンシャルを用いて表すと、

$$u_T = -\frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial y}(\Phi_1 - \Phi_0), \quad v_T = \frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial x}(\Phi_1 - \Phi_0) \tag{3.3.15}$$

である。$\Phi_1 - \Phi_0$ は層厚である。(3.3.14) と (3.3.15) は、第 2.1 節の測高公式

$$\Phi_1 - \Phi_0 = R\langle T \rangle \ln\left(\frac{p_0}{p_1}\right) \tag{3.3.16}$$

により同等である。これを用いると (3.3.13) は、

$$\boldsymbol{V}_T \equiv \boldsymbol{V}_g(p_1) - \boldsymbol{V}_g(p_0) = \frac{1}{f}\boldsymbol{k} \times \nabla_p(\Phi_1 - \Phi_0) \tag{3.3.17}$$

と書ける。

北半球（$f > 0$）において、図 3.11 のように等圧面が傾斜していると、地衡風は等圧面高度（ジオポテンシャル）の高い側を右に見る方向になる。そしてその風が風向は同じで上空ほど強い場合、上の等圧面は下の等圧面よりも傾斜が大きい。すると、その 2 つの等圧面の間の層では鉛直シアーに対して右側の層厚が大きいと言える。これを (3.3.15)、(3.3.17) が表している。つまり、鉛直シアーの右側で気温が相対的に高く、左側で気温が相対的に低い。このことは (3.3.13)、(3.3.14) で表されている。

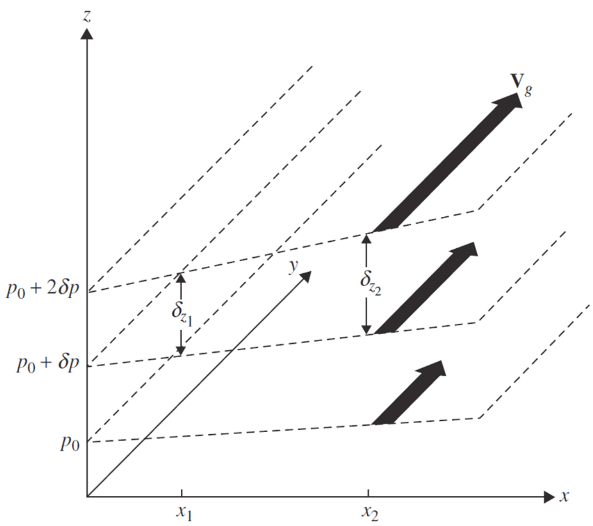


図 3.11　地衡風の鉛直シアーと水平温度傾度の関係。（Holton and Hakim 2012）

北半球の対流圏の大規模場では、南ほど気温が高く、北ほど低い。このことから、温度風の関係により、中緯度の上部対流圏で偏西風が強くなることが説明できる。

以上はどの高度でも風向が同じ場合であったが、上層と下層で風向が変化していても上記の温度風の関係は適用できる。図 3.12 では、a、b とも、温度風ベクトルは等温線に平行で、暖気側を右に見る方向である。図 3.12a の場合、地衡風の風向は平均的には寒気側から暖気側へ向いている。これは寒気移流である。下層の地衡風と上層の地衡風を比較すると、上層ほど反時計回りに風向が変化（backing）している。これに対して図 3.12b では、地衡風の風向は暖気側から寒気側へ向いていて暖気移流であり、一方で風向は上層ほど時計回りに変化（veering）している。すなわち、風向が下層から上層へと反時計回りに変化していれば、その層では寒気移流であり、風向が時計回り変化であれば、その層では暖気移流があることが示唆される。

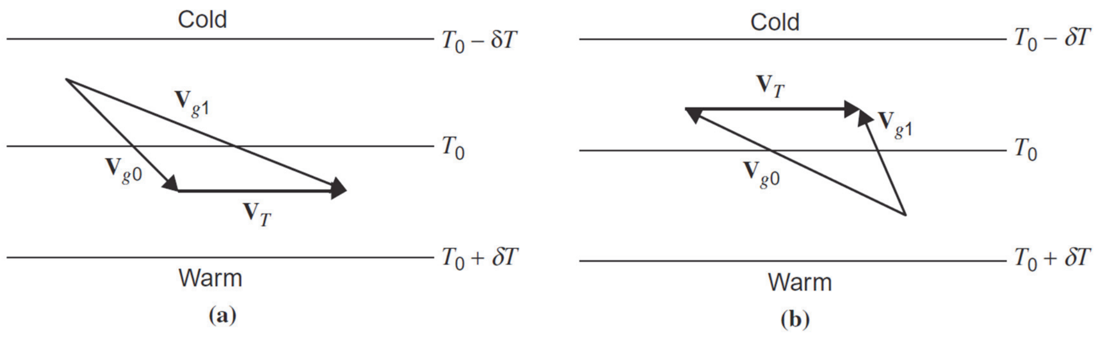


図 3.12　地衡風の風向変化と水平温度移流の関係。(a) では風向が上層へと反時計回りに変化し、(b) では時計回りに変化している。（Holton and Hakim 2012）

【問題】　図 3.12 における 2 つの等圧面上の地衡風ベクトルの外積 $\boldsymbol{V}_{g0} \times \boldsymbol{V}_{g1}$を用いて、地衡風による水平温度移流$-\boldsymbol{V}_g \cdot \nabla_p T$を表せ。またそのことを用いて、高度による風向変化の向きが水平温度移流の符号（暖気移流か寒気移流か）に対応することと、$\boldsymbol{V}_{g0}$、$\boldsymbol{V}_{g1}$、$\boldsymbol{V}_T$の 3 つのベクトルで囲まれる三角

形の面積が地衡風による水平温度移流の大きさに比例することを説明せよ。（ヒント：与えられた情報は地衡風ベクトルだけなので、水平温度傾度 $\nabla_p T$ は$\boldsymbol{V}_T = \boldsymbol{V}_{g1} - \boldsymbol{V}_{g0}$で表す。水平温度移流に用いる地衡風ベクトルとしては、$\boldsymbol{V}_{g0}$、$\boldsymbol{V}_{g1}$、あるいはそれらの平均 $(\boldsymbol{V}_{g0} + \boldsymbol{V}_{g1})/2$ を用いて比較してみよ。）

3.3.3 順圧大気と傾圧大気

大気において密度が気圧だけの関数であるとき、**順圧大気**（barotropic atmosphere）と呼ぶ。順圧大気の等圧面は、定義により等密度面であり、理想気体であれば、同時に等温面でもある。従って、順圧大気では $\nabla_p T = 0$ が成り立ち、温度風の式 (3.3.10) において $\partial \boldsymbol{V}_g / \partial \ln p = 0$ となるので、地衡風は高さによらない（鉛直シアーを持たない）ことになる。このように、順圧性（barotropy）は回転流体において強い制約を与え、大規模な順圧的な流れは高さによらず水平方向の位置と時間だけに依存する。第 3.3.1 項で説明した密度一定の流体に関するテイラー・プラウドマンの定理は、順圧的な回転流体の典型的な特徴を示す。

順圧的でない大気、すなわち密度が温度と気圧の両方に依存する大気を、**傾圧大気**（baroclinic atmosphere）という。傾圧大気では地衡風は一般に鉛直シアーを持ち、この鉛直シアーは温度風の式 (3.3.10) により水平方向の温度勾配と関連付けられる。

傾圧大気だが等圧面で等ジオポテンシャル高度線と等密度線（等温線）が平行な場合、地衡風による温度移流はなく、高度によって地衡風の大きさは変化するが風向は変化しない。このような大気を、等価順圧大気（equivalent barotropic atmosphere）と呼ぶ。

熱帯大気は水平温度傾度が小さく、順圧大気として扱うことが多い。中緯度の気象学・気象力学では傾圧大気が議論の中心課題だが、より単純な順圧大気を調べることによっても大気の性質について多くのことを知ることができる。また特に傾圧性が重要な傾圧不安定波動は不安定となる波長が限定される（第 8 章）ので、それ以外の波長の波動は順圧的な扱いが有効な場合が多い。そして密度一定として単純化すれば、第 2.5 節の浅水方程式系で表現することができる（第 4 章・第 7 章のロスビー波など）。

3.4 鉛直運動と地上気圧変化の推定

第 2.4 節の気圧座標系のプリミティブ方程式系で予報変数または診断変数とされていた 6 個の変数のうち、$\boldsymbol{V}$（u、v）とTの 3 個については観測が可能であり、また前節までの議論からこれらは静力学平衡・地衡風平衡においては近似的にはΦと関連付けて推定できることがわかっている。ここでは残る 2 個の変数ωとp_sについて、他の変数との関係とそれによる推定を考えてみる。

3.4.1 非地衡風の導入と鉛直運動の推定

天気予報では降水の有無の予測が重要な要素の一つであり、それを把握するには鉛直運動（鉛直速度）の空間分布の解析が必要である。しかし、前章でスケールアナリシスで見たように、総観規模現象では水平風速は数 10 m s^{-1} の大きさだが、鉛直速度は数 cm s^{-1} の大きさであり、観測は困難である。ウインドプロファイラでは数 m s^{-1} の大きさの鉛直運動が記録されることがあるが、降水時のその値は落下する降水粒子の速度であり、大気の鉛直運動を捉えているとは言えない。このため鉛直速度は他の直接観測可能な観測値から推定する必要がある。

まず、p座標系の連続の式で鉛直運動が水平発散と関係づけられる。

$$\nabla_p \cdot \boldsymbol{V} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \tag{3.4.1}$$

このことを用いて、運動学的方法で鉛直運動を推定することを考える。ここで、水平運動$\boldsymbol{V}$のうち地衡風成分は

$$\boldsymbol{V}_g = \frac{1}{f}\boldsymbol{k} \times \nabla_p \Phi \tag{3.4.2}$$

$$v_g = \frac{1}{f}\frac{\partial \Phi}{\partial x},\ \ u_g = -\frac{1}{f}\frac{\partial \Phi}{\partial y} \tag{3.4.3}$$

であり、地衡風の水平発散は、コリオリパラメータの緯度依存性を考慮すると、

$$\nabla_p \cdot \boldsymbol{V}_g = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{v_g}{f}\frac{df}{dy} \tag{3.4.4}$$

と書ける。df/dy は第 4 章でβと表すことになるパラメータである。特にf平面近似を用いる場合にはfは緯度に依存せず一定と考えるので、$\nabla_p \cdot \boldsymbol{V}_g = 0$ となる。そうでない場合でも地衡風の発散は十分に小さい。このことを考慮して、地衡風からのずれとしての非地衡風（ageostrophic wind）$\boldsymbol{V}_a$を導入する。

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_g + \boldsymbol{V}_a \tag{3.4.5}$$

これを用いると、水平発散は

$$\nabla_p \cdot \boldsymbol{V} = \nabla_p \cdot \boldsymbol{V}_g + \nabla_p \cdot \boldsymbol{V}_a \cong \nabla_p \cdot \boldsymbol{V}_a \tag{3.4.6}$$

と書くことができ、(3.4.1) 式は

$$\nabla_p \cdot \boldsymbol{V}_a + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \tag{3.4.7}$$

となる。つまり、左辺第 2 項の鉛直発散とバランスするのは水平風の非地衡風成分の発散といえる。

ここで、地衡風と非地衡風のスケールの比較を行おう。摩擦力を無視した運動方程式

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} + f\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{V} = -\nabla_p \Phi \tag{3.4.8}$$

について、第 2.3 節で行ったのと同様のスケールアナリシスを行う。水平スケールと水平風速の大きさをそれぞれL、Uとすると、加速度項（左辺第 1 項）とコリオリ項（第 2 項）のスケールの比は、

$$\frac{|d\boldsymbol{V}/dt|}{|f\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{V}|} \sim \frac{U^2/L}{f_0 U} = \frac{U}{f_0 L} \equiv Ro \tag{3.4.9}$$

である。このRoを**ロスビー数**（Rossby number）と定義する（第 2 章付録 2A、第 5 章も参照）。中緯度総観規模現象の代表的なスケール $L \sim 10^6$ m、$U \sim 10$ m s^{-1}、$f_0 \sim 10^{-4}$ s^{-1} を適用すると $Ro \sim 0.1$ となる。

一方、運動方程式 (3.4.8) に (3.4.2)を用いて $\nabla_p \Phi$ を消去し、さらに (3.4.5) を用いると、

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} + f\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{V}_a = 0 \tag{3.4.10}$$

と書ける。 ここで非地衡風のスケールをU_aとすると、第 1 項（U^2/L）と第 2 項（$f_0 U_a$）の比較から

$$U_a \sim \frac{U^2}{f_0 L} = RoU \tag{3.4.11}$$

といえる。ここから、非地衡風のスケールは水平風のスケールのRo倍であること、そして中緯度総観規模現象では非地衡風は地衡風の 0.1 程度と小さいと言える。

ここではまた、p座標系における鉛直速度ωと、z座標系における鉛直速度wの関係を見ておこう。鉛直p速度（ω）の定義

$$\omega \equiv \frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \boldsymbol{V} \cdot \nabla_z p + w\frac{\partial p}{\partial z} \tag{3.4.12}$$

において、右辺第 1 項は気圧の局所的な時間変化、第 2 項は水平圧力移流、第 3 項は鉛直圧力移流である。第 2 項において水平風$\boldsymbol{V}$のうち地衡風が $\boldsymbol{V}_g = (\rho f)^{-1}\boldsymbol{k} \times \nabla_z p$ で等圧線に平行なので $\boldsymbol{V}_g \cdot \nabla_z p = 0$ であることと、また第 3 項において静力学平衡の関係を用いると、

$$\omega = \frac{\partial p}{\partial t} + \boldsymbol{V}_a \cdot \nabla_z p - g\rho w \tag{3.4.13}$$

が得られる。ここで、各項の大きさを比較すると、地表面付近以外は、

$\lvert\partial p/\partial t\rvert$	～	10 hPa day^{-1}		
$\lvert\boldsymbol{V}_a \cdot \nabla_z p\rvert$	～	(1 m s^{-1})・(10 hPa) (10^{3}km)$^{-1}$・(10^5 s day^{-1})	～	1 hPa day^{-1}
$\lvert g\rho w\rvert$	～	(10 m s^{-1})・(1 kg m^{-3})・(1cm s^{-1})・(10^5 s day^{-1})	～	10^2 hPa day^{-1}

となるので、(3.4.13) 式は次のように近似できる。

$$\omega \approx -g\rho w \tag{3.4.14}$$

気圧pにおけるωは、非地衡風で表した連続の式 (3.4.7) 式を地上気圧p_sからpまで積分して

$$\omega(p) = \omega(p_s) - \int_{p_s}^{p} \nabla_p \cdot \boldsymbol{V}_a \, dp = \omega(p_s) + (p_s - p)\nabla_p \cdot \langle \boldsymbol{V}_a \rangle \tag{3.4.15}$$

のように得られる。ここで、$\langle\ \rangle$ は気圧で重みを付けた鉛直平均で、

$$\langle\ \rangle \equiv -(p_s - p)^{-1} \int_{p_s}^{p} (\ )\, dp$$

である。これを求めるには、$\omega(p_s)$ すなわち地表面におけるωが必要である。地表面では、地面が傾斜していれば、それに沿った流れにより鉛直流成分が生じうる。しかし、地表面が平たんであれば、$p = p_s$ において $w = 0$ になるはずである。さらに地衡風は等圧線に平行であることから $\boldsymbol{V}_g \cdot \nabla_z p = 0$ である。これらを考慮すると、(3.4.13) より

$$\omega(p_s) = \frac{\partial p_s}{\partial t} + \boldsymbol{V}_a \cdot \nabla_z p_s \tag{3.4.16}$$

と書ける。これを (3.4.15) に代入すると、

$$\omega(p) = \frac{\partial p_s}{\partial t} + \boldsymbol{V}_a \cdot \nabla_z p_s + (p_s - p)\nabla_p \cdot \langle \boldsymbol{V}_a \rangle \tag{3.4.17}$$

が得られる。(3.4.17) 式の右辺には非地衡風があるので、この方法で鉛直運動を求めるには非地衡風の見積もりが必要ということがわかる。しかし、非地衡風成分は水平風速の観測値 $\boldsymbol{V}$ と比較すると一般に小さいので、観測誤差の影響を大きく受ける。つまり、 (3.4.17) の右辺第 2 項と第 3 項とも、水平風が十分に精度良く求められなければこの計算が無意味になる。すなわち、運動学的方法による鉛直運動推定法の欠点は、非地衡風が地衡風と比較して小さい点である。

以上の運動学的方法のほかには、熱力学的方法がある。これは熱力学第 1 法則から導かれる

$$\omega = \frac{1}{S_p}\left[\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_p + \boldsymbol{V}\cdot\nabla_p T - \frac{J}{C_p}\right] \tag{3.4.18}$$

によりωを推定する方法である。この方法には温度の局所的時間変化と非断熱加熱が必要となるのが困難な点である。

これらはプリミティブ方程式系からωを直接推定しようとする方法だが、現実にこれで推定を行うのは難しい。総観規模現象に関するωの推定は、第 5 章で準地衡風方程式系を用いて行うことになる。

3.4.2 地上気圧変化の推定

上空のωを求めようとした (3.4.17) 式には、地上気圧の局所的な時間変化の項 $\partial p_s/\partial t$ があった。この地上気圧の時間変化は、低気圧の接近を表す指標でもあり、天気予報には重要である。これは第 2.4 節でも扱ったが、ここで改めて考えてみる。

(3.4.15) 式で $p\to 0$ （大気上端）とし、そこ（$p = 0$）では $\omega = 0$ とすると、

$$\omega(p_s) = -\int_0^{p_s} \nabla_p \cdot \boldsymbol{V}_a \, dp \tag{3.4.19}$$

また (3.4.13) 式を地表面で考えると、その右辺第 3 項に関しては $w = 0$ と仮定できることと、また右辺第 2 項の $\boldsymbol{V}_a\cdot\nabla_z p$ の項が他の項より小さく無視できることも用いると、

$$\omega(p_s) \cong \frac{\partial p_s}{\partial t}$$

と考えることができる。これと (3.4.19) から、

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} \cong -\int_0^{p_s} \nabla_p \cdot \boldsymbol{V}_a \, dp \tag{3.4.20}$$

が得られる。この式は、ある地点の地上気圧の時間変化が、その地点の上空の気柱の質量変化によって生じることを表す。しかし、前項の鉛直運動推定の議論で指摘されたように、水平収束を精度良く決定することは難しいため、地上気圧変化を精度良く求めることも困難である。

それでも、地上気圧変化と上空の発散を関係づけるこの式は重要である。このことは例えば、図 3.13 のような熱的低気圧の説明に使える。はじめに、図 3.13a のように熱源（例えば水蒸気の凝結に伴う潜熱解放）により中層に暖気が生じたとする。すると中層の層厚が増大することで、第 2.1 節の測高公式（または静力学平衡の式）の関係により上層の等圧面高度が上昇し、上層では気圧傾度力が生じて水平発散する流れが生じる。この上層の発散は、(3.4.20) より、地上気圧を減少させ始めるので、中層暖

気の下に地上低気圧が生じる（図 3.13b）。地上の低気圧により地上では気圧傾度力が生じて収束が生じ、それと上層発散を補償するような鉛直運動（上昇流）が生じる。下層収束と上層発散の度合いにより、地上気圧がさらに低下を続けるか上昇に転じるかが決まる。

このように熱力学的効果による気圧（質量場）の変化が生じると、それにより風の分布（力学場）も変化するはずである。北半球であれば、図 3.13 で示された下層での低気圧の発生には反時計回りの風の循環の発生が伴い、上層での高気圧の発生には時計回りの風の循環の発生が伴うことになる。これは次節で述べる地衡風調節のプロセスであり、力学的には水平収束・発散による渦度の変化として第 4 章で説明されることになる。

なお、図 3.13 で説明したような熱的低気圧は現実の低気圧のごく一部だが、上層と下層の相互作用を考えることは、低気圧の一般的な力学過程を考えるうえでも参考になる。温帯低気圧については第 5 章で改めて説明する。

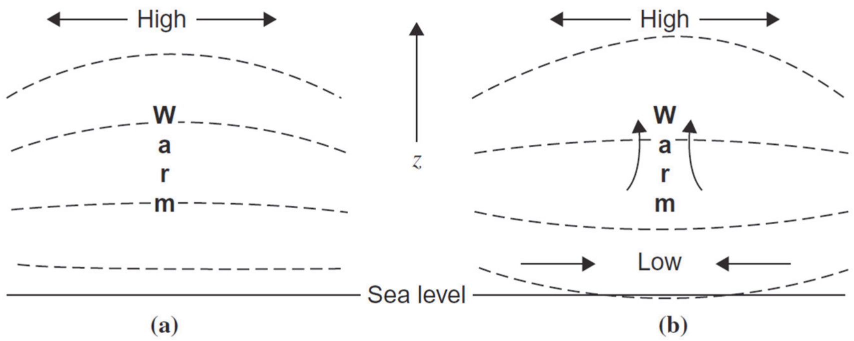


図 3.13　対流圏中層の熱源に対する地上気圧の調節。破線は等圧面を表す。（Holton and Hakim 2012）

3.5　地衡風調節

中緯度の総観規模現象では、風と気圧場がバランスして、近似的には地衡風の関係が成り立っている。もしこの 2 つの場がバランスしていない場合には、重力波（より正確には地球自転の影響を受けた慣性重力波。第 6 章・第 7 章参照）が発生し、その減衰の過程を経て、地衡風平衡の状態への相互調節が行われる。これを**地衡風調節**（geostrophic adjustment）と呼ぶ。

この節では簡単のため、浅水方程式系（第 2 章）を使って地衡風調節の仮定を調べる。基本場としては静止状態（深さH）を取り、底面地形がない（$h_B = 0$）場合を考える。風速と高度を

$$u = u', \qquad v = v', \qquad h = H + h' \tag{3.5.1}$$

とし、 $'$のついた量は十分小さいと考えて、それらの 2 次以上の項を無視することにする。その結果、線形化された方程式系として、

$$\frac{\partial u'}{\partial t} - f v' = -g \frac{\partial h'}{\partial x} \tag{3.5.2a}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + f u' = -g \frac{\partial h'}{\partial y} \tag{3.5.2b}$$

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + H\left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y}\right) = 0 \tag{3.5.2c}$$

が得られる。地衡風平衡はこれらの定常解のうちの一つなので、$\partial/\partial t = 0$ として、

$$-fv' = -g\frac{\partial h'}{\partial x} \tag{3.5.3a}$$

$$fu' = -g\frac{\partial h'}{\partial y} \tag{3.5.3b}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0 \tag{3.5.3c}$$

を満たす。ただし (3.5.3c) は (3.5.3a,b) によって自動的に満足されている。

地衡風調節問題とは、風と高度が地衡風平衡にない場を初期値として与え、上の方程式系の解を求める初期値問題のことである。地衡風バランスしていない初期場からは、慣性重力波が発生して四方八方に広がり、その減衰の過程を経て、最終的に地衡風バランスした定常状態に落ち着くと考えられる。この過程は、初期値問題を解くことによっても求められるが、ここではその方法ではなく、方程式系に含まれる保存則に着目し、地衡風調節により最終的に達成される地衡風平衡状態を決定する。

まず、方程式 (3.5.2a,b) を水平発散と渦度の鉛直成分

$$D' = \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y}, \quad \zeta' = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \tag{3.5.4a, b}$$

に関する方程式に書き換える（渦度については第 4 章で詳細に説明する）。

$$\frac{\partial D'}{\partial t} - f\zeta' + g\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)h' = 0 \tag{3.5.5a}$$

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} + fD' = 0 \tag{3.5.5b}$$

が得られる。一方、(3.5.2c) を D' を用いて書き換え、さらにtで偏微分すると、

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + HD' = 0, \quad \frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} = -H\frac{\partial D'}{\partial t} \tag{3.5.6a, b}$$

(3.5.5a) と (3.5.6b)、(3.5.5b) と (3.5.6a) からそれぞれ D' を消去すると

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} + fH\zeta' - gH\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)h' = 0 \tag{3.5.7a}$$

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} - \frac{f}{H}\frac{\partial h'}{\partial t} = 0 \tag{3.5.7b}$$

が得られる。これらのうち (3.5.7b) から

$$Q \equiv \zeta' - \frac{f}{H}h' = \text{一定} \tag{3.5.8}$$

であることがわかる。（これは第 4 章で説明する渦位を線形化したものに相当する。）

また (3.5.7a) 式で $f = 0$ とすると、第 2 章で見た浅水波を表す波動方程式となり、地球自転がなければ浅水波が生じることを意味する。それに対して、ここでは地球自転がある場合に何が生じるかを考えることになる。

3.5.1　高度場を与える場合

初期状態として、静止大気に図 3.14 のような高度場（階段状の表面）を与えた場合について調べる。すなわち初期状態は

$$u'_0 = 0\,, \qquad v'_0 = 0$$
$$h'_0 = \begin{cases} \Delta H & (|x| < a) \\ 0 & (|x| > a) \end{cases} \tag{3.5.9}$$

である。この状態は地衡風バランスしていないので、地衡風調節によってどのような平衡状態が実現されるかを考える。

この初期値を (3.5.8) 式に適用すると、時刻tにおける自由表面高度を $h' = h'(x, y, t)$とすれば、

$$\zeta' - \frac{f}{H}h' = -\frac{fh'_0}{H} \tag{3.5.10}$$

となるので、

$$\zeta' = \frac{f}{H}(h' - h'_0) \tag{3.5.11}$$

が言える。これを (3.5.7a) に代入すると、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2\right)h' - gH\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)h' = f^2 h'_0 \tag{3.5.12}$$

となる。

h'の初期値 h'_0 はyに依存しないので、(3.5.12) の右辺はyに依存せず、従って左辺も任意の時刻tにおいてもyに依存しない。よって、h'は初期時刻以降もyに依存していないと考えて良い。また最終定常状態では $\partial/\partial t = 0$ となっているべきなので、最終定常状態を決める式として

$$-gH\frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} + f^2 h' = f^2 h'_0 \tag{3.5.13}$$

が得られる。ここで、この微分方程式で表される現象の水平スケールをLとすると、$L \sim \sqrt{gH}/f$ であることがわかる。これを考慮して $\lambda_d \equiv \sqrt{gH}/f$ とおくと、(3.5.13) は

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} - \frac{1}{{\lambda_d}^2}h' = \begin{cases} -\dfrac{\Delta H}{{\lambda_d}^2} & (|x| < a) \\ 0 & (|x| > a) \end{cases} \tag{3.5.14}$$

となる。最終定常状態では解のh'は十分に滑らかになっていると考えられるので、h' 及び dh'/dx が $x = \pm a$ において連続で、$x \to \pm\infty$ で $h' \to 0$ という境界条件を満たすように決めると、

$$h' = \begin{cases} \Delta H \sinh\left(\dfrac{a}{\lambda_d}\right) e^{-x/\lambda_d} & (x > a) \\ \Delta H \left[1 - e^{-a/\lambda_d} \cosh\left(\dfrac{x}{\lambda_d}\right)\right] & (-a < x < a) \\ \Delta H \sinh\left(\dfrac{a}{\lambda_d}\right) e^{x/\lambda_d} & (x < -a) \end{cases} \tag{3.5.15}$$

が得られる。

この高度場と地衡風バランスする風の場は、

$$u' = -\frac{g}{f}\frac{\partial h'}{\partial y} = 0 \tag{3.5.16}$$

$$v' = \frac{g}{f}\frac{\partial h'}{\partial x} = \begin{cases} -\dfrac{g\Delta H}{f\lambda_d}\sinh\left(\dfrac{a}{\lambda_d}\right)e^{-x/\lambda_d} & (x > a) \\ -\dfrac{g\Delta H}{f\lambda_d}e^{-a/\lambda_d}\sinh\left(\dfrac{x}{\lambda_d}\right) & (-a < x < a) \\ \dfrac{g\Delta H}{f\lambda_d}\sinh\left(\dfrac{a}{\lambda_d}\right)e^{x/\lambda_d} & (x < -a) \end{cases} \tag{3.5.17}$$

により与えられる。

これらの式から、速度場・高度場共に初期状態から変化（変形）し、互いに調整しあうことで最終的な地衡風平衡状態に到達することがわかる。この変形における特徴的な水平スケールは

$$\lambda_d \equiv \frac{\sqrt{gH}}{f} \tag{3.5.18}$$

により決定される。このλ_dを**ロスビーの変形半径**（Rossby radius of deformation）といい、平均の深さ H と地球自転 f に依存する。図 3.15 には$a/\lambda_d =$ 10、1、0.3 のそれぞれの場合について、地衡風調節後に到達する地衡風平衡にある高度場を表す。$a/\lambda_d \gg 1$ の場合（変形された高度場の水平スケールが大きい場合）は初期の高度場がほぼ維持されるが、$a/\lambda_d \ll 1$ の場合（変形された高度場の領域が小さい場合）には高度場は最終的にはほとんどならされてしまう。高度場の変化は位置エネルギーの減少を表す。減少した位置エネルギーの一部は、地衡風調節による速度場の運動エネルギーに変換され、残りのエネルギーは波動の運動エネルギーに変換されて散逸してしまっている。

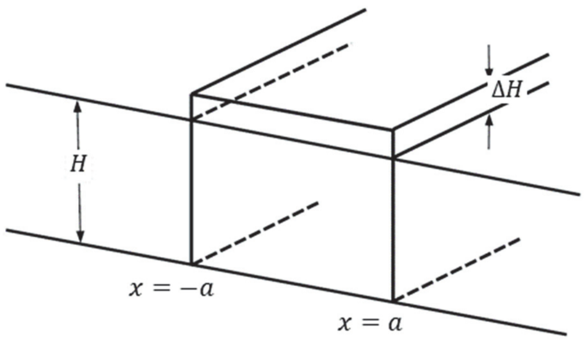


図 3.14　高度場と風速場が地衡風平衡にない初期状態。（小倉 1978）

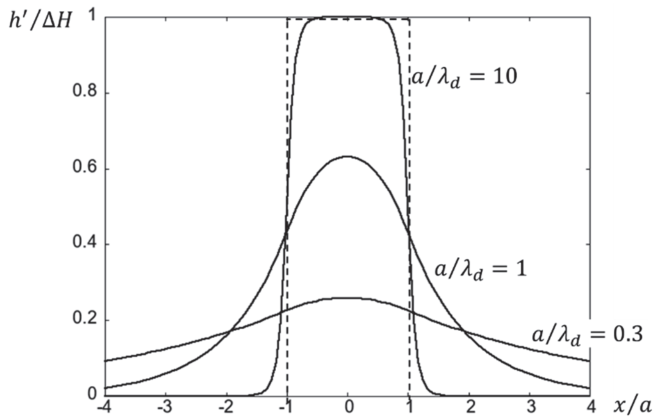


図 3.15　図 3.14 の初期状態（破線）から地衡風調節により達成される高度場。

3.5.2 風の場を与える場合

次に、図 3.16 のように風の場だけを与える場合について調べる。初期状態は

$$
u_0' = 0\,, \qquad h_0' = 0
$$
$$
v_0' = \begin{cases} \Delta V & (|x| < a) \\ 0 & (|x| > a) \end{cases} \tag{3.5.19}
$$

で与えられる。この初期値を (3.5.8) 式に適用すると、

$$
\zeta' - \frac{f}{H}h' = \zeta_0' = \Delta V[\delta(x+a) - \delta(x-a)] \tag{3.5.20}
$$

となる。ここでδはデルタ関数で距離の逆数の次元を持ち、$x = \pm a$ の位置でのみ $\zeta_0' \neq 0$ であることを示す。ここから、

$$
\zeta' = \zeta_0' + \frac{f}{H}h' \tag{3.5.21}
$$

が言える。これを (3.5.7a) に代入すると、

$$
\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2\right)h' - gH\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)h' = -fH\zeta_0' \tag{3.5.22}
$$

が得られる。従って、最終定常状態を決める式は、

$$
-gH\frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} + f^2 h' = -fH\zeta_0' \tag{3.5.23}
$$

である。これは、

$$
\frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} - \frac{1}{\lambda^2}h' = \frac{f\Delta V}{g}[\delta(x+a) - \delta(x-a)] \tag{3.5.24}
$$

となる。この解を、h'の $x = \pm a$ における接続条件と、$x \to \pm\infty$ で $h' \to 0$ の境界条件で求める。ただし、第 3.5.1 項の高度場を与えた場合とは異なり、最終定常状態で dh'/dx が $x = \pm a$ において連続になるとは限らない。この点に注意して解くと、

$$
h' = \begin{cases} \dfrac{\Delta VH}{f\lambda_d}\sinh\left(\dfrac{a}{\lambda_d}\right)e^{-x/\lambda_d} & (x > a) \\ \dfrac{\Delta VH}{f\lambda_d}e^{-a/\lambda_d}\sinh\left(\dfrac{x}{\lambda_d}\right) & (-a < x < a) \\ -\dfrac{\Delta VH}{f\lambda_d}\sinh\left(\dfrac{a}{\lambda_d}\right)e^{x/\lambda_d} & (x < -a) \end{cases} \tag{3.5.25}
$$

が得られる（別解として小倉（1978）p.104-105 も参照)。この高度場と地衡風バランスする風の場は、

$$
u' = -\frac{g}{f}\frac{\partial h'}{\partial y} = 0 \tag{3.5.26}
$$

$$
v' = \frac{g}{f}\frac{\partial h'}{\partial x} = \begin{cases} -\Delta V\sinh\left(\dfrac{a}{\lambda_d}\right)e^{-x/\lambda_d} & (x > a) \\ \Delta Ve^{-a/\lambda_d}\cosh\left(\dfrac{x}{\lambda_d}\right) & (-a < x < a) \\ -\Delta V\sinh\left(\dfrac{a}{\lambda_d}\right)e^{x/\lambda_d} & (x < -a) \end{cases} \tag{3.5.27}
$$

により与えられる。

最終的な南北風は a/λ_d の値によって大きく異なる。$a/\lambda_d \ll 1$ の場合（変形された風の場の水平スケールが小さい場合）は初期の南北風がほぼ維持されるが、$a/\lambda_d \gg 1$ の場合（変形された風の場の領域が大きい場合）には風の場は大きく変形されてしまう。これは初期状態の運動エネルギーの一部が位置エネルギーに変換されたことを意味し、この場合も運動エネルギーの一部は波動となって散逸する。

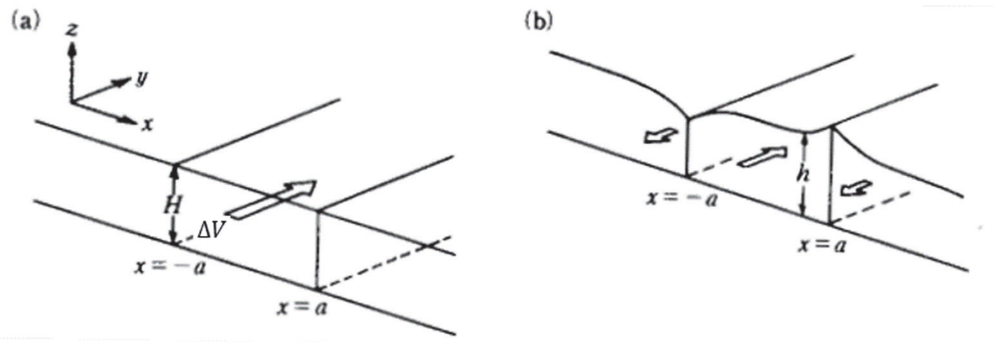


図 3.16　風の場が与えられたときの地衡風調節。(a) 初期状態、(b) 調節後。（小倉 1978）

3.5.3 地衡風調節のまとめ

地衡風調節によって最終的に生じるバランスした場は、初期値で与えられた変動の水平スケールによって決まることが示された。まとめると以下のようになる。

- 初期擾乱の水平スケール ≫ ロスビーの変形半径：

  風の場が高度場に地衡風バランスするように調節される。初期の高度場が比較的良く維持され、風の場が大きく変形される。

- 初期擾乱の水平スケール ≪ ロスビーの変形半径：

  高度場が風の場に地衡風バランスするように調節される。初期の風の場は比較的良く維持され、

高度場が大きく変形される。

例えば現実大気において、メソスケールの対流システムが発生し、局所的に大量の潜熱解放があると、地上気圧が下がることが考えられる。これは高度場において小さいスケールの変動が生じることになる。しかし、ロスビーの変形半径より小さい水平スケールの気圧の変動が生じても、初期場にメソスケールの風の渦がなければ、風の循環を伴う低気圧として維持されない。

なお、(3.5.15)〜(3.5.17) と (3.5.25)〜(3.5.27) で得られる定常な地衡風定常状態は、(3.5.2a-c) において単に $\partial/\partial t = 0$ と置いただけでは得られないことに注意が必要である。実際、定常な場合の (3.5.3a-c) を満たす場は無数に存在する。しかしそのような無数の場の中からただ一つの平衡状態が、与えられた初期状態に対応して地衡風調節によって選択的に実現される。

初期値で高度場の変動を与えた場合は、地衡風調節により位置エネルギーが運動エネルギーに変換される。逆に、初期値で風の場の変動を与えた場合は運動エネルギーが位置エネルギーに変換される。ただし地衡風調節の過程で生じた重力波が遠方に伝播することにより、一部のエネルギーは消散する。この波動は第 7 章で説明する慣性重力波の性質を持つ（付録 3D 参照）。

なお、完全に地衡風バランスすると、方程式系 (3.5.2a-c) の時間変化以外の項でバランスするので、それ以後は何も時間変化が起こらないことになるが、現実大気では天気の変化がなくなることはない。これは、わずかな地衡風からのずれ（非地衡風）に働くコリオリ力が、f^{-1} 以上の時間スケールでゆっくりと地衡風成分を変化させていくことによる。それを扱う準地衡風の枠組みについて第 5 章で取り上げる。また非地衡風成分はβ効果やエクマン境界層でも生じ、準地衡風的な波動の伝播や成長に関連する。それらについては第 7 章〜第 9 章で述べる。

またここで特徴的な水平スケールとして用いたロスビーの（外部）変形半径 $\lambda_d \equiv \sqrt{gH}/f$ は、浅水方程式系による重力波（外部波）の位相速度$\sqrt{gH}$ と慣性運動の時間スケール f^{-1} に関係する。現実の成層のある大気中の現象に関しては、ブラント・バイサラ振動数Nを用いたロスビーの内部変形半径 NH/f が、特徴的な水平スケールとして用いられることになる。前者のロスビーの外部変形半径はこのあと第 7 章で浅水方程式系による波動の説明で頻出することになり、後者のロスビーの内部変形半径は第 8 章の傾圧不安定の説明で用いることになる。

第 3 章の参考文献

石井春雄、1998：漂流ブイの軌跡に見られた慣性周期運動。水路部研究報告、34、65－69.

Marshall, J. and R. A. Plumb, 2008: Atmosphere, Ocean and Climate Dynamics: An Introductory Text. Academic Press, 344pp.

付録 3A　流線関数

第 3.2 節で流線を定義したが、2 次元の流れで

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = v\ , \qquad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -u \qquad (3A.1)$$

を満たすようなψがあるとき、これを**流線関数**（streamfunction）と呼ぶ。これが定義できるときは、

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{3A.2}$$

となる。見方を変えると、発散のない流れは流線関数 1 変数のみで表すことができる。

x-y平面上で流線関数ψの等値線（ψ一定）に沿った変化を考えると、

$$d\psi=\frac{\partial \psi}{\partial x}dx+\frac{\partial \psi}{\partial y}dy=0 \tag{3A.3}$$

であり、これは (3A.1) が成り立つなら

$$vdx-udy=0$$

と変形できるので、第 3.2 節で流線の定義とした (3.2.2) 式

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{v(x,y,t_0)}{u(x,y,t_0)}$$

と等価である。これにより、非発散であれば流線関数の等値線が流線であると言える。流線関数は本テキストでは第 5 章以降で使用する。なお、地衡風は

$$v_g=\frac{1}{f}\frac{\partial \Phi}{\partial x}，\ u_g=-\frac{1}{f}\frac{\partial \Phi}{\partial y} \tag{3A.4}$$

と書けるので、fを一定とすれば非発散であり、$\psi=\Phi/f$ を地衡風の流線と見なすことができる。

【参考：発散のある流れの流線関数と速度ポテンシャル】

流線関数を用いた流れの表現に関連して、流れに発散がある場合も含めて一般化しておく。そのために 2 次元速度場を非発散・渦あり成分（添え字ψ）と渦なし・発散あり成分（添え字χ）に分ける。

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}_\psi+\boldsymbol{V}_\chi \tag{3A.5}$$

このうち$\boldsymbol{V}_\psi$は、流線関数ψと水平勾配ベクトル $\nabla_H=\boldsymbol{i}\,\partial/\partial x+\boldsymbol{j}\,\partial/\partial y$ を使って

$$\boldsymbol{V}_\psi=\boldsymbol{k}\times\nabla_H\psi=\boldsymbol{k}\times\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial \psi}{\partial y}\boldsymbol{j}\right)=-\frac{\partial \psi}{\partial y}\boldsymbol{i}+\frac{\partial \psi}{\partial x}\boldsymbol{j} \tag{3A.6}$$

のように書くと、$\nabla_H\cdot\boldsymbol{V}_\psi=0$ であり、非発散であると言える。これは (3A.1) と同じである。

一方、発散風成分に関しては、速度ポテンシャル（velocity potential）χ が定義でき、

$$\boldsymbol{V}_\chi=\nabla_H\chi=\frac{\partial \chi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial \chi}{\partial y}\boldsymbol{j} \tag{3A.7}$$

のように表せる（このχは第 5 章のジオポテンシャル変化傾向とは異なる）。これの回転をとると、そのz成分（第 4 章で扱う渦度）は

$$\boldsymbol{k}\cdot\nabla_H\times\boldsymbol{V}_\chi=\boldsymbol{k}\cdot\nabla_H\times\nabla_H\chi=0 \tag{3A.8}$$

であるので、$\boldsymbol{V}_\chi$は渦なし（非回転）である。

これらにより、(3A.5) 式は

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}_\psi+\boldsymbol{V}_\chi=\ \boldsymbol{k}\times\nabla_H\psi+\nabla_H\chi \tag{3A.9}$$

と書き直せる。そして流れの発散と渦度は

$$\nabla_H \cdot \boldsymbol{V} = \nabla_H \cdot \boldsymbol{V}_\chi = \nabla_H^2 \chi \tag{3A.10}$$

$$\zeta = \boldsymbol{k} \cdot \nabla_H \times \boldsymbol{V} = \boldsymbol{k} \cdot \nabla_H \times \boldsymbol{V}_\psi = \nabla_H^2 \psi \tag{3A.11}$$

のようにそれぞれ速度ポテンシャルと流線関数のみで表せる。（本テキストでは速度ポテンシャルは使用しない。）

付録 3B　鉛直座標系による温度風の関係の表現の違い

第 3.3 節では、テイラー・プラウドマンの定理はz座標系で論じたが、温度風の関係式はp座標系で導いた。

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}_g}{\partial p} = -\frac{R}{fp} \boldsymbol{k} \times \nabla_p T$$

ここではこれをz座標系で表現してみる。まず地衡風バランスは

$$f\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{V}_g = -\frac{1}{\rho} \nabla_z p \tag{3B.1}$$

であり、成分ごとの表記では

$$v_g = \frac{1}{f\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z,\ \ u_g = -\frac{1}{f\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_z \tag{3B.2a, b}$$

となる。これらを、状態方程式 $p = \rho RT$ を使って、

$$v_g = \frac{RT}{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\ln p\right)_z,\ \ u_g = -\frac{RT}{f}\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln p\right)_z \tag{3B.3a, b}$$

としておこう。静力学平衡の式から

$$\frac{\partial}{\partial z}\ln p = -\frac{g}{RT}$$

であることにも注意して、(3B.3b) をzで偏微分して変形すると、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_g}{\partial z} &= -\frac{R}{f}\frac{\partial}{\partial z}\left[T\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln p\right)_z\right] = -\frac{R}{f}\left[\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln p\right)_z\frac{\partial T}{\partial z} + T\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln p\right)_z\right] \\
&= -\frac{R}{f}\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln p\right)_z\frac{\partial T}{\partial z} - \frac{RT}{f}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial z}\ln p\right)\right\}_z = -\frac{R}{f}\left(-\frac{f}{RT}u_g\right)\frac{\partial T}{\partial z} - \frac{RT}{f}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{g}{RT}\right)\right\}_z \\
&= \frac{u_g}{T}\frac{\partial T}{\partial z} - \frac{g}{fT}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_z
\end{aligned}$$

となる。同様にして (3B.3a) からも変形して、最終的に

$$\frac{\partial v_g}{\partial z} = \frac{g}{fT}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_z + \frac{v_g}{T}\frac{\partial T}{\partial z},\quad \frac{\partial u_g}{\partial z} = -\frac{g}{fT}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_z + \frac{u_g}{T}\frac{\partial T}{\partial z} \tag{3B.4a, b}$$

が得られる。p座標系では鉛直座標が気圧すなわち大気の質量に関係しているが、z座標系ではそうではないために右辺第 2 項が生じ、力学的バランスの説明が容易ではなくなっている。

次に、前と同様に (3B.3b) をzで偏微分するが等圧面上の地衡風バランスを用いるならば、

$$\frac{\partial u_g}{\partial z} = -\frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_p = -\frac{1}{f}\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_p = -\frac{1}{f}\frac{\partial p}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)_p = -\frac{\rho g}{f}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right\}_p = -\frac{g}{f}\frac{p}{RT}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{RT}{p}\right)\right\}_p$$
$$= -\frac{g}{fT}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_p$$

同様にして (3B.3a) からも変形して、

$$\frac{\partial v_g}{\partial z} = \frac{g}{fT}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_p,\ \ \frac{\partial u_g}{\partial z} = -\frac{g}{fT}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_p \qquad \text{(3B.5a, b)}$$

が得られる。ここでは (3B.4a, b) にあった右辺第 2 項がなくなっている。ベクトル表記では

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}_g}{\partial z} = \frac{g}{f}\boldsymbol{k} \times \nabla_p \ln T \qquad \text{(3B.6)}$$

と書ける。

さらに、対数気圧座標系 $Z \equiv -H\ln(p/p_0)$（付録 2B）についても考えてみる。そこでは地衡風バランスは

$$f\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{V}_g = -\nabla_Z \Phi \qquad \text{(3B.7)}$$

である。これに静力学平衡の式

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Z} = \frac{RT}{H} = g\frac{T}{T_0}$$

を使うと、対数気圧座標系の温度風の関係式が

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}_g}{\partial Z} = \frac{g}{fT_0}\boldsymbol{k} \times \nabla_Z T \qquad \text{(3B.8)}$$

であることが容易にわかる。対数気圧座標はz座標系に類似しているが、気圧に基づいているため、p座標系の利点を享受することができる。

最後に、一般鉛直座標系ξ（付録 2B）についても考えておこう。そこでは地衡風バランス

$$f\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{V}_g = -\alpha\nabla_\xi p - \nabla_\xi \Phi \qquad \text{(3B.9)}$$

より地衡風が

$$\boldsymbol{V}_g = \frac{1}{f\rho}\boldsymbol{k} \times \nabla_\xi p + \frac{1}{f}\boldsymbol{k} \times \nabla_\xi \Phi = \frac{RT}{f}\boldsymbol{k} \times \nabla_\xi \ln p + \frac{1}{f}\boldsymbol{k} \times \nabla_\xi \Phi \qquad \text{(3B.10)}$$

と書ける。ここでは状態方程式も使っている。この両辺をξで偏微分すると、

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}_g}{\partial \xi} = \frac{R}{f}\frac{\partial T}{\partial \xi}\boldsymbol{k} \times \nabla_\xi \ln p + \frac{RT}{f}\boldsymbol{k} \times \nabla_\xi \frac{\partial \ln p}{\partial \xi} + \frac{1}{f}\boldsymbol{k} \times \nabla_\xi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \qquad \text{(3B.11)}$$

である。ここで、静力学平衡の式

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = 0$$

より、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \xi} = -RT\frac{\partial \ln p}{\partial \xi}$$

なので、これを (3B.11) 式の右辺第 2 項に使うと、

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{V}_g}{\partial \xi} &= \frac{R}{f}\frac{\partial T}{\partial \xi}\boldsymbol{k} \times \nabla_\xi \ln p - \frac{RT}{f}\boldsymbol{k} \times \nabla_\xi \left(\frac{1}{RT}\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right) + \frac{1}{f}\boldsymbol{k} \times \nabla_\xi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \\ &= \frac{R}{f}\frac{\partial T}{\partial \xi}\boldsymbol{k} \times \nabla_\xi \ln p + \frac{1}{fT}\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\boldsymbol{k} \times \nabla_\xi T\end{aligned} \tag{3B.12}$$

が得られる。これまで述べたさまざまな座標系での温度風バランスの式と比較してみていただきたい。

付録 3C　バランスした軸対称渦における温度風

第 3.3 節の温度風の関係は、地衡風と水平温度傾度の関係として表していた。ここではバランスした軸対称渦について考えてみる。

円筒座標系のプリミティブ方程式（付録 2C）の運動方程式は、

$$\frac{du}{dt} - \frac{v^2}{r} - fv = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + F_r$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{uv}{r} + fu = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \lambda} + F_\lambda$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g + F_z$$

であった。摩擦力がなく、時間変化のない（$d/dt = 0$）、軸対称渦（$\partial/\partial\lambda = 0$）を考えると、

$$\frac{v^2}{r} + fv = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}\,, \qquad u = 0\,, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = -g \tag{3C.1a-c}$$

となる。(3C.1a) は傾度風平衡、(3C.1c) は静水圧平衡で、(3C.1b) は動径風が生じないことを表す。ここで、単位質量当たりの遠心力とコリオリ力の和について、

$$C = \frac{v^2}{r} + fv \tag{3C.2}$$

とおくと、傾度風平衡 (3C.1a) は

$$C = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \tag{3C.3}$$

と書ける。この (3C.3) と (3C.1c) にρをかけてそれぞれzとrで偏微分し、pを消去すると、

$$g\frac{\partial \rho}{\partial r} + C\frac{\partial \rho}{\partial z} = -\rho\frac{\partial C}{\partial z} \tag{3C.4}$$

となる。この式はz座標系だが、左辺をp座標系に変換すると（座標変換は第 2 章を参照）、

$$g\left(\frac{\partial\rho}{\partial r}\right)_z + C\left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)_r = g\left[\left(\frac{\partial\rho}{\partial r}\right)_p + \rho g\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_p \frac{\partial\rho}{\partial p}\right] - \rho g C\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_r \tag{3C.5}$$

となる。ここで、r-z面における気圧の微小な変化が

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_z dr + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_r dz$$

で表されることを考慮すると、この面における等圧線（p一定、すなわち $dp = 0$）の傾きは、傾度風平衡 (3C.3) と静水圧の式 (3C.1c) も用いて

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_p = -\frac{(\partial p/\partial r)_z}{(\partial p/\partial z)_r} = \frac{C}{g} \tag{3C.6}$$

であることがわかる。これを用いて (3C.5) は

$$g\left(\frac{\partial\rho}{\partial r}\right)_z + C\left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)_r = g\left(\frac{\partial\rho}{\partial r}\right)_p \tag{3C.7}$$

と書き直せる。すると (3C.4) 式は結局、

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial r}\right)_p = -\frac{\rho}{g}\frac{\partial C}{\partial z} = -\frac{\rho}{g}\left(\frac{2v}{r} + f\right)\frac{\partial v}{\partial z} \tag{3C.8}$$

または

$$\left(\frac{\partial \ln\rho}{\partial r}\right)_p = -\frac{1}{g}\left(\frac{2v}{r} + f\right)\frac{\partial v}{\partial z} \tag{3C.9}$$

と書ける。状態方程式より、$\ln p = \ln\rho + \ln R + \ln T$ なので、

$$\left(\frac{\partial \ln T}{\partial r}\right)_p = \frac{1}{g}\left(\frac{2v}{r} + f\right)\frac{\partial v}{\partial z} \tag{3C.10}$$

と変形すると温度と風の関係として表せる。さらに右辺も気圧座標系にして状態方程式も使い、

$$\left(\frac{\partial \ln T}{\partial r}\right)_p = -\rho\left(\frac{2v}{r} + f\right)\frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{p}{RT}\left(\frac{2v}{r} + f\right)\frac{\partial v}{\partial p}$$

から変形すると

$$\left(\frac{2v}{r} + f\right)\frac{\partial v}{\partial \ln p} = -R\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_p \tag{3C.11}$$

となる。(3C.8) 〜 (3C.11) の各式の v/r の項で $r \to \infty$ とすると、その項は消える。それは流れの曲率がない場合となったことを意味し、第 3.3 節でみた地衡風に関する温度風の式に対応した形となる。

(3C.8) 〜 (3C.11) で、北半球の低気圧性の渦（$v > 0$）で、中心の密度が相対的に低い（$\partial\ln\rho/\partial r > 0$）場合、すなわち中心付近の気温が相対的に高い（$\partial\ln T/\partial r < 0$ 及び $\partial T/\partial r < 0$）場合は、$\partial v/\partial z < 0$（$\partial v/\partial p > 0$）となる。すなわち、暖気核の低気圧の場合は、低気圧性循環は下層ほど強い。これは現実の台風に見られる特徴と矛盾しない。逆に、寒気核を持つ低気圧の場合は、低気圧性循環は上層ほど強い。

付録 3D　地衡風調節に伴って生じる波動

地衡風調節の過程では、波動が生じ、遠方へと伝播することで、初期場にあったエネルギーの一部が失われる。この波動について考える。

まず、第 3.5.1 項で初期値として高度場に変動を与えた場合を考える。方程式系を整理して導出した高度偏差の波動方程式は (3.5.12) 式であった。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f^2\right)h' - gH\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)h' = f^2 h'_0 \tag{3.5.12}$$

ここで、与えた高度場が一様な場合（$h'_0 = 0$）に伝播する波動を考える。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f^2\right)h' - gH\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)h' = 0 \tag{3D.1}$$

ここで、第 6 章・第 7 章で行うのと同様に、単一の振動数を持つ平面波を仮定した単色平面波解

$$h' = \hat{h}\exp\{i(kx+ly-\sigma t)\} \tag{3D.2}$$

を仮定して代入すると、分散関係

$$\sigma^2 = f^2 + gH(k^2+l^2) \tag{3D.3}$$

が得られる。これは第 7.1 節の慣性重力波の分散関係であることから、このような状況下で発生する波動が慣性重力波の性質を持つことが説明できる。

また第 3.5.2 項で初期値として風の場を与えた場合については、波動方程式は (3.5.22) 式であった。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f^2\right)h' - gH\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)h' = -fH\zeta'_0 \tag{3.5.22}$$

ここでも与えた風の場が一様な場合（$\zeta'_0 = 0$）に伝播する波動を考えると、初期値として高度場を与えた場合と同じ波動方程式 (3D.1) になり、そこで生じると考えられる波動も同様となる。

さらに、地衡風調節で定常状態に至るには発生する波動によりエネルギーが消散することを考慮すると、波動のエネルギーを運ぶ群速度を考える必要がある（群速度による波動のエネルギー伝播については第 6.1 節を参照。また以下は Middleton 1987 に基づく）。(3D.3) 式に示した分散関係を、簡単のため y 方向は一様（$l = 0$）とし、またロスビーの変形半径 $\lambda_d \equiv \sqrt{gH}/f$ を用いて表すと

$$\sigma^2 = f^2\left(1+{\lambda_d}^2k^2\right) \tag{3D.4}$$

と書ける。このとき x 方向の群速度は

$$c_{gx} = \frac{\partial\sigma}{\partial k} = \frac{f^2{\lambda_d}^2 k}{\sigma} = \frac{f{\lambda_d}^2k}{\left(1+{\lambda_d}^2k^2\right)^{1/2}} \tag{3D.5}$$

である。そしてこの波動のエネルギーの伝播する時間スケールを τ とすると

$$\tau = \frac{1}{kc_{gx}} = \frac{\left(1+{\lambda_d}^2k^2\right)^{1/2}}{f{\lambda_d}^2k^2} \tag{3D.6}$$

となり、慣性周期 f^{-1}に関係した時間だが、発生する波動の水平スケール k^{-1} により変化する。発生する波動で最もエネルギーが大きいのは初期状態として与えた擾乱のスケール（第 3.5 節のa）に対応すると考えられる（すなわち$k^{-1} \sim a$）ので、以下、それに関してさらに考える。

初期擾乱のスケールが小さく $a/\lambda_d \ll 1$ の場合、$\lambda_d k \gg 1$ なので、$\tau \sim 1/f\lambda_d k = 1/k\sqrt{gH}$ で、$\tau \ll$

f^{-1}となり、地衡風調節は短時間で進行する。この場合は発生する波動は波長が小さいため地球自転の影響は小さく、分散関係 (3D.4) は $\sigma \sim k\sqrt{gH}$ で位相速度 σ/k・群速度 $\partial\sigma/\partial k$ ともに $\sim\sqrt{gH}$ となり、慣性重力波というより純粋な重力波のように振舞う（第 2.5 節で浅水重力波の位相速度が $\sqrt{gH}$ であったことを参照)。第 3.5 節の議論より、$a/\lambda_d \ll 1$ の場合には風の場にバランスするように高度場が調節されるが、その過程で重力波が発生してエネルギーの一部が失われることになる。

逆に初期擾乱のスケールが大きく $a/\lambda_d \gg 1$ の場合は、$\lambda_d k \ll 1$ で、$\sigma \sim f$ で、$\tau \sim 1/f{\lambda_d}^2 k^2 \gg f^{-1}$ となり、地衡風調節にかかる時間は慣性周期よりかなり長くなる。これは、発生する波動は重力波的な性質が小さく慣性振動（第 3.1.3 項参照）的に振舞い、波動の群速度 (3D.5) は 0 に近づくので、それによるエネルギーの消散がなく振動が続いてしまうことによる。第 3.5 節の議論では $a/\lambda_d \gg 1$ の場合には高度場にバランスするように風の場が調節されるのであったが、調節には時間がかかることになる。

付録 3D の参考文献

Middleton, J. F., 1987: Energetics of linear geostrophic adjustment. J. Phys. Ocean., 17, 735-740.

第 4 章　渦度と渦位

大気中にはさまざまな渦が存在する。中緯度の高気圧や低気圧には数千 km スケールの渦上の運動が伴っている。また熱帯においては数百 km スケールの熱帯低気圧（台風）と呼ばれる渦が発達する。これらの渦はほぼ水平面上の運動であり、渦の軸はほぼ鉛直に立っている。一方、軸が水平方向になっている渦もある。数 km～数十 km スケールの海陸風循環や、数千 km スケールで熱帯から亜熱帯にかけて大規模な子午面循環であるハドレー循環が、その例である。本章ではこのような大気中の渦の強さの時間変化を支配する法則について述べる。

最初に、宇宙空間に固定された座標系である慣性系における渦運動を表す、循環と渦度という物理量を定義する。これらは流体力学では一般に使われるが、大気力学では傾圧性の存在が渦の生成や成長・衰弱にかかわっているので、むしろ渦度に熱力学的な性質も加味した保存量である渦位を用いると効果的である。さらに、自転する地球に固定した座標系における渦度の時間変化の方程式を求める。そしてそれらを用いると、回転流体中でロスビー波という波動が生じることが説明できる。

4.1　慣性系における循環と渦度

4.1.1　絶対循環と絶対渦度

はじめに、慣性系（宇宙空間に固定した座標系）に立って大気の運動を眺めることにする。このとき慣性系から見た 3 次元速度場を第 1 章（第 1.4 節）と同様に$\boldsymbol{v}_I$として、この流れの中にある閉曲線 C をとり、その曲線に沿って$\boldsymbol{v}_I$を反時計回りに線積分した

$$\Gamma_a = \oint_C \boldsymbol{v}_I \cdot d\boldsymbol{r} = \oint_C |\boldsymbol{v}_I| \cos\alpha \cdot ds \qquad (4.1.1)$$

を、**絶対循環**（absolute circulation）と呼ぶ。ここで、最右辺のαは閉曲線Cに沿った線素$d\boldsymbol{r}$と速度ベクトル$\boldsymbol{v}_I$のなす角であり（図 4.1 参照）、dsのsは閉曲線の弧長を表す。第 3 章の自然座標系のように閉曲線に沿った単位ベクトルを$\boldsymbol{e}$とすれば、$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}ds$ なので、上のように表すことができる。

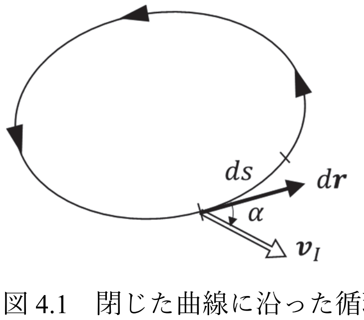


図 4.1　閉じた曲線に沿った循環。

同じく慣性系から見た 3 次元速度場$\boldsymbol{v}_I$に対して、

$$\boldsymbol{\omega}_a \equiv \nabla \times \boldsymbol{v}_I \qquad (4.1.2)$$

で定義されるベクトル量$\boldsymbol{\omega}_a$を**絶対渦度**（absolute vorticity）と呼ぶ。直交直線座標系における$\boldsymbol{v}_I$の成分をu_I、v_I、w_Iとすると、$\boldsymbol{\omega}_a$の 3 成分は、

$$\omega_{ax} = \frac{\partial w_I}{\partial y} - \frac{\partial v_I}{\partial z}, \quad \omega_{ay} = \frac{\partial u_I}{\partial z} - \frac{\partial w_I}{\partial x}, \quad \omega_{az} = \frac{\partial v_I}{\partial x} - \frac{\partial u_I}{\partial y} \tag{4.1.3}$$

で与えられる。この定義よりただちに

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}_a = \frac{\partial \omega_{ax}}{\partial x} + \frac{\partial \omega_{ay}}{\partial y} + \frac{\partial \omega_{az}}{\partial z} = 0 \tag{4.1.4}$$

が成り立つこと、すなわち渦度場は非発散ベクトル場であることがわかる。

絶対循環の定義式 (4.1.1) にストークスの定理を適用すると、

$$\Gamma_a = \oint_C \boldsymbol{v}_I \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_D \nabla \times \boldsymbol{v}_I \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iint_D \boldsymbol{\omega}_a \cdot \boldsymbol{n} d\sigma \tag{4.1.5}$$

となり、循環は閉曲線 C が囲む面に対する$\boldsymbol{\omega}_a$の面積分としても計算できることがわかる。$d\boldsymbol{\sigma}$ はCで囲まれた曲面Dの微小部分の面積 $d\sigma$ に単位法線ベクトル$\boldsymbol{n}$をかけたものである。逆に言うと、渦度は循環の微分形であると考えられる。

なお、慣性系における風ベクトル $\boldsymbol{v}_I$ は絶対速度（absolute velocity）とも呼ばれるが、$\boldsymbol{v}_a$の表記は非地衡風（ageostrophic wind、第 3 章・第 5 章参照）にも用いられるので、本章では第 1 章と同様に$\boldsymbol{v}_I$で表す。

【事例 1】 一定の角速度で剛体回転している流体

流体の回転軸をz方向とし、直交直線座標（慣性系）(x, y, z) を取る。この時回転の角速度ベクトルは$\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \Omega)$と表せる。また、初期時刻 $t = 0$ において位置$\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ にあった流体粒子の時刻 t における位置 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ は、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega t & -\sin \Omega t & 0 \\ \sin \Omega t & \cos \Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

により与えられる。これより時刻tに位置 (x, y, z) にあって剛体回転している流体粒子の速度 $\boldsymbol{v}_I = (u, v, w)$ は、

$$\boldsymbol{v}_I = \begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \\ dz/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Omega(x_0 \sin \Omega t + y_0 \cos \Omega t) \\ \Omega(x_0 \cos \Omega t - y_0 \sin \Omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Omega y \\ \Omega x \\ 0 \end{pmatrix}$$

と表される。これは第 1 章で既出の $\boldsymbol{v}_I = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}$ と同じである。これより、

$$\boldsymbol{\omega}_a = \nabla \times \boldsymbol{v}_I = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\Omega y \\ \Omega x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\Omega \end{pmatrix}$$

が得られる。すなわち剛体回転する液体の渦度は、回転軸の方向を向くベクトルで、その大きさは流体のいたるところで回転の角速度の 2 倍である。

【事例 2】 東西流に南北シアーがある場合

流速ベクトルが $\boldsymbol{v}_I = (u(y), 0, 0)$ で与えられる場を考える。すなわちx軸に平行な水平流で、その速さがy方向に変化している場合、定義に従って渦度を計算すると、

$$\boldsymbol{\omega}_a = \nabla \times \boldsymbol{v}_I = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u(y) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$$

が得られる。すなわち、流れが直線的であっても、流れに垂直な方向に流速が変化していれば、渦度は存在する。図 4.2 のように強風軸があるとその両側で水平シアーの符号が変わるので、渦度のz成分は強風軸で 0 で、その北側では正、南側は負となる。

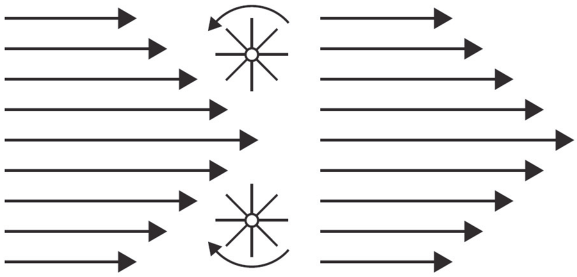


図 4.2　南北シアーのある東西流。（Holton and Hakim 2012）

【自然座標系で表した渦度】

水平運動する流体の速度を$\boldsymbol{V} = (u, v, 0)$、$V = |\boldsymbol{V}|$、渦度を$\boldsymbol{\omega} = (0,0,\omega)$ とする（$\omega = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y$）。図 4.3 のように正の曲率を持った 2 本の流線に挟まれた領域の周囲の循環を考える。第 3 章で扱ったように、流線に沿った長さをs、流線に垂直な方向の長さをn（流れの方向に対して左向きを正）とする。この領域の下辺における速度をVとすると、上辺では速度は$V + (\partial V/\partial n)\delta n$ と表され、速度ベクトルの方向は上辺・下辺とも同じである。流線が曲率を持つために、上辺と下辺の長さが異なっており、上辺の長さがδsであれば下辺は$\delta s + d(\delta s) = \delta s + \delta\beta\delta n$と表される。$\delta\beta$は流れに沿って$\delta s$進んだ際の方位角の変化で、$d(\delta s) = \delta\beta\delta n$は流れの方向の変化によって生じる長さの差である。従って、この領域の周囲の循環を計算するには、下辺での寄与分と上辺での寄与分としてそれぞれ速度と長さの積を計算して

$$\Gamma_a = \oint_C \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{r} = V(\delta s + \delta\beta\delta n) - \left(V + \frac{\partial V}{\partial n}\delta n\right)\delta s = V\delta\beta\delta n - \frac{\partial V}{\partial n}\delta n\delta s \tag{4.1.6}$$

渦度ωを循環Γ_aの微分形と考えると、

$$\omega = \lim_{\delta n\delta s \to 0}\left(\frac{\Gamma_a}{\delta n\delta s}\right) = V\frac{\delta\beta}{\delta s} - \frac{\partial V}{\partial n} \tag{4.1.7}$$

となる。ここで、流線の曲率半径（第 3 章参照）をRとすると、$\delta\beta = \delta s/R$と表せるので、

$$\omega = \frac{V}{R} - \frac{\partial V}{\partial n} \tag{4.1.8}$$

と書ける。右辺第 1 項は流線の方向の変化に関する成分で、**曲率渦度**と呼ばれる。第 2 項は曲率とは関係なく、風向に垂直な方向の風速シアーによる成分で、**シアー渦度**と呼ばれる。【事例 2】で流れに曲率がなくても 0 でない渦度が計算されるのは、このシアー渦度の成分による。

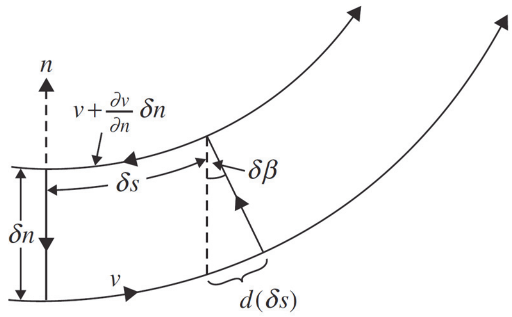


図 4.3　曲率を持った流れにおける循環の、自然座標系による計算。（Holton and Hakim 2012）

4.1.2 絶対循環の時間変化とケルビンの循環定理

次に、絶対循環の時間変化を考える。循環を計算するための閉曲線 C は空気塊に固定されていると考える。これにより、空気塊の運動に伴って閉曲線 C も移動・変形していくと考える（これをここでは実体閉曲線と呼ぶ）。このような設定の下で、慣性系において絶対循環の時間変化を計算すると、

$$\frac{d\Gamma_a}{dt} = \frac{d}{dt}\oint_C \boldsymbol{v}_I \cdot d\boldsymbol{r} = \oint_C \frac{d\boldsymbol{v}_I}{dt}\cdot d\boldsymbol{r} + \oint_C \boldsymbol{v}_I \cdot \frac{d}{dt}(d\boldsymbol{r})$$

右辺第 2 項の $d(d\boldsymbol{r})/dt$ は線素の長さの変化で、線素両端の速度差 $d\boldsymbol{v}_I$ に等しいことを考慮すると、

$$\frac{d\Gamma_a}{dt} = \oint_C \frac{d\boldsymbol{v}_I}{dt}\cdot d\boldsymbol{r} + \oint_C \boldsymbol{v}_I \cdot d\boldsymbol{v}_I = \oint_C \frac{d\boldsymbol{v}_I}{dt}\cdot d\boldsymbol{r} + \oint d\left(\frac{|\boldsymbol{v}_I|^2}{2}\right) = \oint_C \frac{d\boldsymbol{v}_I}{dt}\cdot d\boldsymbol{r} \tag{4.1.9}$$

が成り立つ。

ここで、慣性系における運動方程式は、第 1 章で、

$$\frac{d\boldsymbol{v}_I}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\Phi + \boldsymbol{F_r} \tag{4.1.10}$$

であった。∇ は三次元の勾配を表し、Φはジオポテンシャル、$\boldsymbol{F_r}$は摩擦力である。これを (4.1.9) に代入すると、

$$\frac{d\Gamma_a}{dt} = -\oint_C \frac{1}{\rho}\nabla p \cdot d\boldsymbol{r} - \oint_C \nabla\Phi \cdot d\boldsymbol{r} + \oint_C \boldsymbol{F_r}\cdot d\boldsymbol{r} \tag{4.1.11}$$

が得られる。この右辺第 2 項は勾配ベクトルの線積分であり、閉曲線 C に沿って一周積分すれば 0 となる。また右辺第 1 項についてはストークスの定理を適用し、

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right) = -\frac{1}{\rho^2}\nabla\rho \times \nabla p + \frac{1}{\rho}\nabla \times \nabla p = -\frac{1}{\rho^2}\nabla\rho \times \nabla p$$

にも注意して変形すると、

$$\frac{d\Gamma_a}{dt} = \iint_D \frac{\nabla\rho \times \nabla p}{\rho^2} \cdot \boldsymbol{n} d\sigma + \oint_C \boldsymbol{F_r} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{4.1.12}$$

となる。$\boldsymbol{n}$は閉曲線 C で囲まれた領域 D の法線ベクトルである。また $\nabla p \cdot d\boldsymbol{r} = dp$ であることも考慮すると、(4.1.11) の右辺第 1 項は別の形に変形できて、

$$\frac{d\Gamma_a}{dt} = -\oint_C \frac{dp}{\rho} + \oint_C \boldsymbol{F_r} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{4.1.13}$$

となる。

(4.1.12) と(4.1.13) において、右辺第 2 項は摩擦の効果を表し、その時点での循環を弱めるように働くもので、正負どちらの値も取りうる。(4.1.12) の右辺第 1 項は等密度面と等圧面の関係を表し、等圧面と等密度面（または等温面）が一致する場合には 0 となる。(4.1.13) の右辺第 1 項でも、流体の密度が一定または p だけの関数なら 0 となる。従って、これらの右辺第 1 項は、順圧性か傾圧性か（第 3 章）の違いを表す。これらの式から、摩擦が無視でき、順圧なら、実体閉曲線に沿った絶対循環が保存されることがわかる。これを**ケルビンの循環定理**（Kelvin’s circulation theorem）という。ケルビンの循環定理から、同じ条件の下で絶対渦度が不生不滅であること（**ラグランジュの渦定理**：Lagrange's vortex theorem）を導くことができる。さらに、ケルビンの循環定理を大気の運動に当てはめると、順圧大気で摩擦が無視できる場合、流体とともに運動する閉曲線に沿った絶対循環は保存されることがわかる。

4.1.3 傾圧ベクトル

絶対循環の時間変化を表す (4.1.12) 式

$$\frac{d\Gamma_a}{dt} = \iint_D \frac{\nabla\rho \times \nabla p}{\rho^2} \cdot \boldsymbol{n} d\sigma + \oint_C \boldsymbol{F_r} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{4.1.12}$$

において、右辺第 1 項に現れるベクトル

$$\boldsymbol{S} \equiv \frac{\nabla\rho \times \nabla p}{\rho^2} \tag{4.1.14}$$

は、等密度面と等圧面の位置関係から決まるベクトルで、**傾圧ベクトル**（baroclinic vector）または**ソレノイド**（solenoid）呼ばれる。面D上の傾圧ベクトルの法線成分の面積分が正であれば、閉曲線Cを回る正の循環（すなわち反時計回りの回転）が強まることを示している。

傾圧大気の鉛直断面において、図 4.4 のような位置関係で等密度面と等圧面が交差している場合、傾圧ベクトル$\boldsymbol{S}$と面Dの法線ベクトル$\boldsymbol{n}$の向きは共に図面奥から手前の方へ向くので、

$$\frac{d\Gamma_a}{dt} = \iint_D \frac{\nabla\rho \times \nabla p}{\rho^2} \cdot \boldsymbol{n} d\sigma = \iint_D \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{n} d\sigma > 0$$

となり、閉曲線Cを反時計回りに回る循環が強化されることが示される（摩擦の効果は無視している）。これを、

$$\iint_D \frac{\nabla\rho \times \nabla p}{\rho^2} \cdot \boldsymbol{n} d\sigma = -\oint_C \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\boldsymbol{r} = -\oint_C \frac{dp}{\rho}$$

の関係により読み替えると、Cに沿った線積分は、図の右半分におけるpの増大に逆行する積分の方が、図の左半分のpの増大に順行する積分より、値が大きくなる。実際、等圧面上の密度は図の左側のほう

が大きいため、その逆数である$1/\rho$の積分は図の右側の方が大きい。ここから、$d\Gamma_a/dt > 0$ であることが言える。この例からわかるように、傾圧ベクトルによる循環の効果は、等密度面と等圧面を一致させる向き（すなわち傾圧性を緩和する方向）に生じることがいえる。

上の例では鉛直断面における循環を考えているが、水平面における循環を考えることもできる。またここでは密度を考えているが、状態方程式を考慮すると、密度の代わりに温度を用いることもできる。すると、平面上で等圧線と等温線が一致しない場合にはそれらを一致させる向きに循環が生じるとも言える。これは、（地衡風による）水平温度移流がある場合に、それを緩和するような方向への循環が生じることを意味する（第 5 章参照）。

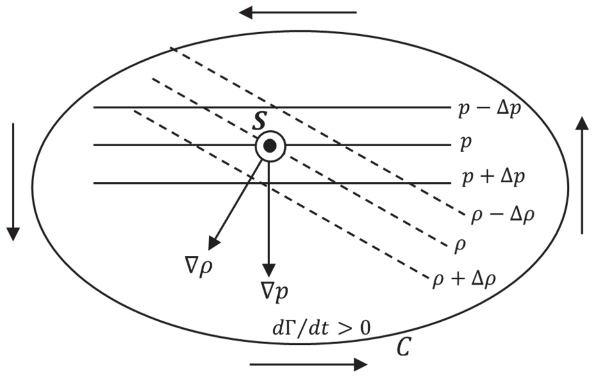


図 4.4　流体の鉛直断面における、傾圧ベクトル$\boldsymbol{S}$による循環（渦）の生成。等圧面（実線）と等密度面（破線）が一致しない場合、等密度面を等圧面に一致させる方向の循環が強化される。

【事例】 海風の強化

ここでは例として、図 4.5 のように、海岸に垂直な面内の海風の循環を考える。これは水平スケールが小さいので、地球自転の影響を考える必要がなく、慣性系と同様に考えることができる。いま、$p_0 =$ 1000 hPa、$p_1 =$ 900 hPa、$\overline{T_2} - \overline{T_1} =$ 10℃、$L =$ 20 km、$h =$ 1 km とし、閉じた実線に沿った循環を考える。摩擦は無視し、状態方程式を使うと、(4.1.13) 式は

$$\frac{d\Gamma_a}{dt} = -\oint_C RTd\ln p$$

と変形できる。図における横方向の運動は気圧pが一定なので、循環の計算は鉛直方向の運動だけを考えれば良い。すると以下のように計算できる。

$$\frac{d\Gamma_a}{dt} = R\ln\left(\frac{p_0}{p_1}\right)(\overline{T_2} - \overline{T_1})$$

循環の経路の長さは $2(h + L)$ なので、この循環における平均速度を $\langle v\rangle$ とするとその増大は

$$\frac{d\langle v\rangle}{dt} = \frac{R\ln(p_0/p_1)}{2(h + L)}(\overline{T_2} - \overline{T_1})$$

で計算できる。

これにより、例えば 1 時間後の風速増大を計算してみると、かなり大きな値が計算されるだろう。

現実には、摩擦により加速度は減じられ、また温度移流により水平温度傾度を弱める効果も働くので、ここで計算された通りに風速が増大することはない。

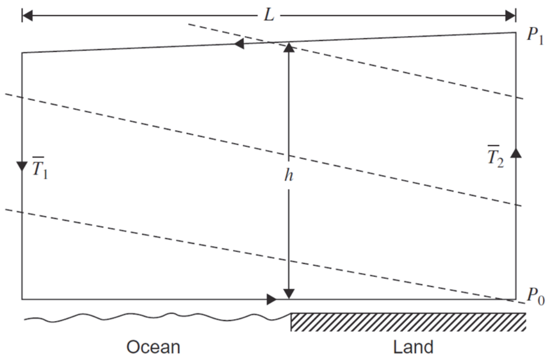


図 4.5　海風の問題への循環理論の応用として、閉じた実線に沿った循環を考える。破線は密度の等値線である。（Holton and Hakim 2012）

4.1.4 慣性系における渦度方程式

前項の絶対循環の時間変化に続き、ここでは慣性系における絶対渦度の時間変化について考える。最初に慣性系における運動方程式（第 1 章）

$$\frac{d\boldsymbol{v}_I}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\Phi + \boldsymbol{F_r} \tag{4.1.15}$$

を考える。左辺のラグランジュ微分を展開すると、

$$\frac{d\boldsymbol{v}_I}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}_I}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_I \cdot \nabla)\boldsymbol{v}_I$$

である。この右辺第 2 項は、ベクトル解析の公式（第 1 章付録 1C）を用いて

$$(\boldsymbol{v}_I \cdot \nabla)\boldsymbol{v}_I = \frac{1}{2}\nabla|\boldsymbol{v}_I|^2 + (\nabla \times \boldsymbol{v}_I) \times \boldsymbol{v}_I$$

と変形できる。すると、運動方程式 (4.1.15) は絶対渦度$\boldsymbol{\omega}_a = \nabla \times \boldsymbol{v}_I$ も使って

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_I}{\partial t} + \boldsymbol{\omega}_a \times \boldsymbol{v}_I = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\left(\Phi + \frac{1}{2}|\boldsymbol{v}_I|^2\right) + \boldsymbol{F_r}$$

と書ける。この両辺に $\nabla\times$ を作用させると、

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_a}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega}_a \times \boldsymbol{v}_I) = \frac{\nabla\rho \times \nabla p}{\rho^2} + \nabla \times \boldsymbol{F_r} \tag{4.1.16}$$

が得られる（$\nabla \times \nabla = 0$ に注意）。さらにベクトル解析の公式（付録 1C）と $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}_a = 0$ を用いると、

$$\begin{aligned}\nabla \times (\boldsymbol{\omega}_a \times \boldsymbol{v}_I) &= (\nabla \cdot \boldsymbol{v}_I)\boldsymbol{\omega}_a + (\boldsymbol{v}_I \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega}_a - (\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}_a)\boldsymbol{v}_I - (\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla)\boldsymbol{v}_I \\ &= (\nabla \cdot \boldsymbol{v}_I)\boldsymbol{\omega}_a + (\boldsymbol{v}_I \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega}_a - (\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla)\boldsymbol{v}_I \end{aligned} \tag{4.1.17}$$

が得られるので、これと (4.1.16) から、慣性系における**渦度方程式**

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}_a}{dt} = -(\nabla \cdot \boldsymbol{v}_I)\boldsymbol{\omega}_a + (\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla)\boldsymbol{v}_I + \frac{\nabla\rho \times \nabla p}{\rho^2} + \nabla \times \boldsymbol{F_r} \tag{4.1.18}$$

が得られる。(4.1.18) の右辺第 1 項は流れの発散の効果、第 3 項は傾圧ベクトル、第 4 項は摩擦の効果を表す。

(4.1.18) の右辺第 2 項に関しては、それを理解するためにz軸を$\boldsymbol{\omega}_a$の方向と一致するように取り、$\boldsymbol{v}_I = (u_I, v_I, w_I)$, $\boldsymbol{\omega}_a = (0, 0, \omega_{az})$ と成分表示すると、

$$(\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla)\boldsymbol{v}_I = \omega_{az}\frac{\partial u_I}{\partial z}\boldsymbol{i} + \omega_{az}\frac{\partial v_I}{\partial z}\boldsymbol{j} + \omega_{az}\frac{\partial w_I}{\partial z}\boldsymbol{k}, \qquad \omega_{az} = \frac{\partial v_I}{\partial x} - \frac{\partial u_I}{\partial y}$$

と表すことができる。座標軸をこのように取ったうえで、摩擦のない順圧大気の運動を考えているとして (4.1.18) 式の傾圧ベクトル項と摩擦項（右辺第 3 項と第 4 項）を省略し、残った右辺第 1 項と第 2 項をまとめなおすと、順圧大気の渦度方程式として

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}_a}{dt} = -\,\omega_{az}\left(\frac{\partial u_I}{\partial x} + \frac{\partial v_I}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} + \omega_{az}\left(\frac{\partial u_I}{\partial z}\boldsymbol{i} + \frac{\partial v_I}{\partial z}\boldsymbol{j}\right) \tag{4.1.19}$$

と書き直すことができる。(4.1.19) の右辺第 1 項は、絶対渦度ベクトルに直交する面内（x-y平面）における 2 次元発散に関連しているので、**発散項**（divergence term）と呼ぶ。これは空気塊が水平方向に拡大することに伴って渦度が減少し、逆に水平方向に収縮する場合には渦度が増大することを表す。また第 2 項は、渦度ベクトルの方向（$\boldsymbol{k}$方向）に流速シアー（$\partial u_I/\partial z, \partial v_I/\partial z$）があることにより、渦度ベクトルに直交する方向 $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ での渦度の新たな成分 $(\omega_{ax}, \omega_{ay})$ として見えるようになる効果を表す。これを**傾斜項**（tilting term）またはねじれ項（twisting term）と呼ぶ（図 4.6)。これらにより、もし流れが順圧的で摩擦が無視できるなら、流れに沿った渦度の時間変化は、渦度ベクトルに直交する平面での流れの局所的な収束・発散と、渦度ベクトルが傾く効果のみにより生じることがわかる。ただし、密度一定の場合を除くと、$d\boldsymbol{\omega}_a/dt = 0$ と書くことはできないので、渦度自体は保存量ではない。

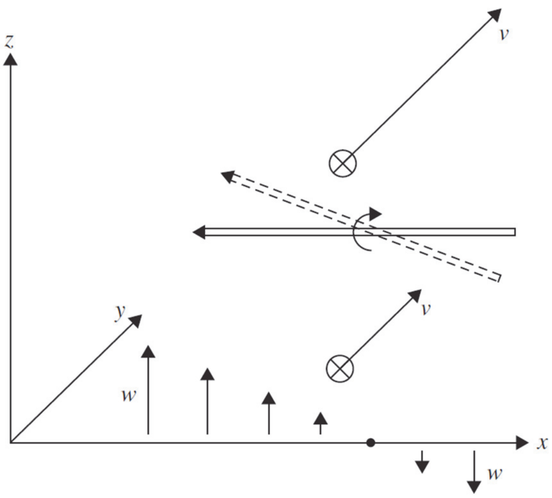


図 4.6　渦度方程式の傾斜項の説明。v成分の風の鉛直シアーにより、x軸方向の渦度ベクトル（白抜き矢印）がある。そこに鉛直風（w）のx方向のシアーがあることにより、渦度ベクトルが立ち上がる方向に向きを変える。（Holton and Hakim 2012）

4.1.5　渦線と渦管

ある時刻において、接線の方向がその点における渦度ベクトルと一致する曲線を、**渦線**（vortex line）

と呼ぶ。また流れの中に一つの閉曲線を取り（例えば図 4.7 中のC)、その閉曲線内の各点を通る渦線の群れによって形成される管を**渦管**（vortex tube）と呼ぶ。渦線や渦管は実体を持ったものではないが、流体の運動を考える際に仮想的に使用される。

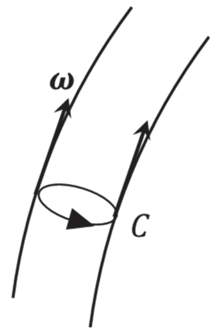


図 4.7　渦管の模式図。

ここでは栗原（1979）に基づき、まず順圧大気について、渦線、及び渦管の強さが保存されることを述べる。図 4.8 で、$t = 0$ における渦線に着目する。この瞬間において渦線と一致した実体曲線 L を取り、その上の微小な線素PQを$\delta\boldsymbol{r}$で表す。この時刻には$\delta\boldsymbol{r}$は$\boldsymbol{\omega}_a$と同じ方向を向いているので、

$$\delta\boldsymbol{r} = \varepsilon\boldsymbol{\omega}_a \tag{4.1.20}$$

と書ける。εは比例係数である。この実体線 L を追跡してΔt時間後の位置が分かったとして、線素PQが線素P'Q'へ移動したとすると、P'Q'は $\delta\boldsymbol{r} + [d(\delta\boldsymbol{r})/dt]\Delta t$ と表せる。またP'における渦度は、$\boldsymbol{\omega}_a + [d\boldsymbol{\omega}_a/dt]\Delta t$ である。このベクトルがP'Q'の方向と一致しているか否かを見るには、ベクトル外積

$$\left[\boldsymbol{\omega}_a + \frac{d\boldsymbol{\omega}_a}{dt}\Delta t\right] \times \left[\delta\boldsymbol{r} + \frac{d(\delta\boldsymbol{r})}{dt}\Delta t\right] \tag{4.1.21}$$

が 0 になるかどうかを調べれば良い。この式を展開して Δt の 2 次の項を省略すると、(4.1.20) より $\boldsymbol{\omega}_a \times \delta\boldsymbol{r} = 0$ であることから、

$$\left[\boldsymbol{\omega}_a + \frac{d\boldsymbol{\omega}_a}{dt}\Delta t\right] \times \left[\delta\boldsymbol{r} + \frac{d(\delta\boldsymbol{r})}{dt}\Delta t\right] = \left[\boldsymbol{\omega}_a \times \frac{d(\delta\boldsymbol{r})}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}_a}{dt} \times \delta\boldsymbol{r}\right]\Delta t \tag{4.1.22}$$

と書ける。ここで、

$$\frac{d(\delta\boldsymbol{r})}{dt} = \delta\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \delta\boldsymbol{v}_I = (\delta\boldsymbol{r}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_I = \varepsilon(\boldsymbol{\omega}_a\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_I \tag{4.1.23}$$

である（$\delta\boldsymbol{v}_I$からの式変形は、ベクトル$\boldsymbol{v}_I$の始点と終点の変化を考える)。これにより、(4.1.22) の右辺の大括弧内の第 1 項は

$$\boldsymbol{\omega}_a \times \frac{d(\delta\boldsymbol{r})}{dt} = \varepsilon\boldsymbol{\omega}_a \times [(\boldsymbol{\omega}_a\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_I] \tag{4.1.24}$$

となる。一方、順圧で摩擦のない場合の絶対渦度の時間変化は、(4.1.18) より

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}_a}{dt} = -(\nabla\cdot\boldsymbol{v}_I)\boldsymbol{\omega}_a + (\boldsymbol{\omega}_a\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_I$$

なので、(4.1.22) の右辺の大括弧内の第 2 項は、(4.1.20) より$\boldsymbol{\omega}_a \times \delta\boldsymbol{r} = 0$ であることも使うと

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}_a}{dt} \times \delta \boldsymbol{r} = [(\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla)\boldsymbol{v}_I] \times \delta \boldsymbol{r} = \varepsilon[(\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla)\boldsymbol{v}_I] \times \boldsymbol{\omega}_a \tag{4.1.25}$$

となる。(4.1.24) と (4.1.25) から、(4.1.22) は 0 となる。これにより、図 4.8 の実体線 L はΔt時間後もやはり渦線であると言える。言い換えると、順圧大気中では、渦線の上にあった空気粒子はいつまでも同じ渦線の上にあると言える。

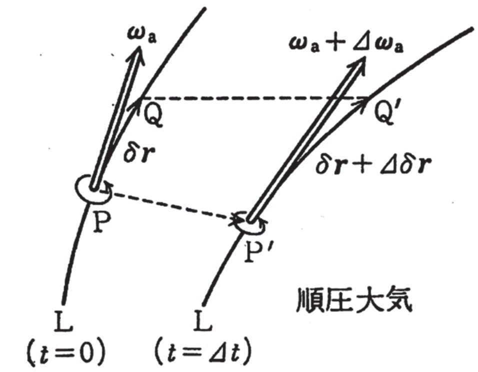


図 4.8　順圧大気中の渦線の変化の模式図。（栗原 1979）

これに対して、傾圧大気中ではこのような渦線の保存は成り立たない。傾圧大気中では、Δt時間の間に傾圧ベクトルにより渦線の方向が変わってしまうからである。そのため、図 4.9 に示すように、$t = 0$に渦線と実体線が一致していても、Δt時間後には両者は一致しない。

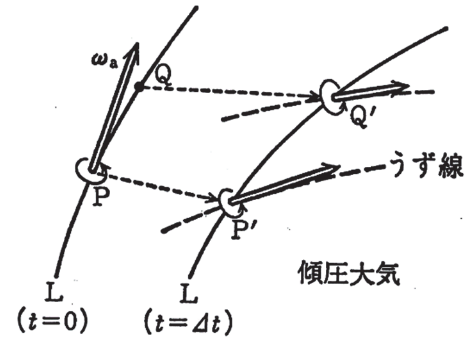


図 4.9　傾圧大気中の渦線の変化の模式図。（栗原 1979）

次に、図 4.10 のように、時刻 $t = 0$ に渦線で囲まれた渦管を考える。定義より、$\boldsymbol{\omega}_a$は渦管の側面を貫くことはない。また$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}_a = 0$なので、渦管の断面積を$A$とすると、渦管に沿って$|\boldsymbol{\omega}_a|A$が一定になる。これを渦管の強さという。渦管の表面に沿って管を 1 周する実体閉曲線をとると、この閉曲線に関する絶対循環の大きさは $|\boldsymbol{\omega}_a \cdot d\boldsymbol{\sigma}|$ で（$d\boldsymbol{\sigma}$は閉曲線で作られた面の面積に比例する大きさを持ち、その面に垂直なベクトル）、$|\boldsymbol{\omega}_a \cdot d\boldsymbol{\sigma}| = |\boldsymbol{\omega}_a|A$ である。

順圧大気においては実体閉曲線についての循環が保存され、さらに渦線の保存により、実体閉曲線は時間が経過しても初めと同じ渦管の上を 1 周している。このことは、順圧大気においては渦管の強さが保存されることを意味する。すなわち図 4.10 において $|\boldsymbol{\omega}_a|A = |\boldsymbol{\omega}'_a|A'$ である。

順圧大気において、渦管が流体の運動に従って移動・変形し、しかもその強さは一定不変であること

は、**ヘルムホルツの渦定理**（Helmholtz's theorems）として示されている。

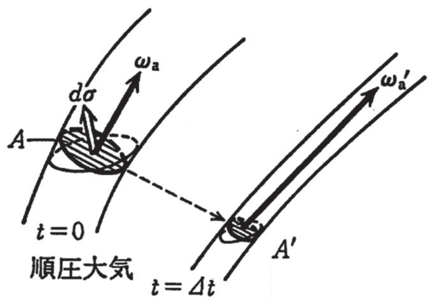


図 4.10　順圧大気における渦管の保存の模式図。（栗原 1979）

4.2 エルテルの渦位

摩擦のない順圧流体では循環や渦管が流れに沿って保存するが、傾圧性があると保存されないことが示された。しかし、循環や渦度の時間変化を支配する法則と、質量保存則（連続の式）及び熱力学方程式を結合させて、新たに定義する渦位（potential vorticity）が流れに沿って保存することは示すことができる。しかも、渦位は順圧とは限らない一般の傾圧流体においても保存則を満たす。ここではエルテル（Ertel）の渦位と呼ばれる一般的な渦位の保存則を導く。

4.2.1 傾圧大気における渦管と渦位

順圧でない場合、渦度・循環は保存しないが、傾圧の場合でも断熱であれば特定の条件を満たした面上に取った閉曲線の循環が保存することを考える。絶対循環の時間変化は、(4.1.12) 及び (4.1.13) において摩擦を無視すると、

$$\frac{d\Gamma_a}{dt} = \iint_D \frac{\nabla\rho \times \nabla p}{\rho^2} \cdot \boldsymbol{n} d\sigma = -\oint_C \frac{dp}{\rho} \tag{4.2.1}$$

であった。傾圧大気においては、傾圧ベクトルのため、任意に取った実体閉曲線については絶対循環は一般に保存しない。しかし、閉曲線の中を傾圧ベクトルが貫かないように取ると、その瞬間の循環の変化は 0 である。そこで、常にそのような閉曲線を取れば、循環が保存される。いま、温位 $\theta = (p/\rho R) \cdot (p_0/p)^{R/C_p}$ を定義して（p_0は基準気圧）、循環を$\theta = \theta_0$ の等温位面上で取ると、密度は

$$\rho = (p/\theta_0 R) \cdot (p_0/p)^{R/C_p}$$

として気圧pのみの関数として表すことができるので、(4.2.1) 式の右辺は 0 となる。断熱過程では温位はラグランジュ的に保存するため、ある時刻に等温位面上の流体粒子を結んで閉曲線Cを取った場合、閉曲線Cは常に同じ等温位面上に存在する。すなわち、断熱過程の場合、等温位面上に任意に取った閉曲線の絶対循環は保存される。一方、(4.1.5) において、絶対循環は

$$\Gamma_a = \oint_C \boldsymbol{v}_I \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_D \nabla \times \boldsymbol{v}_I \cdot \boldsymbol{n} d\sigma = \iint_D \boldsymbol{\omega}_a \cdot \boldsymbol{n} d\sigma$$

であった。ここでは閉曲線Cと断面Dを温位θ_0の等温位面上に取ることになる。すると、$\boldsymbol{n}$は等温位面に

垂直な単位ベクトルなので

$$\boldsymbol{n} = \frac{\nabla\theta}{|\nabla\theta|} \tag{4.2.2}$$

と書ける。

ここで、図 4.11 のように、θ_0 と $\theta_0 + \Delta\theta$ の 2 つの等温位面を貫く渦管を考える。渦管と等温位面の交わる面積をAとすれば、絶対循環の保存は、

$$\Gamma_a = \boldsymbol{\omega}_a \cdot \boldsymbol{n}A = \frac{\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla\theta}{|\nabla\theta|}A = 一定 \tag{4.2.3}$$

と言える。温位傾度の大きさ$|\nabla\theta|$を、2 つの等温位面の距離hと温位差$\Delta\theta$で表すと、

$$|\nabla\theta| = \Delta\theta/h \tag{4.2.4}$$

である。断熱では、渦管が 2 つの等温位面で挟まれた部分の質量Mは保存されるはずで、質量保存則

$$M = \rho Ah = 一定 \tag{4.2.5}$$

が成り立つはずである。すると (4.2.3) 式は

$$\Gamma_a = \frac{\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla\theta}{|\nabla\theta|}A = \frac{\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla\theta}{\Delta\theta}hA = \frac{\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla\theta}{\rho}\frac{M}{\Delta\theta} = 一定 \tag{4.2.6}$$

であり、定義より$\Delta\theta$は一定なので、結局、

$$\frac{\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla\theta}{\rho} \equiv P = 一定 \tag{4.2.7}$$

が言える。このPを、**エルテルの渦位**（Ertel's potential vorticity）と呼ぶ。

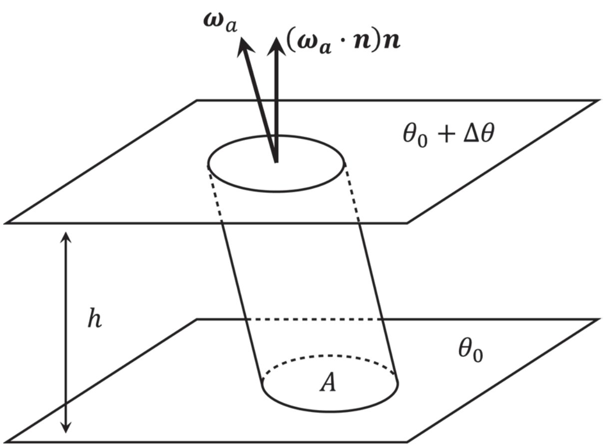


図 4.11　2 つの等温位面（θ_0 と $\theta_0 + \Delta\theta$）を貫く渦管の模式図。

次に、図 4.12 のように温位差 $\Delta\theta$ を持つ 2 つの等温位面に挟まれた渦管の運動を考える。気体の運動が断熱的で、摩擦の影響が無視できるとき、空気塊はその温位を保存する。2 つの等温位面の間に挟まれた微小な気柱を考えるなら、その下部は常に下側の等温位面（θ）に沿い、一方で気柱の上部は上側の等温位面（$\theta + \Delta\theta$）に沿って運動し、その中間部分は常に 2 つの等温位面に挟まれて運動するこ

とになる。またこのとき気柱に含まれる気体の質量の保存 (4.2.5) 式を考えると、気柱は図 4.12 のように等温位面の間を伸縮しながら運動していることになる。

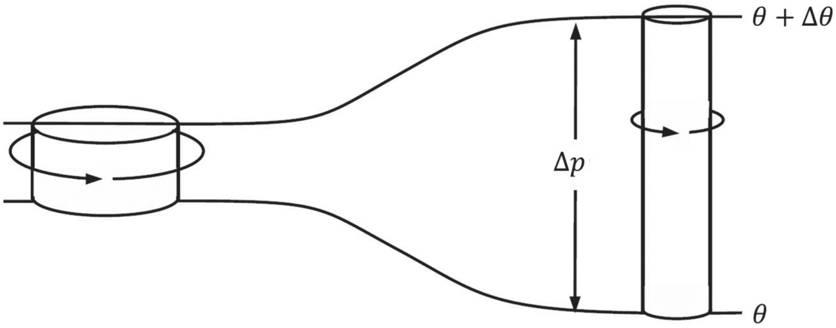


図 4.12　渦位を保存しながら断熱的に運動する円筒状の気柱。（Holton and Hakim (2012)を改変）

この気柱の伸縮に応じて内部の渦度がどう変化するかを、絶対渦度ベクトルの等温位面に垂直な成分 $\omega_\theta = \boldsymbol{\omega}_a \cdot \boldsymbol{n}$ を用いて今一度考える。(4.2.3) 式より $\boldsymbol{\omega}_a \cdot \boldsymbol{n}A$ が一定であったので、

$$\omega_\theta A = 一定 \tag{4.2.8}$$

が言える。この両辺を質量Mで除してさらに質量保存則 (4.2.5) を使うと

$$\frac{\omega_\theta A}{M} = \frac{\omega_\theta}{\rho h} = 一定 \tag{4.2.9}$$

が得られる。ここで、2 つの等温位面の間隔hとその温位差$\Delta\theta$、及び温位傾度ベクトル$\nabla\theta$の間の関係を表した (4.2.4) 式を使い、また$\Delta\theta$が定数であることを考慮すると

$$\frac{\omega_\theta A}{M}\Delta\theta = \frac{\omega_\theta |\nabla\theta|}{\rho} = P = 一定 \tag{4.2.10}$$

が得られる。これは、$\boldsymbol{\omega}_a$ の等温位面に垂直な成分 ω_θ と、$\nabla\theta$ の大きさを用いて、エルテルの渦位Pを表し、またそれが保存されることを示したものにほかならない。そして (4.2.9) と (4.2.10) から、渦度の等温位面に垂直な成分 ω_θ は、気柱の断面積Aが増大するとき（すなわち気柱の長さhが縮むとき）に相対的に小さくなり、逆に、気柱の断面積が小さくなるとき（気柱が伸びるとき）に相対的に大きくなることがわかる。

4.2.2 渦度方程式からの渦位保存則の導出

ここでは渦度方程式から出発して、エルテルの渦位を導出する。まず、慣性系における渦度方程式 (4.1.18) を再掲する。

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}_a}{dt} = -(\nabla \cdot \boldsymbol{v}_I)\boldsymbol{\omega}_a + (\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla)\boldsymbol{v}_I + \frac{\nabla\rho \times \nabla p}{\rho^2} + \nabla \times \boldsymbol{F_r}$$

一方、連続の式（質量保存則）は

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}_I=0$$

であった。これらを用いると、$d(\boldsymbol{\omega}_a/\rho)/dt$ は、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho}\right)=\frac{1}{\rho}\frac{d\boldsymbol{\omega}_a}{dt}-\frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt}=\left(\frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{v}_I+\frac{1}{\rho^3}\nabla\rho\times\nabla p+\frac{1}{\rho}\nabla\times\boldsymbol{F_r} \tag{4.2.11}$$

と書ける。

次に、乾燥大気に関する熱力学第 1 法則を温位で表した式

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{\partial\theta}{\partial t}+\boldsymbol{v}_I\cdot\nabla\theta=\frac{J}{\Pi(p)}\,,\quad \Pi(p)=C_p\left(\frac{p}{p_0}\right)^{R/C_p} \tag{4.2.12}$$

を考える（第 1 章参照）。この式から

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla\theta+\nabla(\boldsymbol{v}_I\cdot\nabla\theta)=\nabla\left(\frac{J}{\Pi(p)}\right) \tag{4.2.13}$$

が得られる。この左辺第 2 項は、ベクトルの成分を用いて計算すると、

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{v}_I\cdot\nabla\theta)=\frac{\partial\boldsymbol{v}_I}{\partial x_i}\cdot\nabla\theta+(\boldsymbol{v}_I\cdot\nabla)\frac{\partial\theta}{\partial x_i}$$

となるので、(4.2.13) の各成分は

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}+\frac{\partial\boldsymbol{v}_I}{\partial x_i}\cdot\nabla\theta+(\boldsymbol{v}_I\cdot\nabla)\frac{\partial\theta}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{J}{\Pi(p)}\right)$$

と書け、この左辺第 1 項と第 3 項をラグランジュ微分で表すことができて

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}+\frac{\partial\boldsymbol{v}_I}{\partial x_i}\cdot\nabla\theta=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{J}{\Pi(p)}\right)$$

と書ける。すると (4.2.13) は結局

$$\frac{d}{dt}\nabla\theta=-\nabla\boldsymbol{v}_I\cdot\nabla\theta+\nabla\left(\frac{J}{\Pi(p)}\right) \tag{4.2.14}$$

となる。

ここで、(4.2.11) と (4.2.14) を用いて渦位の時間変化 $d(\boldsymbol{\omega}_a\cdot\nabla\theta/\rho)/dt$ を計算する。その際、

$$\nabla\theta\cdot(\boldsymbol{\omega}_a\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_I=\sum_{\boldsymbol{j}}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\left(\sum_{\boldsymbol{i}}\omega_i\frac{\partial v_{Ij}}{\partial x_i}\right)=\sum_{\boldsymbol{i}}\omega_i\left(\sum_{\boldsymbol{j}}\frac{\partial v_{Ij}}{\partial x_i}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\right)=\boldsymbol{\omega}_a\cdot(\nabla\boldsymbol{v}_I\cdot\nabla\theta)$$

にも注意すると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}_a\cdot\nabla\theta}{\rho}\right)&=\nabla\theta\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho}\right)+\frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho}\cdot\frac{d}{dt}\nabla\theta\\&=\frac{1}{\rho^3}(\nabla\rho\times\nabla p)\cdot\nabla\theta+\frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho}\cdot\nabla\left(\frac{J}{\Pi(p)}\right)+\frac{1}{\rho}\nabla\theta\cdot(\nabla\times\boldsymbol{F_r})\end{aligned} \tag{4.2.15}$$

が得られる。

この式の右辺第 1 項は、順圧大気であれば $\rho=\rho(p)$ より $\nabla\rho\times\nabla p=0$ なので 0 となることが容易に

わかるが、傾圧大気でもこの項は 0 となることが次のようにしてわかる。温位の定義式と状態方程式により、

$$\theta = T\left(\frac{p_0}{p}\right)^{R/C_p} = \frac{p}{\rho R}\left(\frac{p_0}{p}\right)^{R/C_p}$$

なので、$\theta = \theta(\rho, p)$ と表すことができる。従って、

$$\nabla\theta = \frac{\partial\theta}{\partial\rho}\nabla\rho + \frac{\partial\theta}{\partial p}\nabla p$$

となるので、傾圧大気でも $(\nabla\rho \times \nabla p)\cdot\nabla\theta = 0$ となる。従って、流れが順圧的であるか傾圧的であるかにかかわらず、常に

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla\theta}{\rho}\right) = \frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho}\cdot\nabla\left(\frac{J}{\Pi(p)}\right) + \frac{1}{\rho}\nabla\theta\cdot(\nabla\times\boldsymbol{F_r}) \tag{4.2.16}$$

が成立することになる。(4.2.16) で非断熱加熱率 J 及び摩擦力 $\boldsymbol{F_r}$ がなければ、すなわち断熱的で摩擦のない流れでは、(4.2.7) のエルテルの渦位

$$P = \frac{\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla\theta}{\rho}$$

がラグランジュ的に保存されることがわかる。その時間変化を表す (4.2.16) を渦位保存則と呼ぶ。

4.3 自転する地球上の渦の変化

循環と渦度について、前節までは、慣性系で見た絶対循環と絶対渦度を定義しその性質を調べた。しかし第 1 章の運動方程式などで見たように、地球上の大気の運動を議論するには、自転する地球に相対的な運動として記述した方が都合が良い。この節では、回転系における相対渦度と相対循環、及びそれを用いた渦度方程式について述べる。

4.3.1 相対渦度と惑星渦度

第 1 章と同様に、慣性系から見た地球上の空気塊の速度を$\boldsymbol{v}_I$、自転する地球上で見た（地面に相対的な）速度を$\boldsymbol{v}$とすると、

$$\boldsymbol{v}_I = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}$$

の関係がある。ここで、$\boldsymbol{\Omega}$は地球自転の角速度ベクトル、$\boldsymbol{r}$は地球の中心に相対的な空気塊の位置ベクトルである。さらに、これまで流れの絶対渦度を $\boldsymbol{\omega}_a \equiv \nabla\times\boldsymbol{v}_I$ で定義していたのと同様、上式の両辺の回転をとって

$$\nabla\times\boldsymbol{v}_I = \nabla\times\boldsymbol{v} + \nabla\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})$$

とし、右辺第 1 項の

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla\times\boldsymbol{v} \tag{4.3.1}$$

を**相対渦度**と呼ぶ。一方、右辺第 2 項 $\nabla\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})$ は、地球自転によって空気塊が持つ渦度ベクトルであり、ベクトル解析の公式（第 1 章付録 1C）も用いると、

$$\nabla\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}) = (\nabla\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{\Omega} + (\boldsymbol{r}\cdot\nabla)\boldsymbol{\Omega} - (\nabla\cdot\boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{r} - (\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{r} = 3\boldsymbol{\Omega} + 0 + 0 - \boldsymbol{\Omega} = 2\boldsymbol{\Omega} \tag{4.3.2}$$

である。これを**惑星渦度**と呼ぶ（導出は次項も参照）。これらを用いて、次の関係式が得られる。

$$\boldsymbol{\omega}_a = \boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\Omega} \tag{4.3.3}$$

すなわち絶対渦度は、自転する地球に固定した座標系における相対渦度$\boldsymbol{\omega}$と惑星渦度$2\boldsymbol{\Omega}$の和に等しい。

地球上の大気・海洋の場合、大規模運動に関しては、相対渦度の鉛直成分を単に渦度と呼ぶことが多い。第 1 章で見たように、地球の自転の角速度ベクトルを緯度φにおける局所直交直線座標の単位ベクトルを用いて表せば、

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega \cos\varphi\, \boldsymbol{j} + \Omega \sin\varphi\, \boldsymbol{k} \tag{4.3.4}$$

と表せるので、惑星渦度の鉛直成分の大きさは $2\Omega\sin\varphi$ である。よって、相対渦度の鉛直成分をζ（$= \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega}$）、絶対渦度の鉛直成分を$\eta$（$= \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega}_a$）と表せば、渦度の鉛直成分に関して

$$\eta = \zeta + 2\Omega\sin\varphi = \zeta + f \tag{4.3.5}$$

が成立する。すなわち、絶対渦度の鉛直成分は、相対渦度の鉛直成分ζにコリオリパラメータfを加えたものに等しい。

相対渦度の鉛直成分は、局所直交直線座標系やf平面近似では、

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

球座標系では

$$\zeta = \frac{1}{r\cos\varphi}\left[\frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{\partial}{\partial \varphi}(u\cos\varphi)\right]$$

と表せる（第 1 章の付録 1D を参照）。

相対渦度と惑星渦度の強さの比は、

$$\frac{|\zeta|}{2\Omega\sin\varphi} \sim \frac{U/L}{2\Omega\sin\varphi} = \frac{U}{fL} \equiv Ro$$

である。Roはロスビー数（第 3.4 節）で、中緯度における総観規模運動に関する代表的な水平スケールを $L = 10^6\,\mathrm{m}$、水平風速 $U = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ 、$f\sim 10^{-4}\,\mathrm{s^{-1}}$として見積もると、～0.1 である。すなわち総観規模現象では相対渦度よりも惑星渦度の方が大きい。ただし、風速がやや大きくなったり、水平スケールがやや小さくなると、両者は同程度になり、さらに小スケールの現象では相対渦度の方が大きくなる。従って、絶対渦度に占める相対渦度の大きさの寄与は、問題ごとによく吟味しておく必要がある。

4.3.2 相対循環とビヤークネスの循環定理

前項で見た絶対渦度と相対渦度に対応して、循環にも**絶対循環**と**相対循環**の区別が生じる。相対循環は

$$\Gamma = \oint_C \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \iint_D \nabla\times\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iint_D \boldsymbol{\omega}\cdot d\boldsymbol{\sigma} \tag{4.3.6}$$

で定義される。絶対循環Γ_aと相対循環Γの間には、

$$\Gamma_a = \oint_C (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \Gamma + \oint_C (\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} \tag{4.3.7}$$

の関係がある。右辺第 2 項は、惑星渦度に対応する循環で、ストークスの定理により、

$$\oint_C (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_D \nabla \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} \tag{4.3.8}$$

と書ける。

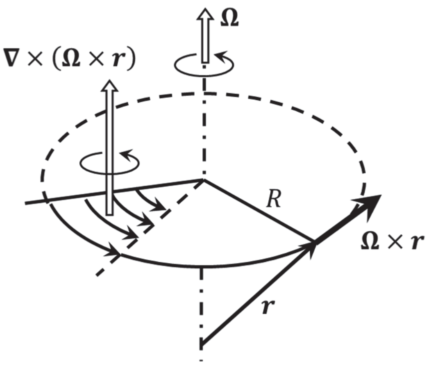


図 4.13　地球自転によって生じている渦度。（栗原（1979）に基づき作成）

ここで、$(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r})$ は自転する地球と共に回る粒子の速度であり、地球の自転軸から粒子までの距離を R、$|\boldsymbol{\Omega}| = \Omega$ とすると、粒子の速度は $|\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}| = \Omega R$ である。従って図 4.13 のように半径 R の円周に沿って循環を取ると、$\Omega R \times 2\pi R = 2\pi\Omega R^2$ となる。これを円の面積 πR^2 で割ると、円内の平均渦度（地球自転による）の大きさが 2Ω であることがわかる。平均渦度が R に無関係であることは、地球自転による渦度 $\nabla \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r})$ が地球上のいたるところで 2Ω（一定値）であることを意味する。この渦度ベクトルの向きは地球の自転軸と平行であるので、これは、前項で導出した惑星渦度 $2\boldsymbol{\Omega}$ と一致する。

以上の結果を用いると、(4.3.8) は、

$$\iint_D \nabla \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 2\boldsymbol{\Omega} \cdot \iint_D d\boldsymbol{\sigma} = 2\Omega A \tag{4.3.9}$$

となる。ただし、A は積分領域Dを赤道面上に投影したものの面積に等しい（図 4.14 参照）。

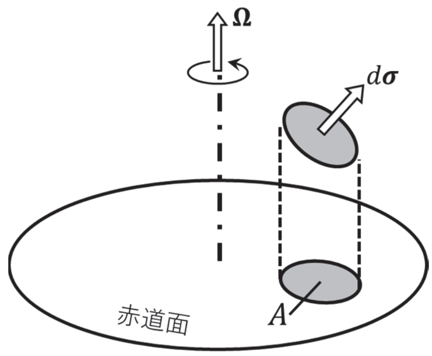


図 4.14　渦度の計算領域の模式図。（栗原（1979）に基づき作成）

以上のことから、(4.3.7) は結局、

$$\Gamma_a = \Gamma + 2\Omega A \tag{4.3.10}$$

であることがわかる。これを (4.1.12) 式に代入すると、相対循環の時間変化率は

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -2\Omega\frac{dA}{dt} + \iint_D \frac{\nabla\rho \times \nabla p}{\rho^2}\cdot \boldsymbol{n} d\sigma + \oint_C \boldsymbol{F_r}\cdot d\boldsymbol{r} \tag{4.3.11}$$

となる。これを**ビヤークネスの循環定理**（Bjerknes' circulation theorem）という。

(4.3.11) 式の第 2 項と第 3 項はそれぞれ傾圧ベクトルと摩擦の効果を表す。第 1 項の A の時間変化の影響が生じるのは、以下のように領域Dが変化することにより赤道への投影面積 A が変わる場合である。

(a)　領域Dの大きさが変わる。

(b)　領域Dが地球表面を南北に移動する。

(c)　領域Dの球面に対する傾きが変わる。

従って、大気が順圧的（すなわち傾圧ベクトルが 0）であって摩擦がない場合であっても、A が変化すると、絶対循環の保存のために相対循環の強さが変化する。

【事例 1】 極を取り巻く偏西風

図 4.15 のような、緯度φにおける風速uの一様な偏西風を考える。地球の半径をaとすると、この緯度帯に沿った相対循環は $\Gamma = 2\pi a u \cos\varphi$、この緯度円で囲まれる領域の赤道面に投影した面積は $A = \pi a^2 \cos^2\varphi$ であるから、絶対循環は、

$$\Gamma_a = \Gamma + 2\Omega A = 2\pi a \cos\varphi\,(u + \Omega a \cos\varphi)$$

となる。この偏西風が一様に緯度変化することを考えると、この絶対循環Γ_aは保存される。この保存量は、単位質量の空気塊が持つ絶対角運動量に他ならない。仮に、緯度圏φにあった実体閉曲線が一様に高緯度側に移ることで縮まったとすると、Aが減少するので相対循環Γは増大する。このためuは増大しなければならない。

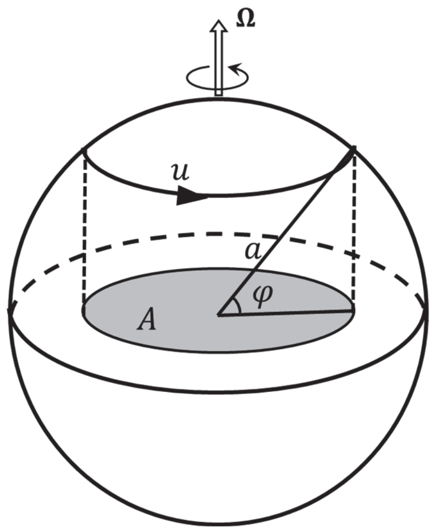


図 4.15　極を取り巻く一様な偏西風の模式図。（栗原（1979）に基づき作成）

【事例 2】 順圧的な小さな円形渦の南北移動

図 4.16 のように、緯度φの地点を中心として反時計回りに回転する小さな渦を考える。渦の半径rにおける接線速度をvとして、半径rの円に沿って相対循環を取ると、$\Gamma = 2\pi r v$ である。一方、この小さな円形領域を赤道面に投影すると、面積は $A = \pi r^2 \sin\varphi$ である。ここで、$f = 2\Omega \sin\varphi$ も考慮すると、

$$\Gamma_a = \Gamma + 2\Omega A = 2\pi r\left(v + \frac{f}{2} r\right)$$

となる。これが順圧大気中では保存される。従って、この渦が順圧的に北に移動すれば、Aが増大するので、相対循環Γが減少し、vは減速することになる。なお、これは円形領域の鉛直軸のまわりの絶対角運動量（第 2 章の付録 2C を参照）の保存則と同等である。

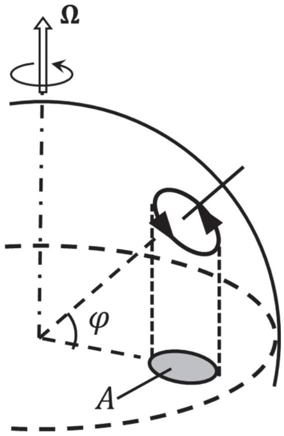


図 4.16　順圧的に北へ移動する小さな渦。（栗原（1979）に基づき作成）

4.3.3　β 平面近似

次に、回転系における渦度の時間変化を考えたいが、前項で求めた循環の時間変化では、惑星渦度に関係する部分の緯度変化が、相対循環の変化（すなわち相対渦度の変化）に影響することが示されていた。一方、第 2 章のプリミティブ方程式ではコリオリパラメータの緯度変化を考慮しないf平面近似を適用しており、この近似では惑星渦度の緯度依存性の影響を考えることができない。ここでは、プリミティブ方程式系にコリオリパラメータの緯度依存性を導入しておく。

第 2 章のf平面近似では、ある緯度φ_0を中心とする南北方向に十分狭い領域における運動を考え、球座標系におけるプリミティブ方程式系において変数λ, φの代わりに新たな独立変数

$$x = a\lambda\cos\varphi_0 \quad , \quad y = a(\varphi - \varphi_0)$$

を導入して方程式系を書き換えた。このときのコリオリパラメータは $f_0 = 2\Omega\sin\varphi_0$ の定数であった。それに対してここでは、緯度変化するコリオリパラメータを導入する。すなわち、考えている領域の南北幅は地球半径より十分小さい（$y/a \ll 1$）ことを考慮して、テイラー展開により微小量の 2 次以上の項を無視して

$$f \approx f_0 + \frac{df}{dy} y = f_0 + \beta y \tag{4.3.12}$$

と書く。ここで、$\varphi = \varphi_0 + y/a$ であるが、$y/a \ll 1$ のもとで、

$$\beta \equiv \frac{df}{dy} = 2\Omega \frac{d}{dy}\left\{\sin\left(\varphi_0 + \frac{y}{a}\right)\right\} = \frac{2\Omega}{a}\cos\left(\varphi_0 + \frac{y}{a}\right) \approx \frac{2\Omega}{a}\cos\varphi_0 \tag{4.3.13}$$

と書ける。このβを用いて (4.3.12) の右辺第 1 項と第 2 項のスケールを比較すると、中緯度で $\tan\varphi_0 \sim 1$ であることも考慮して

$$\frac{\beta L}{f_0} = \frac{L\cos\varphi_0}{a\sin\varphi_0} \approx \frac{L}{a}$$

であることがわかる。ここから、地球半径 a〜10^7 m に対して水平運動のスケール L〜10^6 m のオーダーの総観規模現象の場合は、(4.3.12) の右辺第 2 項が第 1 項より 1 桁小さいので、第 2 項はβを定数としyに関する 1 次の項とみなす近似を用いて良いと考えることができる。このように基準緯度φ_0の値を用いて定数としたf_0とβを用いた近似を、**β平面近似**という。総観規模よりさらに小さいスケールの現象ではβ平面近似でなくf平面近似で十分であることもここからわかる。

β平面近似におけるプリミティブ方程式系として、

$$\frac{du}{dt} - fv = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + F_x \tag{4.3.14a}$$

$$\frac{dv}{dt} + fu = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + F_y \tag{4.3.14b}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \tag{4.3.14c}$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0 \tag{4.3.14d}$$

が得られる。これは f 平面近似の方程式系と同じ形だが、コリオリパラメータが

$$f = f_0 + \beta y\,,\quad \beta \equiv \frac{2\Omega}{a}\cos\varphi_0 \tag{4.3.15}$$

のようにyの関数になっている点が異なる。そして、f平面近似では生じないがβ平面近似で現れる運動の特徴、すなわちコリオリパラメータ（惑星渦度）の緯度依存性によって生じる効果を、**β効果**と呼ぶ。

βは北極点と南極点を除きどこでも正の値で、赤道で最も大きい。地球の中緯度における代表的な大きさは、β〜10^{-11} $\mathrm{m^{-1}s^{-1}}$ である。

4.3.4 回転系における渦度方程式

この項では、回転系における渦度方程式をβ平面近似で求める。中緯度の総観規模の現象では渦運動はほぼ水平に起こる（すなわち、渦度ベクトルがほぼ鉛直を向いている）ことにより、相対渦度の鉛直成分（ここではこれを単に渦度と呼ぶ）

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

の変化のみを考察する。局所的な渦度の時間変化 $\partial\zeta/\partial t$に、 (4.3.14a,b) から展開した

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} - fv = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + F_x \tag{4.3.16a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}+fu=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+F_y \tag{4.3.16b}$$

を用いて整理すると、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \zeta}{\partial t}&=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial t}\\
&=\frac{\partial}{\partial x}\left[-u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial v}{\partial y}-w\frac{\partial v}{\partial z}-fu-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+F_y\right]\\
&-\frac{\partial}{\partial y}\left[-u\frac{\partial u}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial y}-w\frac{\partial u}{\partial z}+fv-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+F_x\right]\\
&=-u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)-v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)-w\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\
&-\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}\right)-f\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)-v\frac{df}{dy}+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\\
&=-u\frac{\partial \zeta}{\partial x}-v\frac{\partial \zeta}{\partial y}-w\frac{\partial \zeta}{\partial z}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)(\zeta+f)-v\frac{df}{dy}-\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}\right)\\
&+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)
\end{aligned} \tag{4.3.17}$$

ここで、$df/dy=\beta$ だが、fがyだけの関数であることから、

$$v\frac{df}{dy}=\frac{\partial f}{\partial t}+u\frac{\partial f}{\partial x}+v\frac{\partial f}{\partial y}+w\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{df}{dt} \tag{4.3.18}$$

であることに注意すると、(4.3.17) は以下の形に変形できる。

$$\frac{d}{dt}(\zeta+f)=-(\zeta+f)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right) \tag{4.3.19}$$

これが回転系における**渦度方程式**と呼ばれる。この式の左辺は空気塊のラグランジュ的な絶対渦度（の鉛直成分）の時間変化を表す。以下、基本的には第 4.1 節で示した慣性系の渦度方程式との類似で考えることができる。右辺第 1 項は水平収束（発散）による絶対渦度の増大（減少）を表す発散項である。右辺第 2 項は渦度ベクトルが傾いて向きを変えることで渦度成分が変化することを表す傾斜項で、ここでは特に鉛直シアー（渦度ベクトルの水平成分）が鉛直運動の水平シアーにより渦度の鉛直成分として見えてくることを表すので、立ち上がり項とも呼ばれる。右辺第 3 項は傾圧ベクトル、第 4 項は摩擦の効果を表す。

(4.3.19) では鉛直座標にzを用いていたが、気圧座標系を用いると、運動方程式に密度が現れなかったことから渦度方程式には傾圧ベクトルの項が現れなくなり、

$$\frac{d}{dt}(\zeta_p+f)=-(\zeta_p+f)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial \omega}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial p}\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right) \tag{4.3.20}$$

と書ける。これはここで用いている渦度の鉛直成分 ζ_p がp面上の風ベクトルから計算したものであり、厳密には (4.3.19) 式で用いられているz面上のものと同じでないことに関係している。ただしその差は一般にはごく小さい。また (4.3.19) 式の傾圧ベクトルの項も、総観規模現象では他の項と比較すると

一般に小さく無視できる大きさである。

さらに、総観規模以上の大規模現象においては傾斜項は他の項より小さくなり無視できる。第 5 章で見る準地衡風渦度方程式はそれらを特徴として持つことになる。

【問題】 p座標系における相対渦度の鉛直成分 ζ_p と、z座標系における相対渦度の鉛直成分 ζ との間に、次の関係が成り立つことを示せ（第 2.4 節の座標変換を参考にせよ）。

$$\zeta = \zeta_p + f\rho\left(u_g\frac{\partial u}{\partial p} + v_g\frac{\partial v}{\partial p}\right)$$

ただし、f はコリオリパラメータ、ρ は密度、u_g と v_g はp座標系における地衡風の東向き成分と北向き成分である。そして、中緯度の総観規模の運動における代表的なスケールを用いると、右辺第 2 項が右辺第 1 項（ζ_p）と比較して十分に小さいことを示せ。

【問題】 p座標系のβ平面近似の運動方程式を、東西方向・南北方向のそれぞれについて書け。それらを用いて、p座標系の渦度方程式 (4.3.20) を導け。

4.4 回転系における渦位とロスビー波

4.4.1 順圧大気中の渦位保存

ここでは自転する惑星上の大気中の大規模な渦運動の簡単な例として、順圧大気で、摩擦がなく、密度が一様な場合を考える。すると、(4.3.19) の渦度方程式において、右辺第 3 項と第 4 項は 0 となる。そして、順圧大気の場合は鉛直シアーもないことが第 3 章で示されていたので、右辺第 2 項も 0 である。すなわち、

$$\frac{d}{dt}(\zeta + f) = -(\zeta + f)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = (\zeta + f)\frac{\partial w}{\partial z} \tag{4.4.1}$$

である。ここでは密度一様の条件から、連続の式より、

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial z}$$

であることを使っている。一方、 (4.4.1) の左辺に関しては、総観規模では鉛直運動と比較して水平運動が卓越するので、

$$\frac{d}{dt}(\zeta + f) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}\right)(\zeta + f) \cong \frac{d_H}{dt}(\zeta + f)$$

$$\frac{d_H}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} \tag{4.4.2}$$

と書ける。これらを用いて、(4.4.1) は

$$\frac{d_H}{dt}(\zeta + f) \cong (\zeta + f)\frac{\partial w}{\partial z} \tag{4.4.3}$$

と変形できる。

ここでもまた、第 4.2 節と同様に図 4.12 のように鉛直に立った気柱の変化を考える。(4.4.1) の左辺の水平発散は気柱の水平断面の変化を表し、右辺の鉛直速度の鉛直微分は気柱の上端と下端における鉛直速度の差、すなわち気柱の長さの変化を表す。すると (4.4.3) は気柱の渦度の変化（左辺）が気柱の長さの変化（右辺）に関係していることを示す。この気柱の長さを $h(x,y,t)$、気柱の下端と上端の高さ（z座標）をそれぞれz_1、z_2とすると、

$$h = z_2 - z_1\,,\quad w(z_2) - w(z_1) = \frac{d_H z_2}{dt} - \frac{d_H z_1}{dt} = \frac{d_H h}{dt} \tag{4.4.4}$$

となる。ここで、(4.4.3) の右辺をz_1からz_2まで積分し、(4.4.4) を用いてさらに変形すると、

$$\int_{z_1}^{z_2} (\zeta + f)\frac{\partial w}{\partial z}dz = (\zeta + f)[w(z_2) - w(z_1)] = (\zeta + f)\frac{d_H h}{dt}$$

と書け、一方で同じ(4.4.3) の左辺をz_1からz_2まで積分すると

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{d_H}{dt}(\zeta + f)dz = \frac{d_H}{dt}(\zeta + f)\int_{z_1}^{z_2} dz = h\frac{d_H}{dt}(\zeta + f)$$

と書けるので、これらから

$$h\frac{d_H}{dt}(\zeta + f) = (\zeta + f)\frac{d_H h}{dt}$$

である。これをさらに変形すると

$$\frac{d_H}{dt}\ln(\zeta + f) = \frac{d_H}{dt}\ln h$$

ここから

$$\frac{d_H}{dt}Q = 0\,,\quad Q = \frac{\zeta + f}{h} \tag{4.4.5}$$

となり、気柱に関して $Q = (\zeta + f)/h$ がラグランジュ的に保存すると言える。これは順圧大気に関する渦位保存則で、**ロスビーの渦位保存則**（Rossby's potential vorticity equation）と呼ばれる。

なお、(4.4.5) はエルテルの渦位 $P = \boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla\theta/\rho$ において密度ρを一定とし、絶対渦度ベクトル$\boldsymbol{\omega}_a$が鉛直上向きで、さらに $\nabla\theta$ の代わりに 2 つの等温位面の間の距離をhとしたものに対応する。

これらの条件に加え、さらに発散がないとすれば、h が一定なので、

$$\frac{d_H}{dt}(\zeta + f) = 0 \tag{4.4.6}$$

となる。これは、順圧・非発散では絶対渦度が保存されることを意味する。現実大気の大規模運動について、対流圏の下端と上層では収束発散が大きいが中層では発散が小さいと仮定すると、対流圏のほぼ中間の高度である 500 hPa では絶対渦度が保存されるとして簡便な予報則として用いられてきた。

4.4.2 浅水方程式系における渦位保存

密度が一様な非圧縮流体で、運動の水平スケールが鉛直スケールより十分大きい場合は、浅水方程式系を用いると便利である。ここではそれによりβ効果のある環境における渦位保存を調べる。

β平面近似における浅水方程式系は、f平面近似の場合の浅水方程式系（第 2 章）と同じく、

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}-fv=-g\frac{\partial h}{\partial x} \tag{4.4.7a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+fu=-g\frac{\partial h}{\partial y} \tag{4.4.7b}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(h-h_B)u+\frac{\partial}{\partial y}(h-h_B)v=0 \tag{4.4.7c}$$

である。ただし、ここでは $f=f_0+\beta y$ である。ここで、(u,v) は水平速度、hは自由表面の高度、h_Bは底面地形の高度である。浅水方程式系では (u,v) は鉛直方向に一様である。

(4.4.7a,b) をそれぞれy、xで偏微分して差を取ることにより、渦度方程式

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+u\frac{\partial \zeta}{\partial x}+v\frac{\partial \zeta}{\partial y}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)(\zeta+f)+\beta v=0 \tag{4.4.8}$$

が得られる。第 4.3 節で行ったように $\beta v=df/dt$ と変形すると、

$$\frac{d_H}{dt}(\zeta+f)=-\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)(\zeta+f) \tag{4.4.9}$$

と書ける。ただし、$d_H/dt\equiv\partial/\partial t+u\,\partial/\partial x+v\,\partial/\partial y$ である。

一方、底面地形が時間に依存しないことに注意して、連続の式 (4.4.7c) を書き換えると、

$$\frac{d_H}{dt}(h-h_B)=-(h-h_B)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{4.4.10}$$

とすることができる。これと (4.4.9) から

$$\frac{d_H}{dt}(\zeta+f)-\frac{\zeta+f}{h-h_B}\frac{d_H}{dt}(h-h_B)=0$$

が得られ、さらに変形して

$$\frac{d_H}{dt}Q=0\ ,\quad Q=\frac{\zeta+f}{h-h_B} \tag{4.4.11}$$

が得られる。これが浅水方程式系の渦位保存則である。自由表面の高さと底面地形の高さの差 $(h-h_B)$は流体の層の厚さに他ならないので、これを改めてhとおけば、順圧渦位の保存則 (4.4.5) になる。

4.4.3 基本的なロスビー波

第 4.3 節で、コリオリパラメータの緯度依存性（β効果）によって運動の変化が生じることが示唆されていた。ここではβ効果による重要な現象の一例について、前項の浅水方程式系の渦位保存則を用いて論じる。β効果のみを調べるために、流体層に蓋をして自由表面の上下運動をなくし（h一定）、また底面地形もないとすれば（$h_B=0$）、流体層の厚さが一定になるので、渦位保存則 (4.4.11) は絶対渦度保存則

$$\frac{d_H}{dt}(\zeta+f)=\frac{\partial \zeta}{\partial t}+u\frac{\partial \zeta}{\partial x}+v\frac{\partial \zeta}{\partial y}+\beta v=0 \tag{4.4.12}$$

に帰着する。これは (4.4.8) (4.4.9) で非発散

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

としたものである。

ここで、一様な西風 U_0 の基本場で南北方向の変位だけが起こる波動を考え、

$$u=U_0,\qquad v=v',\quad \zeta=\zeta'=\frac{\partial v'}{\partial x} \tag{4.4.13}$$

とおいて、(4.4.12) を線形化すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial v'}{\partial x}+U_0\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v'}{\partial x}=-\beta v' \tag{4.4.14}$$

と書ける。これにより、左辺の v'の変動が右辺のβを原因として生じることがわかる。

ここで、$v'(x,t)=\hat{v}e^{ik(x-ct)}$ の形の波動解を仮定して代入すると、

$$k^2c-U_0k^2+\beta=0 \tag{4.4.15}$$

より、

$$c=U_0-\frac{\beta}{k^2} \tag{4.4.16}$$

の位相速度が得られる。$\beta>0$ なので、$c-U_0<0$ で、波動の位相は基本場の流れに対して西向きに伝播することがわかる。このようにβ効果の作用により伝播する波動を、**ロスビー波**（Rossby wave）という。地球大気の中緯度では $\beta=2\times10^{-11}$ m^{-1} s^{-1} 程度なので、東西波長 5000 km のロスビー波の位相は基本場の流れに対して約 10m s^{-1} の速さで西進する。基本場の流れとして偏西風がある場合は、波長の短い波は比較的速く東進するが、波長の長い波は東進が遅く、地表面に対して位相が静止または西進することもある。位相が静止するのは、 (4.4.16) 式で $c=0$ となる場合で、つまり $U_0=\beta/k^2$ の場合である。このとき**定常ロスビー波**を形成することになる。

図 4.17 で、ロスビー波の運動を説明する。図の右方向が東、y方向が北を表す。図中の実線（曲線）$\eta(t=0)$ は時刻 $t=0$における実体線を表す（例えば大気中に線を引いたと思ってほしい)。この実体線η上の空気塊は絶対渦度を保存するので、南に変位したところでは、惑星渦度が減少するため相対渦度が増大し、$\zeta>0$となっている。それに伴って反時計回りの循環が生じるので、その東側では北向きの流れのために実体線は北へとシフトし、西側では南向きの流れのために実体線は南へシフトする。また実体線が北に変位したところでは、惑星渦度が増大するために相対渦度が減少し、$\zeta<0$となって時計回りの循環が生じている。その流れにより東側では南へ、西側では北へと実体線がシフトする。これらの一連の運動によって、実体線は $\eta(t=\Delta t)$ の破線の形に変化する。このように、β効果により波の位相は西へと伝播することになる。

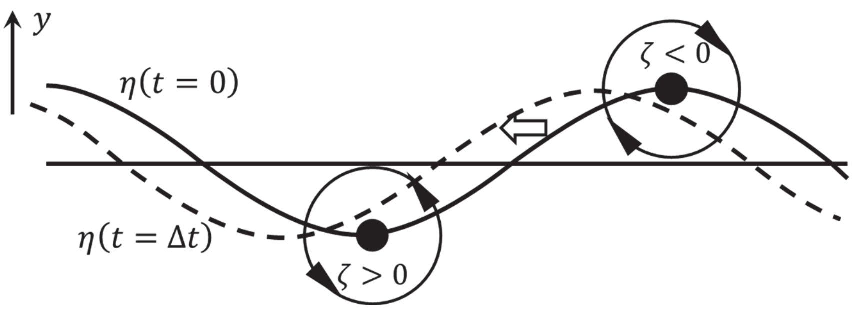


図 4.17　ロスビー波における空気の運動。（Vallis (2006) に基づき作成）

なお、基本場の流れに相対的な波動の振動数をσとすると、(4.4.15) を用いて

$$\sigma=(c-U_0)k=-\frac{\beta}{k} \tag{4.4.17}$$

であり、基本場の流れに相対的な東西方向の群速度は

$$c_g=\frac{\partial\sigma}{\partial k}=\frac{\beta}{k^2} \tag{4.4.18}$$

となって、群速度は位相速度と符号が逆であり、必ず基本場の流れに相対的に東向きとなる（基本場の偏西風の風速より速く伝播する）ことがわかる。

【地形性ロスビー波】

上述のロスビー波のメカニズムは絶対渦度保存で説明してきたが、本来は渦位保存で一般化できる。詳細は第 7 章で説明されるが、ここでは渦位保存則 (4.4.11) から、β効果がなくても底面地形があればロスビー波と同様な波動が渦管の伸縮により生じることを説明しておこう。惑星渦度は緯度に依存せず $f=f_0$、$y=0$ における流体の厚さをH_0（定数)、底面地形は傾き β_T で南北方向に傾斜した $h_B=\beta_T y$ とし、さらに簡単のために自由表面は上下に動かないものとすると、

$$\frac{d_H}{dt}Q=0\ ,\quad Q=\frac{\zeta+f_0}{H_0-\beta_T y} \tag{4.4.19}$$

が成り立つ。$\beta_T>0$ であれば、気柱が北に変位すると、気柱が縮むため、渦度は減少して $\zeta<0$ になる。南に変位すると、気柱は伸び、渦度は増大して $\zeta>0$ となる。これらにより、β効果がある場合と同様に位相が西に進む波が生じる。

$|\beta_T y|\ll H_0$ であれば、(4.4.19) の渦位Qは

$$Q=\frac{1}{H_0}(\zeta+f_0)\left(1-\frac{\beta_T y}{H_0}\right)^{-1}\approx\frac{1}{H_0}(\zeta+f_0)\left(1+\frac{\beta_T y}{H_0}\right)=\frac{1}{H_0}\left(\zeta+f_0+\zeta\frac{\beta_T}{H_0}y+f_0\frac{\beta_T}{H_0}y\right)$$

であり、さらに $|\zeta|\ll f_0$ である場合は

$$Q\approx\frac{1}{H_0}\left(\zeta+f_0+\frac{f_0\beta_T}{H_0}y\right) \tag{4.4.20}$$

のように近似できる。この右辺の括弧内と絶対渦度 $\zeta+f=\zeta+f_0+\beta y$ とを比較すると、$f_0\beta_T/H_0$ が

惑星渦度の緯度変化に関するβに相当することになる。これにより、北半球で北に向かって底面が上昇するような斜面で、流体層が北ほど薄くなっている場合は、西進する波動が生じる。逆に、北に向かって底面が下降するような斜面で、流体層が厚くなっている場合は、東進する波動が生じる。このような底面の傾斜により生じる波動を、**地形性ロスビー波**（topographic Rossby wave）と呼び、主に海洋学で論じられる。この性質を用いて、室内の回転水槽を使った実験で、水槽の底面に傾斜をもたせることによりβ効果の代用とすることができる。

4.4.4 等温位面上の渦位保存

前項までは、回転系（自転する惑星上）ではあるが順圧・非発散大気を仮定して、β効果によりロスビー波が伝播することを示した。しかし現実の大気は順圧・非発散ではない。一方、第 4.2 節では、慣性系において傾圧性があってもエルテルの渦位は断熱で保存されることが示された。ロスビー波を一般化して渦位保存で説明できるなら、順圧・非発散に限定されないことが期待される。

ここでは、自転する惑星上において、静力学平衡が成り立ち、かつ等温位面がほぼ水平とみなせる場合（すなわち等圧面上でほぼ等温・等密度と見なすことができ、ほぼ順圧と言える場合）を考える。慣性系におけるエルテルの渦位は (4.2.10) 式では絶対渦度ベクトルの等温位面に垂直な成分 ω_θ を用いて

$$P = \frac{\omega_\theta |\nabla\theta|}{\rho} = 一定$$

であることが示されていたが、自転する惑星上では等温位面上の相対渦度の鉛直成分 ζ_θ と惑星渦度 f を用いて、

$$\omega_\theta = \zeta_\theta + f \tag{4.4.21}$$

と書ける。ω_θ が「等温位面に垂直な成分」であったのに対して、ここで扱う惑星渦度 f が「鉛直成分」（すなわち惑星上で等ジオポテンシャル面に対して垂直）であり、両者は厳密には方向が異なるのだが、現実の地球上の総観スケール以上の大気構造では等温位面の傾斜は比較的小さいので「ほぼ水平と見なせる」と仮定し、惑星渦度ベクトルの成分も同じと見なしている。

ここで再び、第 4.2 節の図 4.12 のような、2 つの等温位面に挟まれて伸縮する気柱を考える。ここでは温位差は微小で$\delta\theta$とする。そして第 4.2 節で扱ったのと同様に、気柱の質量をM、断面積をA、長さをh、密度ρとし、さらに、気柱の上下の気圧差を$-\delta p$とする。気柱の伸縮があり、それに伴って断面積が変化するということは、発散があるということで、この点で前項の非発散を仮定した議論とは異なる。ここでの記号を使うと静力学平衡の式は $\delta p/h = -\rho g$ と書けるので、これを質量保存則 (4.2.5) に用いると、

$$M = \rho A h = \left(-\frac{\delta p}{g}\right) A$$

と書け、

$$A = -\frac{g}{\delta p} M = g\left(-\frac{\delta\theta}{\delta p}\right)\left(\frac{M}{\delta\theta}\right) = 定数 \times g\left(-\frac{\delta\theta}{\delta p}\right) \tag{4.4.22}$$

が得られる。一方、(4.2.8) では断熱で $\omega_\theta A =$一定 であることが示されていた。これらからAを消去して、$\delta\theta \to 0$、$\delta p \to 0$ とすると、

$$\lim_{\delta\theta \to 0} \omega_\theta \left(-g\frac{\delta\theta}{\delta p}\right) = (\zeta_\theta + f)\left(-g\frac{\partial\theta}{\partial p}\right) \equiv P_\theta = \text{一定} \tag{4.4.23}$$

の形の渦位が得られる。

なお、温位座標系で書かれたプリミティブ方程式系から出発すると、断熱で摩擦がないときに

$$P_\theta = (\zeta_\theta + f)\left(-\frac{1}{g}\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)^{-1} \tag{4.4.24}$$

がラグランジュ的に保存されることが示される。（付録 4A 参照）

4.4.5 大規模山岳の風下で励起されるロスビー波

ここで、渦位保存則の重要な応用例を一つ示しておく。図 4.18 に示したのは、順圧大気において大規模山岳（チベット高原やロッキー山脈のような 1000 km 以上のスケールの山岳）を西風が乗り越える際の様子である。いま、大規模山岳の上流側で、流れは一様な層流で、$\zeta = 0$ とする。流れが断熱的であるとすると、温位面 θ_0と $\theta_0 + \Delta\theta$ の間にある気柱は、山を越えてもこの 2 つの面の間にとどまる。このことから、地表に近い温位面θ_0はほぼ地面の形状に従うことになる。地表面から数 km 上にある温位面 $\theta_0 + \Delta\theta$ も影響をうけて鉛直方向に変位する。しかし、流れと大規模山岳との間の相互作用により生み出される圧力のために、上層の温位面の鉛直変位は水平方向に広がることになる。その変位は山岳の上流側と下流側に広がり、地表面付近での変位と比較して鉛直方向の振幅は小さい。

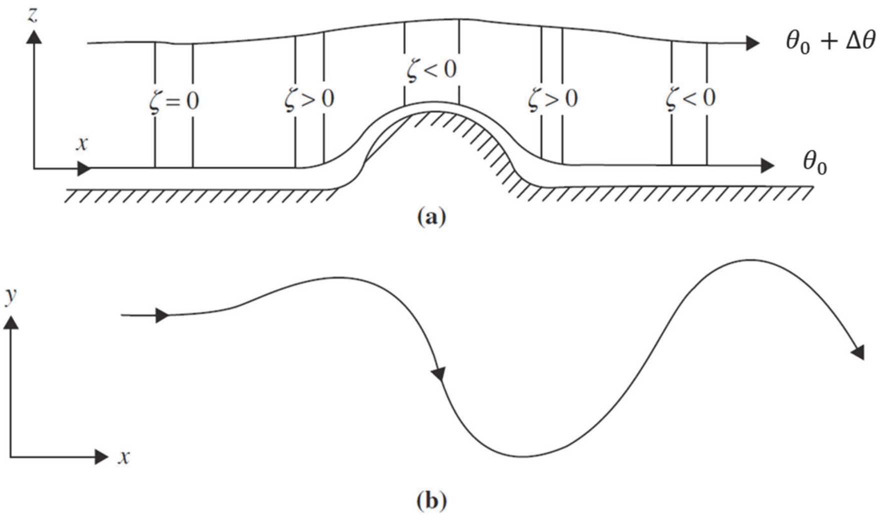


図 4.18　大規模山岳を西風が越える際の模式図。(a) 気柱の高さの変化、(b) x-y 平面における空気塊の流跡線。（Holton and Hakim (2012) を改変）

上層の温位面の鉛直変位の結果として、山岳の上流側（西側）では気柱が鉛直方向に伸びることになる。（ただし、通常は、大規模な運動では上流側の気柱の伸びは比較的小さい。）この気柱の伸びにより、$-\partial\theta/\partial p$ が減少し、渦位保存 (4.4.23) により $\zeta > 0$ となる。つまり、山岳に接近するにつれて気柱は低気圧性に回転するようになる。この低気圧性曲率によって気柱が北へ移動するので、気柱の惑星渦度 f が増大する。この f の増大により、ζ の増加はある程度抑制される。

気柱が山岳を越え始めると、気柱の鉛直方向の長さが減少し、$-\partial\theta/\partial p$が増大する。すると、$\zeta+f$は減少しなければならないので、$\zeta<0$となららなければならない。そのために気柱は高気圧性循環を獲得し、南向きの運動へと変わる。

気柱が山岳を越え、その鉛直方向の長さがもとの長さに戻るときは、その位置は初期の緯度よりも南にあるので、f が小さく、そのため $\zeta>0$ にならなければならない。そして気柱の運動は低気圧性曲率を持たねばならず、気柱は運動の方向を北へと変える。この気柱が初期の緯度に戻ったとき、まだ北向きの移動速度を持っているために、北向きの運動を続け、f の増大により $\zeta<0$ となって高気圧性曲率を獲得し、再び運動の方向が逆転していくことになる。

このように、気柱は渦位を保存しながら、水平面で波動状の流跡線に沿って、下流へと運動していくことになる。従って、大規模山岳を越える定常な西風の場では、山岳のすぐ東側で低気圧性の流れになり、風下トラフが生じる。さらにその下流ではリッジとトラフが交互に続く定常流（定常ロスビー波）が形成される。

東風の場合は、西風の場合とは全く異なる。図 4.19 に示したように、東風の場合も、山岳の上流側（東側）では気柱が伸び、$\zeta>0$ となることで流れを低気圧性の転向に導く。この低気圧性の転向は赤道方向へ向かう運動の成分を生み出し、f が減少する。気柱が山岳を越えながら西向き・赤道方向へと運動するにつれて、その長さは収縮して、$-\partial\theta/\partial p$ が増大すると、$\zeta+f$ は減少しなければならない。ここで、$\zeta+f$ の減少は、赤道方向への運動による f の減少と、$\zeta<0$ となることの双方により生じる。気柱が渦位を保存しながら山岳を西向きに降りていくと、変化のプロセスが逆になり、山岳がある程度離れると初期の緯度で再び $\zeta=0$ となり、西向きに運動する状態に戻る。

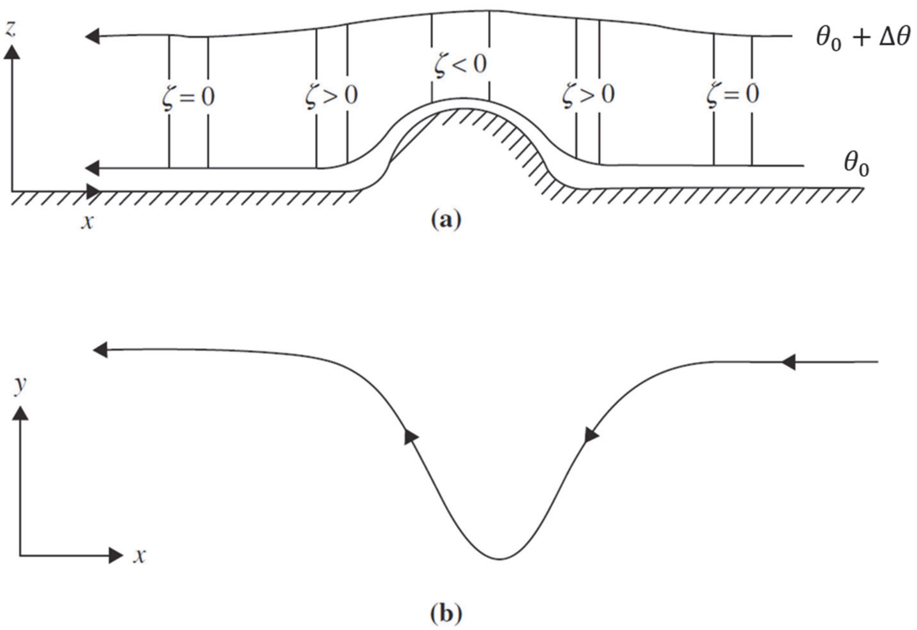


図 4.19　前の図と同じ、ただし東風の場合。（Holton and Hakim (2012) を改変）

このように惑星渦度の緯度依存性は、大規模山岳を越える流れの向きによって大きく異なる結果を生じる。西風の場合は、山脈のはるか下流までのびる波動を生み出す。しかし東風では、流線の乱れは山岳から西に離れると減衰する。

ロスビー波については第 7 章でさらに詳細に述べる。

付録 4A 温位座標系における渦位保存則の導出

温位座標系におけるプリミティブ方程式系（第 2 章の付録 2B を参照）は、以下のように書ける。

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\dot{\theta}\frac{\partial u}{\partial \theta}-fv=-\frac{\partial \Psi}{\partial x}+F_x \tag{4A.1a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\dot{\theta}\frac{\partial v}{\partial \theta}+fu=-\frac{\partial \Psi}{\partial y}+F_y \tag{4A.1b}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}=C_p\Pi(p) \tag{4A.1c}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t}+\frac{\partial(\sigma u)}{\partial x}+\frac{\partial(\sigma v)}{\partial y}+\frac{\partial(\sigma\dot{\theta})}{\partial \theta}=0 \tag{4A.1d}$$

$$\dot{\theta}=\frac{J}{C_p\Pi(p)} \tag{4A.1e}$$

ただし、モンゴメリー流線関数、エクスナー関数、等温位面密度がそれぞれ以下のとおりである。

$$\Psi\equiv C_pT+\Phi \tag{4A.2}$$

$$\Pi(p)\equiv\left(\frac{p}{p_0}\right)^{R/C_p}=\frac{T}{\theta} \tag{4A.3}$$

$$\sigma=-\frac{1}{g}\frac{\partial p}{\partial \theta} \tag{4A.4}$$

(4A.1a) と (4A.1b) から

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+f\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\beta v$$
$$+\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\dot{\theta}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\dot{\theta}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\right\}=\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}$$

が得られる。ここで、等温位面上の渦度の鉛直成分

$$\zeta_\theta=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$$

を導入し、また $\beta v=df/dt$ と変形すると、温位座標系で表した渦度方程式

$$\frac{d}{dt}(\zeta_\theta+f)+(\zeta_\theta+f)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\left(\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial \theta}-\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right) \tag{4A.5}$$

が得られる。ただし、

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+\dot{\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

一方、連続の式 (4A.1d) を変形して

$$\frac{d\sigma}{dt}+\sigma\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\sigma\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial\theta}$$

これに $-(\zeta_\theta+f)/\sigma^2$ をかけて変形すると

$$(\zeta_\theta+f)\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sigma}\right)-\frac{(\zeta_\theta+f)}{\sigma}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{(\zeta_\theta+f)}{\sigma}\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial\theta} \tag{4A.6}$$

(4A.5) をσで除し、それと (4A.6) から発散項を消去すると、

$$\left(\frac{1}{\sigma}\right)\frac{d}{dt}(\zeta_\theta+f)+(\zeta_\theta+f)\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sigma}\right)=\frac{(\zeta_\theta+f)}{\sigma}\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial\theta}-\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial\theta}-\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

この左辺を変形することで

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\zeta_\theta+f}{\sigma}\right)=\left(\frac{\zeta_\theta+f}{\sigma}\right)\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial\theta}-\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial\theta}-\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right) \tag{4A.7}$$

のように温位座標系における渦位方程式が得られる。非断熱加熱と摩擦がない場合は右辺が 0 となり、第 4.4 節で見た等温位面上の渦位保存則

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\zeta_\theta+f}{\sigma}\right)=0 \tag{4A.8}$$

が導かれる。

付録 4B　さまざまな渦位

この第 4 章と、次の第 5 章で、渦位という名でさまざまな形で定義された物理量（保存量）が紹介される。それらについてここでまとめておく。これらは本質的には同じだが、目的により表現形式を変えていると言える。

4B.1　エルテルの渦位

慣性系における保存量として、エルテルの渦位Pが以下のように定義された（第 4.2 節）。

$$P\equiv\frac{\boldsymbol{\omega}_a\cdot\nabla\theta}{\rho} \tag{4B.1}$$

スカラーでは次のように書ける。

$$P=\frac{\omega_\theta|\nabla\theta|}{\rho} \tag{4B.2}$$

ω_θは$\boldsymbol{\omega}_a$の等温位面に垂直な成分である。

4B.2　温位座標系の渦位

自転する地球上の傾圧大気における保存量としての渦位は、温位座標系を使うと表現しやすい（第 4.4.4 項、付録 4A）。これは等温位面に沿って保存され、等温位面渦位と呼ばれることもある。

$$P_\theta = (\zeta_\theta + f)\left(-\frac{1}{g}\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)^{-1} \tag{4B.3}$$

ζ_θは等温位面上の相対渦度である。

4B.3 順圧渦位

順圧大気は、密度は気圧のみに依存し、鉛直シアーもないので、そこでの渦位保存は鉛直に立った空気柱（渦管）の伸縮で考えることができる（第 4.4.1 項）。この場合の渦位は

$$Q = \frac{\zeta + f}{h} \tag{4B.4}$$

と表される。hは渦管の長さである。非発散の場合はhは一定であり、渦位保存は絶対渦度保存に簡単化され、また流線関数で表現できる（第 7 章）。

4B.4 浅水方程式系の渦位

浅水方程式系では鉛直運動のスケールは水平運動のスケールと比較して小さく、密度は一定と考えるので、基本的には順圧渦位と同様に考えることができる。流体表面の高さをh、底面の高さをh_Bとすれば、渦位は次のように書ける。

$$Q = \frac{\zeta + f}{h - h_B} \tag{4B.5}$$

4B.5 準地衡風渦位

第 5 章では準地衡風方程式系が導入され、そこでは準地衡風渦位

$$q \equiv f + \zeta_g + \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0}{S(p)}\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right) \tag{4B.6}$$

が定義され、断熱で地衡風に沿って保存されることが示される。これはエルテルの渦位（または回転系における等温位面渦位）を線形化したものに相当する。右辺第 3 項は層厚（$-\partial\Phi/\partial p \propto T$）の鉛直傾度なので鉛直安定度に関する項であり、この項により渦管の伸縮による渦位の変化が表される。そこで使われている$S(p)$自体も

$$S(p) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial p}\ln\bar{\theta} \tag{4B.7}$$

で鉛直安定度を表す（ρと$\bar{\theta}$は基準となる場の密度と温位で共に気圧の関数）。

地衡風は非発散なので、準地衡風渦位とその保存は流線関数で表すことができる。これは第 7 章・第 8 章のロスビー波と傾圧不安定の議論で頻出することになる。

第 5 章 準地衡風運動

前章までで、大気の運動を扱うための座標系や方程式系の基礎を学習した。第 5 章から第 8 章まで、大気中の運動を様々な波動として扱い説明する。大気の運動を正確に表そうとすると、究極的には第 2 章で紹介した基礎方程式系を解くことを目指すことになるが、それは非常に複雑で、そこにいくつかの近似を施したプリミティブ方程式系であっても数値計算以外の方法で解くことは難しい。このため、対象とする擾乱・波動の特性（スケールなど）に応じてその都度異なる簡略化を施した方程式系を用いる。

中高緯度の総観気象現象に関しては、コリオリ力と水平気圧傾度力がつりあった地衡風が卓越することを、第 3 章で学んだ。しかし完全に地衡風バランスしていると、そこからは何の変化も起こらないはずである。そこで、地衡風バランスしていて時間変化しない地衡風の場と、そこからの微小なずれである非地衡風成分を分解して扱う。すると、大規模場は地衡風バランスと静力学バランスを保ちながら、非地衡風成分の働きによってゆっくりと時間変化することが表現できる。これを表すものが、**準地衡風方程式系**（quasi-geostrophic equations）である。これにより、中緯度の総観規模の低気圧・高気圧のふるまいがかなり良く説明されることが知られている。

本章では、まず温帯低気圧・傾圧性擾乱の特徴について述べた後、準地衡風方程式系を導出し、続いて準地衡風渦度方程式、準地衡風オメガ方程式、ジオポテンシャル傾向方程式、準地衡風渦位方程式などを導出して、さらに、それらを用いて温帯低気圧の 3 次元構造やその時間発展を定性的に示す。

なお、温帯低気圧に関連する議論は第 8 章でも行うが、そこでは不安定の理論を扱うのに対して、この第 5 章では現実に観測され天気図に描画されるジオポテンシャル高度場や温度場の関係で説明しようとしていることに注意していただきたい。

5.1 温帯低気圧の定性的特徴

5.1.1 温帯低気圧の典型的構造

準地衡風理論の枠組みによる説明に先立ち、ここでは、その枠組みで説明しようとしている代表的な現象である温帯低気圧の典型的な構造を確認しておく。図 5.1 には 1000 hPa ジオポテンシャル高度で表された地上の低気圧と、500 hPa ジオポテンシャル高度で表された気圧の谷（トラフ）、及び 500-1000 hPa 間の層厚が示されている。層厚はその層の平均気温に対応する（第 2 章）。一般に、発達中の低気圧の場合、上層のトラフは地上の低気圧の西に位置し、温度場の谷（サーマルトラフ）はさらにその西に位置する。この位置（位相）関係は静力学平衡の関係により説明できる（第 2 章の測高公式も参照）。この場合の東西断面は図 5.2 のようになり、特徴は以下のようにまとめられる。

（1）　高度場のリッジ・トラフの鉛直軸が西に傾いている。

（2）　高度場と温度場の位相は上部対流圏でほぼ一致するが、下層ほどずれている。

（3）　トラフの軸の西側では下層ほど寒気移流が強い。

（4）　トラフの軸の東側では下層ほど暖気移流が強い。

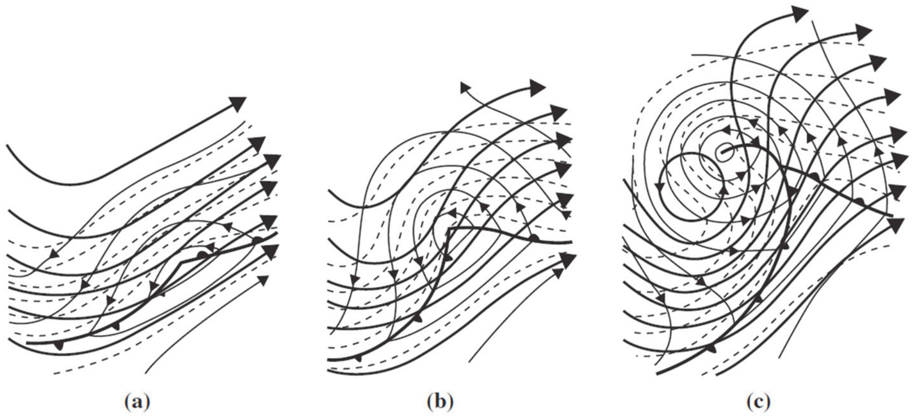


図 5.1　温帯低気圧の発達の 3 段階を示す模式図（Palmén and Newton 1969）。太実線は 500 hPa、細実線は 1000 hPa のジオポテンシャル高度。矢印で地衡風の向きを表す。破線は 500-1000 hPa の層厚（500 hPa と 1000 hPa のジオポテンシャル高度の差）。これは静力学の式（$\Delta\Phi/\Delta p = -RT/p$）により、この層の平均気温の分布に対応する。

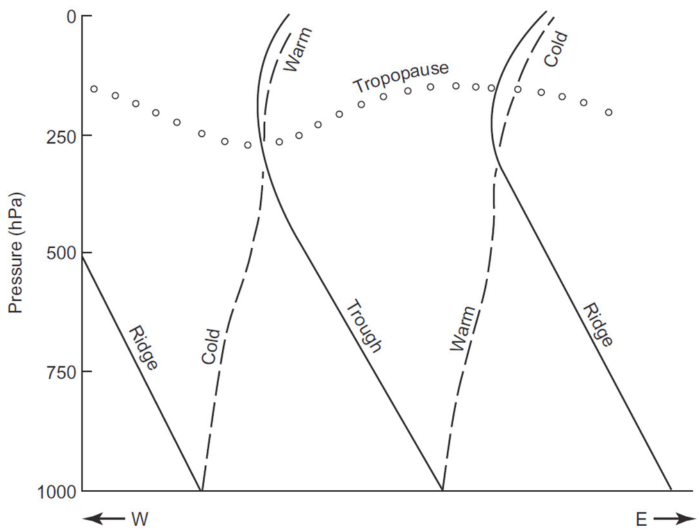


図 5.2　発達中の傾圧波動の東西鉛直断面。高度場のリッジ・トラフ（実線）と温度場の高温・低温の軸（破線）の位相を模式的に示している。白丸線で圏界面を表す。（Holton 1992）

5.1.2 傾圧ベクトルによる傾圧性擾乱発達メカニズム

第 4 章で、等圧面と等密度面が一致しない傾圧大気においては、傾圧性を緩和する方向に運動が生じること、すなわち気圧p、密度ρの大気において傾圧ベクトル（ソレノイド）

$$\boldsymbol{S} = (\nabla\rho \times \nabla p)/\rho^2 = -\nabla\alpha \times \nabla p \tag{5.1.1}$$

の方向に関連して循環や渦度が変化することが示されていた（$\alpha = 1/\rho$：比容）。

図 5.3 は、北半球の南北断面の模式図である。500 hPa 等圧面の高度は低緯度で高く、高緯度で低いので、気圧傾度ベクトルは図中で右下を向いている。一方、大気密度は上層・低緯度で小さく、下層・高緯度で大きいので、密度傾度ベクトルは左下を向く。すると、傾圧ベクトルの水平成分は、紙面の奥から手前へ向く方向（西向き）となる。この状態から傾圧性を緩和する、すなわち等密度面を

等圧面と一致させるような運動が生じるならば、それは暖気が上昇、寒気が下降する運動である。

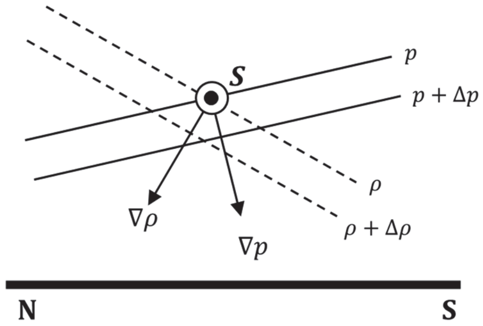


図 5.3　南北断面における気圧と密度の分布に関する模式図。

ここではさらに、(5.1.1) 式の右辺を

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S} = \nabla p \times \nabla\alpha &= \left(\nabla_z p + \frac{\partial p}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) \times \left(\nabla_z \alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) \\ &= \nabla_z p \times \nabla_z \alpha + \left(\nabla_z p \times \frac{\partial \alpha}{\partial z}\boldsymbol{k} + \frac{\partial p}{\partial z}\boldsymbol{k} \times \nabla_z \alpha\right)\end{aligned} \tag{5.1.2}$$

のように鉛直成分（右辺第 1 項）と水平成分（右辺第 2 項）に分けて、その意味するところと傾圧性擾乱の性質について考える。

まず $\boldsymbol{S}$ の水平成分 $\boldsymbol{S}_h$ は、(5.1.2) の右辺第 2 項であるから、

$$\boldsymbol{S}_h = \nabla_z p \times \frac{\partial \alpha}{\partial z}\boldsymbol{k} + \frac{\partial p}{\partial z}\boldsymbol{k} \times \nabla_z \alpha = \boldsymbol{k} \times \left(\frac{\partial p}{\partial z}\nabla_z \alpha - \nabla_z p \frac{\partial \alpha}{\partial z}\right) = -\boldsymbol{k} \times \frac{\partial}{\partial z}(\alpha \nabla_z p)$$

$$\left(\because\ \frac{\partial p}{\partial z}\nabla_z \alpha = -\rho g \nabla_z \alpha = -\rho g \nabla_z \left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho}\nabla_z(\rho g) = -\alpha \nabla_z \frac{\partial p}{\partial z}\right)$$

これをさらにp座標系の式に書き換えると、$\boldsymbol{k} \times (1/\rho)\nabla_z p = \boldsymbol{k} \times \nabla_p \Phi = f_0 \boldsymbol{V}_g$　（$\boldsymbol{V}_g$は 2 次元地衡風、Φはジオポテンシャル）に注意して

$$\boldsymbol{S}_h = -\boldsymbol{k} \times \frac{\partial}{\partial z}(\alpha \nabla_z p) = -\boldsymbol{k} \times \frac{\partial}{\partial z}\left(\nabla_p \Phi\right) = -f_0 \frac{\partial \boldsymbol{V}_g}{\partial z} = f_0 \rho g \frac{\partial \boldsymbol{V}_g}{\partial p} \tag{5.1.3}$$

これより、傾圧ベクトルの水平成分 $\boldsymbol{S}_h$ は温度風（地衡風の鉛直シアー、第 3 章参照）に比例することがわかる。さらに気温Tと温度風の関係（第 3 章）を用いてこれを書き換えれば、

$$\boldsymbol{S}_h = -g\boldsymbol{k} \times \nabla_p (\ln T) \tag{5.1.4}$$

の関係が得られる。すなわち、傾圧ベクトルの水平成分は温度風ベクトルと向きが逆で、高温域を左手に見るベクトルであることがわかる。このことより、大気の傾圧性は、高温域で上昇し低温域で下降するような鉛直循環を強める傾向があることがわかる。これは第 4 章の循環定理に関して見られた性質にほかならない。

次に、傾圧ベクトルの鉛直成分について考える。(5.1.2) 式より、傾圧ベクトルの鉛直成分は

$$S_z = \boldsymbol{k}\cdot(\nabla_z p \times \nabla_z \alpha) = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{5.1.5}$$

である。これはz座標系の渦度方程式（第 4 章）の傾圧項に対応する。これをp座標系に書き換えると、第 2 章の座標変換を用いて

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_p + \rho g \frac{\partial p}{\partial p}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p = \rho\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_p$$

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)_z = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)_p + \rho g \frac{\partial \alpha}{\partial p}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p = \frac{R}{p}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_p + \rho \frac{\partial \alpha}{\partial p}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_p$$

等から、

$$S_z = \frac{\rho R}{p}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_p\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_p - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_p\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_p\right] \tag{5.1.6}$$

すなわち

$$S_z = \left(\nabla_p \Phi \times \nabla_p \ln T\right)_z = \boldsymbol{k}\cdot\left(\nabla_p \Phi \times \nabla_p \ln T\right) \tag{5.1.7}$$

が得られる。

傾圧ベクトルの鉛直成分は、傾圧性による渦度ベクトルの鉛直成分（水平渦運動の強さ）の増減を表すものであったから、この関係式を用いて、等圧面上のジオポテンシャル高度の等値線（等高線）と等温線の位置関係から傾圧性擾乱の発達・衰弱を判断することができる。

例えば、等高線と等温線が平行であれば、$S_z = 0$ であり、傾圧性擾乱は発達・衰弱しない。等高線と等温線が交わっていれば、その交わり方により、傾圧性擾乱の発達・衰弱が定性的に推測できる。

図 5.4 は、対流圏中層における典型的な高度場と温度場のパターンと、傾圧ベクトルの鉛直成分を示している。この図で特徴的なのは、温度場の位相が高度場の位相より少し遅れていることで、トラフの位置で寒気移流、リッジの位置で暖気移流がある。そしてここでは

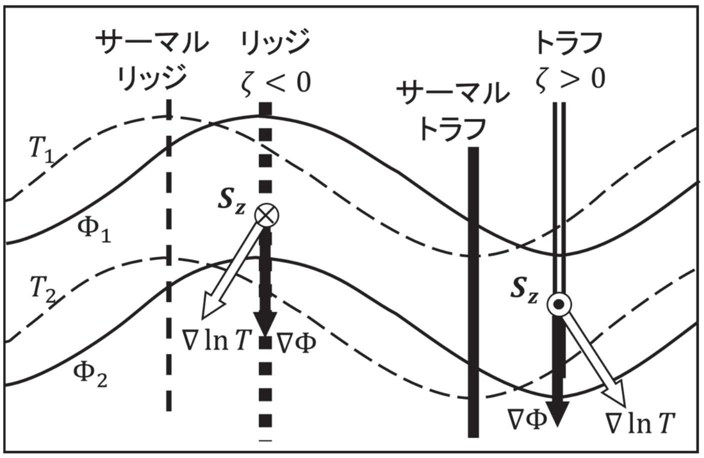


図 5.4　対流圏中層の高度場（実線）と温度場（破線）、それらの水平傾度ベクトル（それぞれ黒矢印と白抜き矢印）、及び傾圧ベクトルの鉛直成分（S_z）の模式図。（栗原 1979 に基づく）

・トラフでは S_z は上向きで低気圧性の渦を強める（相対渦度ζを増大させる）

・リッジでは S_z は下向きで高気圧性の渦を強める（相対渦度ζを減少させる）

これらにより、この図の場合は波動擾乱が発達することがわかる。

【問題】 $\nabla_p\Phi$が等圧面上の 2 次元の地衡風ベクトル$\boldsymbol{V}_g$に関係していることを用いて、地衡風による水平温度移流$-\boldsymbol{V}_g\cdot\nabla_p T$ と傾圧ベクトルの鉛直成分S_zとの関係を説明せよ。

5.2 準地衡風近似

5.2.1 事前準備

前節では、傾圧大気では傾圧性を緩和する方向に運動が生じることを確認したが、予報を行うには、時間変化を量的に見積もる必要がある。ここでは方程式系に準地衡風近似を導入するにあたって、まず、第 2 章において気圧座標系・f平面近似で示したプリミティブ方程式系を、コリオリパラメータfの緯度依存性も含めた形で、ベクトル形式で表現する。

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}+f\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{V}=-\nabla_p\Phi+\boldsymbol{F}_r \tag{5.2.1a}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial p}=-\frac{RT}{p} \tag{5.2.1b}$$

$$\nabla_p\cdot\boldsymbol{V}+\frac{\partial\omega}{\partial p}=0 \tag{5.2.1c}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_p+\boldsymbol{V}\cdot\nabla_p T-S_p\omega=\frac{J}{C_p} \tag{5.2.1d}$$

ただし、$\boldsymbol{V}\equiv(u,v,0)$ はp 面上の水平風ベクトル、$\omega\equiv dp/dt$ は鉛直p 速度、$\boldsymbol{F}_r$ は摩擦力、C_pは定圧比熱、J は単位質量当たりの非断熱加熱率を表す。またラグランジュ微分は

$$\frac{d}{dt}=\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_p+\boldsymbol{V}\cdot\nabla_p+\omega\frac{\partial}{\partial p} \tag{5.2.2}$$

と表される。またコリオリパラメータfと静的安定度 S_p は

$$f=f_0+\beta y \qquad \left(f_0\equiv 2\Omega\sin\varphi_0\,,\qquad \beta\equiv\frac{2\Omega\cos\varphi_0}{a}\right) \tag{5.2.3}$$

$$S_p\equiv\frac{RT}{C_p p}-\frac{\partial T}{\partial p}=-T\frac{\partial\ln\theta}{\partial p} \tag{5.2.4}$$

ここで、Ωは地球自転の角速度、aは地球の平均半径、φ_0 は基準緯度、θは温位（$\theta=T(p_0/p)^{R/C_p}$、p_0は基準気圧）である。コリオリパラメータの緯度依存性を、定数βで表している（第 4 章で示したβ平面近似の形）。以下では煩雑になるのを避けるため、$(\partial/\partial t)$ の添え字 p（等圧面上の偏微分であることを示す）は省略する。

これらの方程式系を扱うにあたって、変数を減らすために、熱力学方程式 (5.2.1d) から、温度Tを消去しておきたい。ここで、気圧座標系ではpは独立変数であり、t,x,y によって偏微分すると消えることに注意して、熱力学方程式の両辺に $(-R/p)$ を乗じて、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(-\frac{RT}{p}\right)+\boldsymbol{V}\cdot\nabla_p\left(-\frac{RT}{p}\right)+\frac{R}{p}S_p\omega=-\frac{RJ}{C_p p} \tag{5.2.5}$$

とする。そして、安定度の指標S_pに対し、今後の計算の便宜のため、、

$$S\equiv\frac{R}{p}S_p=-\alpha\frac{\partial\ln\theta}{\partial p}=\frac{R}{p}\left(\frac{RT}{C_p p}-\frac{\partial T}{\partial p}\right)=\frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial p}\left(p\frac{\partial\Phi}{\partial p}-\kappa\Phi\right) \tag{5.2.6}$$

を新たに定義する。ただし、$\kappa=R/C_p$ である。ここでは静力学の式 (5.2.1b) より $T=-(p/R)\,\partial\Phi/\partial p$ であることを使っている。すると熱力学方程式から変形した (5.2.5) は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial p}\right)+\boldsymbol{V}\cdot\nabla_p\left(\frac{\partial\Phi}{\partial p}\right)+S\omega=-\frac{R}{p}\frac{J}{C_p} \tag{5.2.7}$$

と、ジオポテンシャルΦで表すことができる。

以上の結果を用いたうえ、摩擦と非断熱加熱がない（$\boldsymbol{F}_r=0$、$J=0$）とすると、プリミティブ方程式系は以下のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\omega\frac{\partial u}{\partial p}-fv=-\frac{\partial\Phi}{\partial x} \tag{5.2.8a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\omega\frac{\partial v}{\partial p}+fu=-\frac{\partial\Phi}{\partial y} \tag{5.2.8b}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial\omega}{\partial p}=0 \tag{5.2.8c}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial p}+S\omega=0 \tag{5.2.8d}$$

【問題】方程式系 (5.2.8a-d) が、次のエネルギー保存則を満たすことを示せ。

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\nabla_p\cdot[(E+\Phi)\boldsymbol{V}]+\frac{\partial}{\partial p}[(E+\Phi)\omega]=0$$

ただし、

$$E=\frac{1}{2}(u^2+v^2)+C_pT$$

（ヒント： (5.2.8d) 式の代わりに、元の (5.2.1d) 式と (5.2.1b) 式を用いよ。ただし $J=0$ に注意。）

5.2.2 中緯度の総観規模擾乱を対象としたスケールアナリシスと変数の無次元化

中緯度の総観規模擾乱を対象にして、上のプリミティブ方程式系をさらに近似することを考える。スケールアナリシスに基づく近似は、既に第2章でプリミティブ方程式系を導出する際にも行ったが、この第 5 章ではさらに、地衡風バランスとそこからのずれを意識する。ここで再び総観規模擾乱の気圧座標系における代表的なスケールを見積もると、以下のようになる。

水平スケール	L～10^6 m
鉛直スケール	P～10^3 hPa = 10^5 Pa

水平風速	U ～10 m s^{-1}
地球の半径	a ～10^7 m
コリオリパラメータ	f_0 ～10^{-4} s^{-1}

中緯度の総観規模擾乱に伴う運動では、近似的に地衡風バランスが成り立っていることが知られている。これは運動方程式

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}+f\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{V}=\nabla_p\Phi$$

において、コリオリ項・気圧傾度力と比較して加速度項が小さいということである。第 3 章でも行ったように、加速度項とコリオリ項のスケールの比から定義された

$$\frac{|d\boldsymbol{V}/dt|}{|f\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{V}|}\sim\frac{U^2/L}{f_0U}=\frac{U}{f_0L}\equiv Ro \tag{5.2.9}$$

はロスビー数（Rossby number）であり（第 2 章付録 2A、第 3.4 節、第 4.3 節も参照）、中緯度総観規模現象では Ro～10^{-1} である。これは、総観規模現象の相対渦度の大きさ（U/L）が惑星渦度（f_0）に対して 1/10 程度（総観規模低気圧に伴う風の回転速度が地球自転の 1/10 程度）であることも意味する。あとでこのRoで方程式系を摂動展開することによって、近似的な方程式系を導く（本章で無次元化と摂動展開を用いることについて、付録 5A も参照）。

摂動展開の前に、以下の処理を行う。ここで用いるプリミティブ方程式系は多変数なので、それらの各項を比較するには、適切なスケールパラメータを導入して各変数を無次元化するとともに 1 の程度の量にしておく必要がある。例えばx方向の風速uをそのまま使うのではなく、無次元化し大きさを 1 程度としたu^*を導入する。ここではまず、無次元化した変数 $x^*,y^*,p^*,\ u^*,v^*$ を導入して、位置（座標）及び速度を次のように表す。

$$x=Lx^*,\qquad y=Ly^*,\qquad p=Pp^* \tag{5.2.10}$$

$$u=Uu^*,\qquad v=Uv^* \tag{5.2.11}$$

このようにすると、$x^*,y^*,p^*,\ u^*,v^*$はそれぞれ、1 程度の量となる。また、U、L、Pを用いて時間t及び鉛直 p 速度の次元を持つ量を表現すると、L/U～10^5 s ～1 日、UP/L～1 Pa s^{-1} （z座標系では 0.1m s^{-1} 程度）を得る。これらを時間及び鉛直p速度 ω の代表的スケールとして、

$$t=(L/U)t^* \tag{5.2.12}$$

$$\omega=(UP/L)\omega^* \tag{5.2.13}$$

となるように、無次元化し 1 程度の量となった時間 t^*及び鉛直 p 速度 ω^*を導入する。

【注意】ここではωの代表的スケールとしては、連続の式 (5.2.8c) を用いて UP/L～1 Pa s^{-1} を得ている。ただし、後の第 5.2.3 項で論じられるように、現実の総観規模現象では、0 次の方程式系または地衡風（水平運動の代表的な大きさは 10 m s^{-1}）の水平発散はほぼ 0 であり、ωの 0 次の項 ω_0 は 0 である。連続の式において鉛直発散とバランスするのは 1 次の方程式系または非地衡風（代表的な大きさは 1 m s^{-1}）の水平発散を考える必要がある。この非地衡風の大きさを用いると、ωの代表的スケールは 1 桁小さい 0.1 Pa s^{-1}（z座標系では 10^{-2} m s^{-1} 程度）となる。

次に、ジオポテンシャルΦと静的安定度の指標S（(5.2.6) 式）の無次元化を行う。ジオポテンシャルの定義 $\Phi = gz$ より、Φは $m^2\,s^{-2}$ すなわち速度の 2 乗の次元を持つ。するとこれをスケールパラメータ U^2、あるいは地衡風バランスを意識するならf_0UL を用いて無次元化すれば良さそうに見える。ただし、運動方程式 (5.2.8a) や (5.2.8b) を見ると、左辺の移流項やコリオリ項は水平風速に比例し、運動がなければ 0 となるが、右辺で運動に関係するのはΦの水平変動成分であり、運動がなくてもΦは 0 になるわけではない（例えば 500 hPa 等圧面上で運動がない場合、等圧面高度の傾きはないが、等圧面高度は 0 ではない）。そこで、ジオポテンシャルΦを、等圧面での x, y, t に関する平均値 $\tilde{\Phi}(p)$ と偏差 Φ' に分ける。

$$\Phi(x, y, p, t) = \tilde{\Phi}(p) + \Phi'(x, y, p, t) \tag{5.2.14}$$

現実の大気においては、平均的なジオポテンシャル高度（$= \tilde{\Phi}(p)/g$）は例えば 850 hPa では 1500 m 程度、500 hPa では 5000 m 程度であり、地衡風バランスにおいては偏差Φ'（右辺第 2 項）の水平微分がコリオリ項とバランスすることになるので、方程式系におけるΦとして考慮すべきは Φ' である。これを踏まえて、

$$\Phi^* = \frac{1}{f_0UL}\Phi' \tag{5.2.15}$$

によりジオポテンシャル（の水平変動部分）を無次元化したΦ^*を導入する。

(5.2.6) 式で定義した静的安定度の指標 S についても、ジオポテンシャルの分割に対応して、以下のように分割される。

$$S(x, y, p, t) = \tilde{S}(p) + S'(x, y, p, t) \tag{5.2.16a}$$

$$\tilde{S} = \frac{1}{p}\frac{d}{dp}\left(p\frac{d\tilde{\Phi}}{dp} - \kappa\tilde{\Phi}\right) = -\tilde{\alpha}\frac{d}{dp}\ln\tilde{\theta} \tag{5.2.16b}$$

$$S' = \frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial p}\left(p\frac{\partial\Phi'}{\partial p} - \kappa\Phi'\right) \tag{5.2.16c}$$

(5.2.16b) の $\tilde{S}$ は領域平均の静的安定度で、次元はジオポテンシャルを気圧で 2 回除した形になっている。このため、$p^2\tilde{S}$ がΦと同様に速度の 2 乗の次元を持つ。そこで、$p^2\tilde{S}/U^2$ から次の無次元変数が得られる。

$$Ri \equiv \frac{p^2\tilde{S}}{U^2} = p\frac{d}{dp}\left(p\frac{d\tilde{\Phi}}{dp} - \kappa\tilde{\Phi}\right)\frac{1}{U^2} = -\frac{p^2\tilde{\alpha}}{U^2}\frac{d}{dp}\ln\tilde{\theta} \tag{5.2.17}$$

これはリチャードソン数（Richardson number）に対応するもので、静的安定度に関係する無次元数である。対流圏の平均的な気温として $\tilde{T}$ = 250K をとると 10^2 程度の大きさで、p^2 に依存する関数となっている。ここで、ロスビー数 Roが 0.1 程度の値なので、Ro^2Ri が無次元でありかつ 1 程度の値を取ることに注意して、次のように$\tilde{S}$を無次元化し 1 程度の値とした S^*を導入する。

$$S^* = \frac{Ro^2Ri}{p^{*2}} = \frac{Ro^2}{p^{*2}}\frac{p^2\tilde{S}}{U^2} = \frac{Ro^2P^2}{U^2}\tilde{S}\,,\quad \text{すなわち}\quad \tilde{S} = \frac{U^2Ri}{p^2} = \frac{U^2}{P^2}\frac{Ri}{p^{*2}} \tag{5.2.18}$$

最後に、コリオリパラメータの緯度依存部分の無次元化を考える。

$$f = f_0 + \beta y = f_0\left(1 + \frac{\beta}{f_0}Ly^*\right) = f_0\left(1 + \frac{L\cot\varphi_0}{a}y^*\right)$$

における括弧内は無次元量で、φ_0 =45° のとき $\cot\varphi_0 = 1$ であること、及び a～10^7m、L～10^6m に注意すると、括弧内第 2 項は 10^{-1} 程度で、これはロスビー数 Ro 程度である。そこでまた、無次元で大きさ 1 程度の β^* を導入して、以下のように置く。

$$f = f_0(1 + Ro\,\beta^* y^*) \tag{5.2.19}$$

$$\beta = \frac{Ro\,f_0}{L}\beta^* = \frac{U}{L^2}\beta^* \tag{5.2.20}$$

以上の無次元変数を用いて方程式 (5.2.8a-d) を無次元化すると、次の方程式系が得られる。

$$Ro\left(\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \omega^*\frac{\partial u^*}{\partial p^*}\right) + \frac{\partial \Phi^*}{\partial x^*} - (1 + Ro\,\beta^* y^*)v^* = 0 \tag{5.2.21a}$$

$$Ro\left(\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^*\frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \omega^*\frac{\partial v^*}{\partial p^*}\right) + \frac{\partial \Phi^*}{\partial y^*} + (1 + Ro\,\beta^* y^*)u^* = 0 \tag{5.2.21b}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial \omega^*}{\partial p^*} = 0 \tag{5.2.21c}$$

$$Ro\left(\frac{\partial}{\partial t^*} + u^*\frac{\partial}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial}{\partial y^*}\right)\frac{\partial \Phi^*}{\partial p^*} + \omega^*\left\{S^* + \frac{Ro}{p^*}\frac{\partial}{\partial p^*}\left(p^*\frac{\partial \Phi^*}{\partial p^*} - \kappa\Phi^*\right)\right\} = 0 \tag{5.2.21d}$$

この方程式系では、*のついた 1 程度の大きさの無次元変数と、摂動パラメータとしてのロスビー数 Ro のみで表現されていること、及び、$Ro = 0$ とした場合は地衡風の関係にほかならなくなることに、注意が必要である。これについて、次項でさらに検討する。

【参考】(5.2.8d) 式から (5.2.21d) 式を求めてみる。

(5.2.8d) 式に、(5.2.14) と (5.2.16a-c) を用いて、下のように書き換える。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial \Phi'}{\partial p} + \frac{\omega}{p^2}\left[p\frac{d}{dp}\left(p\frac{d\widetilde{\Phi}}{dp} - \kappa\widetilde{\Phi}\right) + p\frac{\partial}{\partial p}\left(p\frac{\partial \Phi'}{\partial p} - \kappa\Phi'\right)\right] = 0$$

これを無次元変数とRiで書き換えると

$$\frac{U}{L}\left(\frac{\partial}{\partial t^*} + u^*\frac{\partial}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial}{\partial y^*}\right)\left(\frac{f_0UL}{P}\frac{\partial \Phi^*}{\partial p^*}\right) + \frac{UP/L}{P^2}\frac{\omega^*}{p^{*2}}\left\{Ri\,U^2 + (f_0UL)p^*\frac{\partial}{\partial p^*}\left(p^*\frac{\partial \Phi^*}{\partial p^*} - \kappa\Phi^*\right)\right\} = 0$$

全体に $P/(f_0^2UL)$ をかけると、

$$\frac{U}{f_0L}\left(\frac{\partial}{\partial t^*} + u^*\frac{\partial}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial}{\partial y^*}\right)\frac{\partial \Phi^*}{\partial p^*} + \frac{\omega^*}{p^{*2}}\left\{\frac{U^2}{f_0^2L^2}Ri + \frac{Up^*}{f_0L}\frac{\partial}{\partial p^*}\left(p^*\frac{\partial \Phi^*}{\partial p^*} - \kappa\Phi^*\right)\right\} = 0$$

ここで、ロスビー数 $Ro = U/f_0L$ を用いれば、

$$Ro\left(\frac{\partial}{\partial t^*} + u^*\frac{\partial}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial}{\partial y^*}\right)\frac{\partial \Phi^*}{\partial p^*} + \frac{\omega^*}{p^{*2}}\left\{Ro^2Ri + Ro\,p^*\frac{\partial}{\partial p^*}\left(p^*\frac{\partial \Phi^*}{\partial p^*} - \kappa\Phi^*\right)\right\} = 0$$

さらに (5.2.18) より$Ro^2Ri/p^{*2} = S^*$を用いると、(5.2.21d) が得られる。

【問題】(5.2.8a-c) 式から (5.2.21a-c) 式を求めよ。

5.2.3 プリミティブ方程式系の摂動展開

ここでは、方程式の近似を系統的に行う方法として、**摂動法**を用いる。これは、元の方程式が微小なパラメータ ε を含んでいるとき、すべての従属変数を ε のべき級数で展開して方程式に代入し、ε の次数で整理することによって、展開係数に関する一連の方程式を得て、それにより近似解を求める方法である（摂動法については例えば 柴田 2009 を参照)。前項で例えばx方向の風速 u に対して無次元化し大きさを 1 程度としたu^*を導入したが、さらに

$$u^* = u_0^* + \varepsilon u_1^* + \varepsilon^2 u_2^* + \cdots$$

のようにべき級数に展開して方程式系に適用して、各項の係数 u_0^*、u_1^*、…を求めることにより、u^*の近似解を得る。ここではεとして前項で導入したロスビー数 Roを用いて、従属変数 u^*、v^*、ω^*、Φ^* を

$$u^* = u_0^* + Ro\, u_1^* + Ro^2\, u_2^* + \cdots \tag{5.2.22}$$

のように展開し、前項で求めた無次元方程式系 (5.21a-d) 式に代入する。例えば (5.2.21a) 式は

$$Ro\left[\frac{\partial(u_0^* + Ro\, u_1^* + \cdots)}{\partial t^*} + (u_0^* + Ro\, u_1^* + \cdots)\frac{\partial(u_0^* + Ro\, u_1^* + \cdots)}{\partial x^*} + (v_0^* + Ro\, v_1^* + \cdots)\frac{\partial(u_0^* + Ro\, u_1^* + \cdots)}{\partial y^*}\right.$$

$$\left. + (\omega_0^* + Ro\, \omega_1^* + \cdots)\frac{\partial(u_0^* + Ro\, u_1^* + \cdots)}{\partial p^*}\right] + \frac{\partial(\Phi_0^* + Ro\, \Phi_1^* + \cdots)}{\partial x^*}$$

$$- (1 + Ro\, \beta^* y^*)(v_0^* + Ro\, v_1^* + \cdots) = 0$$

となる。これは摂動パラメータRoに関する恒等式なので、Roのすべての次数の係数が 0 でなければならない。このことを用いて、各係数を 0 とおいた方程式系を得る。同様のことを (5.2.21b-d) についても行い、それらをさらにRoのべき乗で整理する。すると 0 次と 1 次については、以下の方程式系が得られる。

・ 0 次の近似方程式系：

$$v_0^* = \frac{\partial \Phi_0^*}{\partial x^*}, \qquad u_0^* = -\frac{\partial \Phi_0^*}{\partial y^*}$$

$$\frac{\partial u_0^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_0^*}{\partial y^*} + \frac{\partial \omega_0^*}{\partial p^*} = 0, \qquad \omega_0^* = 0$$

・ 1 次の近似方程式系：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t^*} + u_0^*\frac{\partial}{\partial x^*} + v_0^*\frac{\partial}{\partial y^*} + \omega_0^*\frac{\partial}{\partial p^*}\right)u_0^* + \frac{\partial \Phi_1^*}{\partial x^*} - v_1^* - \beta^* y^* v_0^* = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t^*} + u_0^*\frac{\partial}{\partial x^*} + v_0^*\frac{\partial}{\partial y^*} + \omega_0^*\frac{\partial}{\partial p^*}\right)v_0^* + \frac{\partial \Phi_1^*}{\partial y^*} + u_1^* + \beta^* y^* u_0^* = 0$$

$$\frac{\partial u_1^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_1^*}{\partial y^*} + \frac{\partial \omega_1^*}{\partial p^*} = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t^*} + u_0^*\frac{\partial}{\partial x^*} + v_0^*\frac{\partial}{\partial y^*}\right)\frac{\partial \Phi_0^*}{\partial p^*} + \omega_1^* S^* + \omega_0^*\left\{\frac{1}{p^*}\frac{\partial}{\partial p^*}\left(p^*\frac{\partial \Phi_0^*}{\partial p^*} - \kappa\Phi_0^*\right)\right\} = 0$$

こうして得られた方程式系において、各変数を次元のある量に戻す。例えばuは

$$u_0 = U u_0^*, \qquad u_1 = Ro\, U u_1^*, \qquad u_2 = Ro^2 U u_2^*, \qquad \cdots$$

のように次元のある u_0、u_1、u_2、…を定義する（実際には 1 次まで)。これは (5.2.11) (5.2.22) より

$$u = Uu^* = Uu_0^* + Ro\,Uu_1^* + Ro^2Uu_2^* + \cdots$$

であることから、

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

に対応する。またΦについては (5.2.14) と (5.2.15) より、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi'}{\partial x} = f_0 UL\frac{\partial \Phi^*}{\partial x} = f_0 UL\frac{\partial \Phi_0^*}{\partial x} + Ro\, f_0 UL\frac{\partial \Phi_1^*}{\partial x} + Ro^2 f_0 UL\frac{\partial \Phi_2^*}{\partial x} + \cdots$$

などとなるので、

$$\Phi_0 = f_0 UL\Phi_0^*, \qquad \Phi_1 = Ro\, f_0 UL\Phi_1^*, \qquad \Phi_2 = Ro^2 f_0 UL\Phi_2^*, \qquad \cdots$$

のように次元のあるΦ_0、Φ_1、…を定義すると、

$$\Phi' = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + \cdots$$

に対応する。

すると、0 次の近似方程式系は以下のようになる。

$$f_0 v_0 = \frac{\partial \Phi_0}{\partial x}\ , \qquad f_0 u_0 = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \tag{5.2.23a, b}$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0\ , \qquad \omega_0 = 0 \tag{5.2.23c, d}$$

なお、 (5.2.23a) (5.2.23b) は地衡風バランス（第 3 章）に相当するものだが、ここではコリオリパラメータが定数 f_0 になっている。この条件は水平スケールが 10^6 m 程度の場合に成り立つ（栗原（1979）では第 1 種地衡風と呼んでいる）。これは非発散（(5.2.23c) 参照）であり、またこれによる鉛直運動は 0（(5.2.23d) 参照）である。なお、第 3 章で定義した地衡風は、コリオリパラメータが f で緯度に依存していたので、水平発散は $\partial u/\partial x + \partial v/\partial y = -(\beta/f)v_g$ となり、小さいが 0 ではない。これは水平スケールが 10^7 m 程度の超長波の場合に用いるのに適している（栗原（1979）では第 2 種地衡風と呼んでいる）。

次に、 1 次の近似方程式系を次元のある量に戻すと、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0\frac{\partial}{\partial x} + v_0\frac{\partial}{\partial y}\right)u_0 - f_0 v_1 - \beta y v_0 = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \tag{5.2.24a}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0\frac{\partial}{\partial x} + v_0\frac{\partial}{\partial y}\right)v_0 + f_0 u_1 + \beta y u_0 = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \tag{5.2.24b}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial \omega_1}{\partial p} = 0 \tag{5.2.24c}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0\frac{\partial}{\partial x} + v_0\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial \Phi_0}{\partial p} + S(p)\omega_1 = 0 \tag{5.2.24d}$$

となる。この式においてu_0、v_0、ω_0は 0 次の方程式系の解を用いる。ここで $S(p)$ は (5.2.18) 式で $\tilde{S}$ を無次元化した静的安定度S^*を次元のある量に戻したもので、(5.2.16b) 式の $\tilde{S}$ と同様の形の

$$S(p) = \frac{1}{p}\frac{d}{dp}\left(p\frac{d\tilde{\Phi}}{dp} - \kappa\tilde{\Phi}\right) = -\tilde{\alpha}\frac{d}{dp}\ln\tilde{\theta} \tag{5.2.25}$$

である。これは (5.2.6) 式のSと類似しているが、(5.2.16b) 式の$\tilde{S}$に対応し、等圧面上のジオポテンシャルの領域平均 $\tilde{\Phi}$、または同様の領域平均の温位 $\tilde{\theta}$ と比容 $\tilde{\alpha}$ に関係した量で、安定度の局所的な変動を平滑化している。そして p の関数である。

ここで得られた 1 次の近似方程式系 (5.2.24a-d) を、**準地衡風方程式系**（quasi-geostrophic equations）と呼ぶ。f面近似のプリミティブ方程式系 ((5.2.1a-d) のコリオリパラメータ f を定数 f_0としたもの）との違いをまとめると以下のようになる。

（1） 地衡風としては、コリオリパラメータ f を定数 f_0 とした地衡風を用いる。

（2） コリオリパラメータfは緯度依存性を考慮し、定数βを用いて表す。（**$\boldsymbol{\beta}$平面近似**）

（3） 安定度としては、領域平均した値（気圧のみの関数）を用いる。

（4） 運動方程式と熱力学方程式の移流項について鉛直移流は省略する。

（5） 水平移流（及び渦度）を計算するための風は 0 次の水平風（地衡風）とする。

（6） 鉛直運動の計算には精度を高めた 1 次の水平風 u_1, v_1 を用いる。

5.3 準地衡風方程式系

前節で得られた 0 次の方程式系 (5.2.23a-d) と 1 次の方程式系（準地衡風方程式系） (5.2.24a-d) を、地衡風成分と非地衡風成分を用いて書き換えておく。

まず、0 次の風 u_0, v_0 と ω_0 は地衡風バランスにあり連続の式を満たし、Φ_0 から決まる（5.2.23a-d)。この u_0, v_0 を地衡風成分 u_g, v_g に置き換える。

$$u_g = -\frac{1}{f_0}\frac{\partial \Phi_0}{\partial y}, \qquad v_g = \frac{1}{f_0}\frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \tag{5.3.1a, b}$$

1 次の水平風 u_1 と v_1 には地衡風の 1 次の項（すなわちジオポテンシャルの 1 次の項 Φ_1 による地衡風）も含まれているので、それを差し引いて、非地衡風を

$$u_a = u_1 + \frac{1}{f_0}\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}, \qquad v_a = v_1 - \frac{1}{f_0}\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \tag{5.3.2a, b}$$

と定義する（非地衡風成分の定義については付録 5A も参照)。これは非地衡風成分の 1 次まで（実質的には 1 次のみ）の項となる。また、鉛直 p 速度の 1 次の項 ω_1 は非地衡風によって生じるので、それをω_aと書くことにする。このように書き換えると、準地衡風方程式系 (5.2.24a-d) は、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_g\frac{\partial}{\partial x} + v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)u_g - f_0 v_a - \beta y v_g = 0 \tag{5.3.3a}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_g\frac{\partial}{\partial x} + v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)v_g + f_0 u_a + \beta y u_g = 0 \tag{5.3.3b}$$

$$\frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} + \frac{\partial \omega_a}{\partial p} = 0 \tag{5.3.3c}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_g\frac{\partial}{\partial x} + v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial \Phi_0}{\partial p} + S(p)\omega_a = 0 \tag{5.3.3d}$$

と表すことができる。以下では主にこの形式を用いる。

なお、鉛直p速度ωについては、0 次の項 ω_0 は (5.2.23d) で示されているように 0 であり、また地衡風の 1 次の項も 0 なので、$\omega_a = \omega$ である。

5.3.1 準地衡風渦度方程式

ここでは、渦度方程式（第 4 章）を準地衡風近似の枠組みで考える。地衡風渦度の鉛直成分

$$\zeta_g \equiv \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} = \frac{1}{f_0}\nabla_p^2 \Phi_0 \tag{5.3.4}$$

の時間変化を表すために、まず、(5.3.3a) 式をyで、(5.3.3b) 式をxで、それぞれ偏微分する。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_g\frac{\partial}{\partial x} + v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial u_g}{\partial y} + \frac{\partial u_g}{\partial y}\left(\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y}\right) - f_0\frac{\partial v_a}{\partial y} - \beta y\frac{\partial v_g}{\partial y} - \beta v_g = 0 \tag{5.3.5a}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_g\frac{\partial}{\partial x} + v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial v_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial x}\left(\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y}\right) + f_0\frac{\partial u_a}{\partial x} + \beta y\frac{\partial u_g}{\partial x} = 0 \tag{5.3.5b}$$

ただし、(5.2.23c) より

$$\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} = 0 \tag{5.3.6}$$

であることから、(5.3.5a) 式と (5.3.5b) 式の差を取り、(5.3.3c) 式も考慮すると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_g\frac{\partial}{\partial x} + v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y}\right) + \beta v_g - f_0\frac{\partial \omega_a}{\partial p} = 0 \tag{5.3.7}$$

従って

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_g\frac{\partial}{\partial x} + v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\zeta_g + \beta v_g - f_0\frac{\partial \omega_a}{\partial p} = 0 \tag{5.3.8}$$

さらに、$\beta v_g = v_g\,\partial f/\partial y$ である（ここでは f は定数 f_0 ではない）ことも考慮すると、

$$\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} + \left(u_g\frac{\partial}{\partial x} + v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)(\zeta_g + f) = f_0\frac{\partial \omega_a}{\partial p} \tag{5.3.9}$$

これを**準地衡風渦度方程式**（quasi-geostrophic vorticity equation）と呼ぶ。これは、ある場所における地衡風相対渦度の時間変化が、地衡風による絶対渦度の移流と、気柱の伸縮に伴う相対渦度の変化の和として表されることを示している。

5.3.2 準地衡風オメガ方程式

準地衡風渦度方程式 (5.3.9) 式には、渦度の時間変化の項と鉛直運動 ω_a の項があり、それ以外はある時刻の観測データでわかる項である。ここでは鉛直運動の分布を同じ時刻の観測データで表せるようにしたい。そのためには、時間微分の項を消去して、診断方程式にする必要がある。

まず、準地衡風渦度方程式 (5.3.9) 式をp で偏微分する。

$$\frac{\partial^2}{\partial p \partial t}\zeta_g = -\frac{\partial}{\partial p}\left[\left(u_g\frac{\partial}{\partial x} + v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)(\zeta_g + f)\right] + f_0\frac{\partial^2 \omega_a}{\partial p^2} \tag{5.3.10}$$

一方、熱力学方程式 (5.3.3d) にラプラシアン ∇_p^2 を作用させる。

$$-\frac{\partial^2}{\partial p\partial t}\nabla_p^2\Phi_0=\nabla_p^2\left[\left(u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial\Phi_0}{\partial p}\right]+S(p)\nabla_p^2\omega_a \tag{5.3.11}$$

(5.3.10) 式にf_0 をかけ、(5.3.11) 式と(5.3.4) 式も使うと、時間微分の項が消去できて、

$$\nabla_p^2\left[\left(u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial\Phi_0}{\partial p}\right]+S(p)\nabla_p^2\omega_a-f_0\frac{\partial}{\partial p}\left[\left(u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)(\zeta_g+f)\right]+f_0^2\frac{\partial^2\omega_a}{\partial p^2}=0$$

と書ける。これを ω_a に関して整理すると

$$\left(\nabla_p^2+\frac{f_0^2}{S(p)}\frac{\partial^2}{\partial p^2}\right)\omega=\frac{f_0}{S(p)}\frac{\partial}{\partial p}\left[\left(u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)(\zeta_g+f)\right]+\frac{1}{S(p)}\nabla_p^2\left[\left(u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-\frac{\partial\Phi_0}{\partial p}\right)\right] \tag{5.3.12}$$

となる。ここでは ω_a を単にωとした。この式はωに関する楕円型の 2 階の線形偏微分方程式である。右辺はある時刻のジオポテンシャルの分布で決まり、そこから左辺の鉛直運動の分布を求める式と見ることができる。また、その鉛直運動は、絶対渦度移流の鉛直傾度（右辺第 1 項）と、$\partial\Phi_0/\partial p$ （層厚）の水平移流（水平温度移流、右辺第 2 項）で決まると解釈できる。(5.3.12) 式を**準地衡風オメガ方程式**（quasi-geostrophic omega equation）と呼ぶ。

5.3.3 ジオポテンシャル傾向方程式

準地衡風オメガ方程式は、準地衡風渦度方程式 (5.3.9) 式と熱力学方程式 (5.3.3d) 式から渦度の時間変化の項を消去した。今度は同じ式から鉛直運動を消去する。

まず (5.3.3d) に $f_0/S(p)$ をかけ p で偏微分する。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0}{S(p)}\frac{\partial\Phi_0}{\partial p}\right)+\left(\frac{\partial u_g}{\partial p}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial v_g}{\partial p}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{f_0}{S(p)}\frac{\partial\Phi_0}{\partial p}\right)+f_0\frac{\partial\omega_a}{\partial p}=0 \tag{5.3.13}$$

この式で時間微分の項を分離することを意識すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0}{S(p)}\frac{\partial\Phi_0}{\partial p}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{f_0}{S(p)}\left(u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial\Phi_0}{\partial p}\right]+f_0\frac{\partial\omega_a}{\partial p}=0 \tag{5.3.14}$$

と変形できる。これと (5.3.9) 式から鉛直運動の項を消去する。ただし (5.3.4) 式も使って

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{f_0}\nabla_p^2\Phi_0+\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0}{S(p)}\frac{\partial\Phi_0}{\partial p}\right)\right]+\left(u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)(\zeta_g+f)+\frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{f_0}{S(p)}\left(u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial\Phi_0}{\partial p}\right]=0 \tag{5.3.15}$$

とする。さらに f_0 をかけて変形すると

$$\left[\nabla_p^2+\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0^2}{S(p)}\frac{\partial}{\partial p}\right)\right]\frac{\partial\Phi_0}{\partial t}=-f_0\left(u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)(\zeta_g+f)-\frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{f_0^2}{S(p)}\left(u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial\Phi_0}{\partial p}\right] \tag{5.3.16}$$

または

$$\left[\nabla_p^2+\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0^2}{S(p)}\frac{\partial}{\partial p}\right)\right]\frac{\partial\Phi_0}{\partial t}=-f_0\left(u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{f_0}\nabla_p^2\Phi_0+f\right)+\frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{f_0^2}{S(p)}\left(u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-\frac{\partial\Phi_0}{\partial p}\right)\right] \tag{5.3.17}$$

となる。

(5.3.17) 式の左辺はジオポテンシャル変化傾向 $\partial\Phi_0/\partial t$ に楕円型偏微分作用素を作用させたもので、

右辺はある時刻のジオポテンシャルの空間微分のみから計算できる量である。従ってこれは、場の変化傾向をある時刻のジオポテンシャルのみから計算する式となっている。これを**ジオポテンシャル傾向方程式**（geopotential tendency equation）と呼ぶ。そしてその変化傾向の強制力を与えるのは、絶対渦度の移流（右辺第 1 項）と、層厚移流（水平温度移流）の鉛直微分（右辺第 2 項）であることがわかる。

5.4 準地衡風理論による温帯低気圧の理解

前節のジオポテンシャル傾向方程式において、左辺のジオポテンシャルの時間微分を改めて変数χとする。

$$\chi \equiv \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} \tag{5.4.1}$$

前節までで導出した準地衡風オメガ方程式 (5.3.12) とジオポテンシャル傾向方程式 (5.3.16) を再掲する。

$$\left(\nabla_p^2 + \frac{f_0^2}{S(p)}\frac{\partial^2}{\partial p^2}\right)\omega = \frac{f_0}{S(p)}\frac{\partial}{\partial p}\left[\left(u_g\frac{\partial}{\partial x} + v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)(\zeta_g + f)\right] + \frac{1}{S(p)}\nabla_p^2\left[\left(u_g\frac{\partial}{\partial x} + v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-\frac{\partial \Phi_0}{\partial p}\right)\right] \tag{5.3.12}$$

$$\left[\nabla_p^2 + \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0^2}{S(p)}\frac{\partial}{\partial p}\right)\right]\frac{\partial \Phi_0}{\partial t} = -f_0\left(u_g\frac{\partial}{\partial x} + v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)(\zeta_g + f) - \frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{f_0^2}{S(p)}\left(u_g\frac{\partial}{\partial x} + v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial \Phi_0}{\partial p}\right] \tag{5.3.16}$$

ここに(5.4.1) 式も使い、また $S(p)$ を気圧によらない定数σとすると、両者を比較しやすくなる。

$$\left(\nabla_p^2 + \frac{f_0^2}{\sigma}\frac{\partial^2}{\partial p^2}\right)\omega \quad = \frac{f_0}{\sigma}\frac{\partial}{\partial p}\left[\left(u_g\frac{\partial}{\partial x} + v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)(\zeta_g + f)\right] \quad + \frac{1}{\sigma}\nabla_p^2\left[\left(u_g\frac{\partial}{\partial x} + v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-\frac{\partial \Phi_0}{\partial p}\right)\right] \tag{5.4.2}$$

$$\left(\nabla_p^2 + \frac{f_0^2}{\sigma}\frac{\partial^2}{\partial p^2}\right)\chi \quad = -f_0\left(u_g\frac{\partial}{\partial x} + v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)(\zeta_g + f) \quad + \frac{f_0^2}{\sigma}\frac{\partial}{\partial p}\left(u_g\frac{\partial}{\partial x} + v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-\frac{\partial \Phi_0}{\partial p}\right) \tag{5.4.3}$$

--------- A -------　　　　------------ B ------------　　　　------------- C -------------

両者を比較すると、左辺の A 項は、それぞれ変数ωまたはχに同じ 3 次元ラプラシアンに類似した作用素を作用させたものである。右辺第 1 項（B 項）は地衡風による絶対渦度の移流、右辺第 2 項（C 項）は地衡風による層厚の移流である。ただし p による微分（鉛直微分）が、オメガ方程式では B 項に、傾向方程式では C 項に現れている点が異なる。

この 2 つの式を使って、中緯度の総観規模擾乱の説明ができることになる。

5.4.1 傾向方程式 A 項

最初に、傾向方程式 (5.4.3) の左辺 A 項を考える。上層では偏西風が南北に波打った波動が東西に伝播しているように見えることが多いが、ここでは簡単のため、東西方向だけでなく南北方向及び鉛直方向にも波動状の構造を持った擾乱を考える。

$$\chi(x, y, p, t) = \hat{\chi}(t)\cos\left\{\frac{\pi(p - p_t)}{p_0 - p_t}\right\}\cos kx \cos ly$$

ここで、$\hat{\chi}(t)$ は χ の時間依存性を表すtのみの関数、p_0 は地上気圧、p_t は対流圏上端の気圧、kとlはそれぞれ東西・南北方向の波数である。χの鉛直依存性については、図 5.2 で高度場の位相が地上付近と対流圏上端付近でほぼ逆転することを考慮している。このとき傾向方程式の A 項は、

$$\left(\nabla_p^2 + \frac{f_0^2}{\sigma}\frac{\partial^2}{\partial p^2}\right)\chi = -\left[k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{\sigma}\left(\frac{\pi}{p_0 - p_t}\right)^2\right]\chi$$

となる。そして σ は正である（これを定数とする前は $S(p) = -\tilde{\alpha}\,\partial\ln\tilde{\theta}/\partial p$ であったことに注意）ことを考慮すると、右辺の大括弧内は正なので、

$$\text{A 項} \quad \propto \quad -\chi$$

となる。従って、高度場は傾向方程式の右辺が正であれば低下し、負であれば上昇することになる。

5.4.2 傾向方程式 B 項

傾向方程式 (5.4.3) の右辺第 1 項（B 項）は、地衡風による絶対渦度の移流に関する項で、ベクトル形式で書くと下のようになる。

$$-f_0\boldsymbol{V}_g\cdot\nabla_p(\zeta_g + f) = f_0(-\boldsymbol{V}_g\cdot\nabla_p\zeta_g - v_g\beta)$$

図 5.5 では、これらの符号がどうなるかを、理想化した 500hPa 面の高度場上で示している。図では、流れに沿ってリッジからトラフに向かう領域Ｉと、トラフからリッジに向かう領域Ⅱに分けて示している。

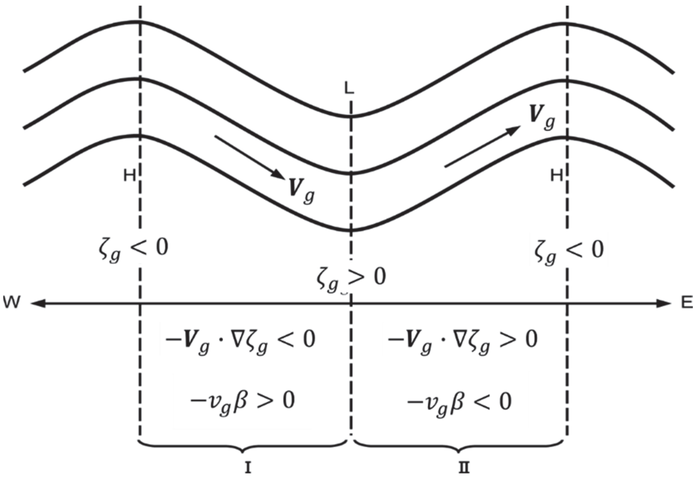


図 5.5　500hPa のジオポテンシャル高度と、相対渦度とその移流、及び惑星渦度移流の分布の模式図。（Holton 1992 に基づく）

a. 地衡風相対渦度移流の効果

地衡風相対渦度 ζ_g はトラフで正の極大、リッジで極小（負の極大）をとる。従って、領域Ｉは流れに沿って相対渦度 ζ_g が増加する領域で、相対渦度傾度ベクトル $\nabla_p\zeta_g$ は図の右側（東）を向くことになる。よって、$-\boldsymbol{V}_g\cdot\nabla_p\zeta_g < 0$ なので、この領域では負の渦度移流があることになる。よって、これは等圧面高度を上昇させる効果を持つ。

一方、領域Ⅱでは、流れに沿って相対渦度 ζ_g が減少しており、相対渦度傾度ベクトル $\nabla_p\zeta_g$ は図の左側（西）を向くことになる。よって、$-\boldsymbol{V}_g\cdot\nabla_p\zeta_g > 0$ なので、この領域では正渦度移流があることになる。よって、これは等圧面高度を低下させる効果を持つ。

領域の境界であるリッジ・トラフでは、相対渦度傾度ベクトル $\nabla_p\zeta_g$ は 0 なので、$\boldsymbol{V}_g\cdot\nabla_p\zeta_g = 0$ で

あり、渦度移流がないので、等圧面高度は変化しない。

以上により、相対渦度移流はトラフやリッジを発達・減衰させることなく、そのパターンを東（図の右側）へと移動させる働きを持つ。

b. 惑星渦度移流の効果

次に、惑星渦度移流の効果を考える。惑星渦度は北半球では北に向かって一定の割合βで増加する。つまり惑星渦度傾度ベクトルは常に北を向き、x成分を持たない。このため地衡風ベクトルとの内積は $v_g\beta$ となる。

領域Ⅰでは、地衡風ベクトルは南を向いているので、$v_g < 0$ であり、$-v_g\beta > 0$ である。よって領域Ⅰにおける惑星渦度移流は等圧面高度を下げるように働く。領域Ⅱでは、地衡風ベクトルが北向きなので、$v_g > 0$ であり、$-v_g\beta < 0$ である。よって領域Ⅱにおける惑星渦度移流は等圧面高度を上昇させるように働く。これはロスビー波（第 4 章・第 7 章）の性質に他ならない。

以上により、惑星渦度移流は、リッジやトラフの高度を変えずに、そのパターンを西（図の左側）へと移動させる働きを持つ。

c. 渦度移流の比較

ここまで述べたように、相対渦度移流と惑星渦度移流は相反する効果を持っており、どちらが大きいかによって高度場の変化パターンが変わる。ここで、ジオポテンシャルの擾乱を $\Phi'(x,y,p,t) = \widehat{\Phi}(p,t)\cos kx \cos ly$ の形にすると、絶対渦度は、

$$\zeta_g + f = \nabla_p^2 \Phi' + f = -\frac{1}{f_0}(k^2 + l^2)\Phi' + f$$

と書ける。これは、絶対渦度に占める相対渦度の寄与が、擾乱の波数の 2 乗に比例して増大することを示す。このことにより、一般に、擾乱のスケールが小さい短波長のトラフ（波数 $k,\ l$ が大きい）では、偏西風による相対渦度移流の効果が勝り、擾乱のパターンは東進する。一方、擾乱のスケールが十分に大きい長波長のトラフでは、惑星渦度移流の効果が勝るようになって、擾乱のパターンが西進するようになる（プラネタリー波）。両者の効果が拮抗するような場合は擾乱のパターンはどちらにも移動せず停滞することがありうる。これはロスビー波（第 4 章・第 7 章）の分散関係で説明できる。

本章で着目している総観規模擾乱は、この分類では短波長の波動に相当し、一般に相対渦度の効果が勝るので、高低気圧からなる天気システムは西から東へと移動していくことになる。

5.4.3 傾向方程式 C 項

傾向方程式 (5.4.3) の右辺第 2 項（C 項）を、ベクトル形式で表し、さらに静力学平衡の式と状態方程式を使うと、

$$\frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{f_0^2}{\sigma}\boldsymbol{V}_g \cdot \nabla_p\left(-\frac{\partial \Phi_0}{\partial p}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{f_0^2}{\sigma}\boldsymbol{V}_g \cdot \nabla_p\left(\frac{RT}{p}\right)\right]$$

と書ける。これは地衡風による水平温度移流をpで偏微分したもの、すなわち、水平温度移流の高度による差を表している。Δpを下層と上層の気圧差（$\Delta p > 0$）として、鉛直微分を差分で表せば、中層のジオポテンシャル変化傾向に対する C 項の影響を、

$$-\chi_M \sim \frac{f_0^2}{\sigma\Delta p}\left[\left\{\boldsymbol{V}_g \cdot \nabla_p\left(\frac{RT}{p}\right)\right\}_L - \left\{\boldsymbol{V}_g \cdot \nabla_p\left(\frac{RT}{p}\right)\right\}_U\right]$$

と書くことができる。ただし、添え字M、L、Uはそれぞれ中層、下層、上層を表す。

中層の高度場に対する下層の寄与について考えると、次のように書ける。

$$\chi_M \sim -\frac{f_0^2}{\sigma\Delta p}\left\{\boldsymbol{V}_g \cdot \nabla_p\left(\frac{RT}{p}\right)\right\}_L$$

図 5.6 には図 5.2 と同じ東西断面図を示している。風が低温側から高温側に吹いているとき、すなわち寒気移流があるところ（図中 A）では、$-\boldsymbol{V}_g \cdot \nabla_p T < 0$ である。従って、下層で寒気移流があるところでは、上の式により $\chi_M < 0$ となり、中層の高度場が低下することになる。逆に、下層で暖気移流があるところ（図中 B）では $\chi_M > 0$ となり、中層の高度場が上昇することになる。すると、下層で寒気移流があるところでは、その上の等圧面上ではトラフが深まり、下層で暖気移流があるところではリッジが強まることも説明できる。

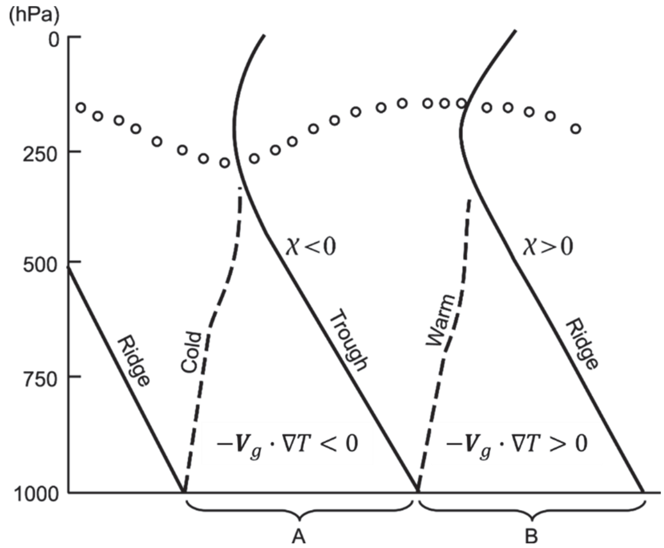


図 5.6　図 5.2 と同じ高度場・温度場の東西断面と、水平温度移流、及びジオポテンシャル変化傾向（χ）の分布の模式図（Holton 1992 に基づく）。水平温度移流は、$-\boldsymbol{V}_g \cdot \nabla T > 0$ は正の水平温度移流（暖気移流）、$-\boldsymbol{V}_g \cdot \nabla T < 0$ は負の水平温度移流（寒気移流）である。

中層の高度場に対する上層の寄与は、次のように書ける。

$$\chi_M \sim \frac{f_0^2}{\sigma\Delta p}\left\{\boldsymbol{V}_g \cdot \nabla_p\left(\frac{RT}{p}\right)\right\}_U$$

この場合は、上層で寒気移流があるときに、中層の高度場が上昇し、上層で暖気移流があるときに、中層の高度場が下降する。

5.4.4 オメガ方程式 A 項

準地衡風オメガ方程式 (5.4.2) の左辺 A 項を、傾向方程式の場合と同様に考え、

$$\omega(x,y,p,t) = \hat{\omega}(t)\sin\left(\frac{\pi p}{p_0}\right)\cos kx \cos ly$$

とおく。ここではωの鉛直依存性について、鉛直速度が地上付近（$p = p_0$）と大気上端（$p = 0$）で 0 になるはずと考えて設定している。このときのオメガ方程式の A 項は、

$$\left(\nabla_p^2 + \frac{f_0^2}{\sigma}\frac{\partial^2}{\partial p^2}\right)\omega = -\left[k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{\sigma}\left(\frac{\pi}{p_0}\right)^2\right]\omega$$

となり、

$$\text{A 項} \quad \propto \quad -\omega \quad \propto \quad w$$

と言える。従って、準地衡風オメガ方程式の右辺が正の領域では上昇流が、負の領域では下降流があることになる。

5.4.5 オメガ方程式 B 項

オメガ方程式 (5.4.2) の右辺第 1 項（B 項）をベクトル形式で書くと、

$$\frac{f_0}{\sigma}\frac{\partial}{\partial p}\left[\boldsymbol{V}_g \cdot \nabla_p(\zeta_g + f)\right]$$

となる。これは地衡風による絶対渦度移流が高度によって異なることを表す。傾向方程式の C 項を論じた場合（第 5.4.3 項）と同様に、気圧差 Δpの 2 つの等圧面の間の鉛直運動を考える。

$$w_M \propto -\omega_M \sim \frac{f_0}{\sigma\Delta p}\left[\left\{\boldsymbol{V}_g \cdot \nabla_p(\zeta_g + f)\right\}_L - \left\{\boldsymbol{V}_g \cdot \nabla_p(\zeta_g + f)\right\}_U\right]$$

ここで、天気変化を考える場合は、水蒸気の多い対流圏下層の上昇流が重要である。それで、地上付近の 1000hPa と中層の 500hPa の渦度移流の差分として 750hPa の鉛直運動を表す。

$$w_{750\mathrm{hPa}} \propto -\omega_{750\mathrm{hPa}} \sim \frac{f_0}{\sigma\Delta p}\left[\left\{\boldsymbol{V}_g \cdot \nabla_p(\zeta_g + f)\right\}_{1000\mathrm{hPa}} - \left\{\boldsymbol{V}_g \cdot \nabla_p(\zeta_g + f)\right\}_{500\mathrm{hPa}}\right]$$

ただし、中緯度偏西風帯では一般に、地上付近より 500hPa の方が風速が大きく、渦度移流も大きいと考えられるので、

$$w_{750\mathrm{hPa}} \propto -\omega_{750\mathrm{hPa}} \sim -\left\{\boldsymbol{V}_g \cdot \nabla_p(\zeta_g + f)\right\}_{500\mathrm{hPa}}$$

と近似する。すなわち、下層（750hPa）の鉛直運動を 500hPa の絶対渦度移流で説明することになる。絶対渦度移流は相対渦度移流と惑星渦度移流の和だが、第 5.4.2 項で傾向方程式の B 項に関して見たように、総観規模の擾乱に関しては相対渦度移流の効果が卓越するので、500 hPa の相対渦度移流が正であれば 750 hPa では上昇流、負であれば下降流が励起されると考えることができる。前掲の図 5.5 においては、500hPa 面のトラフ前面（東側）である領域 II では正の相対渦度移流、トラフ後面（西側）の領域 I では負の相対渦度移流となっていた。すると、領域 II では上昇流、領域 I では下降流が生じることになる。また発達中の地上低気圧と 500hPa トラフの位置関係は、図 5.7 に模式的に示したようになり、地上低気圧上空付近でトラフ前面の正渦度移流が極大に、また地上高気圧上空付近でトラフ後面の負渦度移流が極大となる。これらはそれぞれ、750hPa の上昇流・下降流に対応する。

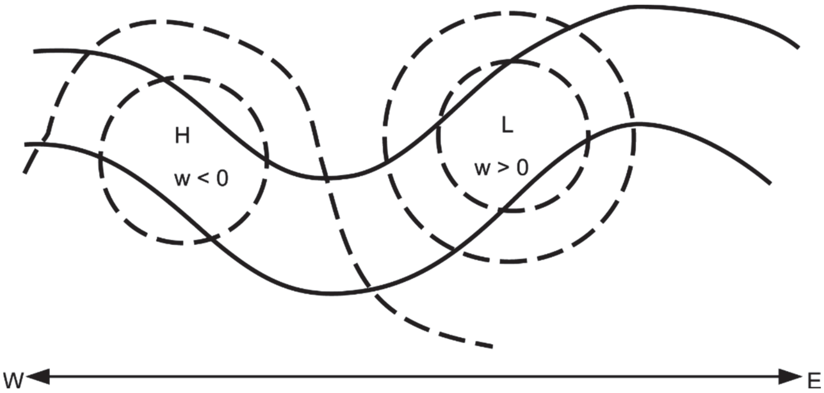


図 5.7　発達期の地上高気圧・低気圧（破線）と、500hPa 面高度場（実線）のトラフ・リッジとの位置関係を示す模式図。相対渦度移流によって生じる 750hPa 上昇流・下降流（w）も示している。（Holton 1992 に基づく）

500hPa 面における正／負の相対渦度移流と上昇流／下降流の関係は、力学・熱力学により以下のように理解される。正の渦度移流がある場所（地上低気圧の上空）では、正の相対渦度が増大する。しかし、地衡風近似のもとでは、地衡風相対渦度とジオポテンシャルの偏差 Φ'（(5.2.14) 式で定義した）が

$$\zeta_g' = \frac{1}{f_0}\nabla_p^2\Phi' \ \propto\ -\Phi'$$

のように関係づけられる。これは、正の相対渦度の増大は地衡風調節を通してジオポテンシャルの低下と対応することを意味する。これにより、500hPa 面高度が下降するので 1000hPa 面との間の層厚は減少しなければならない。そして静力学平衡の下では、層厚の減少は、その間の平均気温の低下に対応する。地上低気圧中心付近の下層では、水平温度移流は小さく、水平温度移流による上昇流は小さいので、上層正渦度移流による層厚減少はほぼ断熱的に起こると考えられる。このような断熱的な層厚減少（気温低下）を実現するには、空気塊が上昇して断熱膨張することが必要である。すなわち、オメガ方程式 B 項における渦度移流の鉛直傾度が引き起こす上昇流は、場が地衡風バランスと静力学バランスを保つために力学的に要請されるものである。同様に、地上高気圧の上空での負の渦度移流は、500hPa 面高度の上昇とその下の気温上昇を伴う。これは下降流（断熱圧縮）によって実現されることになる。

5.4.6 オメガ方程式 C 項

オメガ方程式 (5.4.2) の右辺第 2 項（C 項）をベクトル形式で書くと、

$$\frac{1}{\sigma}\nabla_p^2\left[\boldsymbol{V}_g\cdot\nabla_p\left(-\frac{\partial\Phi_0}{\partial p}\right)\right]$$

となり、水平温度移流に関係する項である。この大括弧内（層厚の水平移流）の水平依存性を、$\propto \cos kx \cos ly$ と考えれば、その 2 次元ラプラシアンを

$$\nabla_p^2\left[\boldsymbol{V}_g\cdot\nabla_p\left(-\frac{\partial\Phi_0}{\partial p}\right)\right] \propto -\boldsymbol{V}_g\cdot\nabla_p\left(-\frac{\partial\Phi_0}{\partial p}\right)$$

と考えることができるので、C 項が 750hPa の鉛直運動に与える効果は

$$w_{750\mathrm{hPa}} \propto -\omega_{750\mathrm{hPa}} \propto \left[-\boldsymbol{V}_g \cdot \nabla_p \left(-\frac{\partial \Phi_0}{\partial p}\right)\right]_{750\mathrm{hPa}}$$

となる。すなわち、750hPa 面で暖気移流の場合は上昇流、寒気移流の場合は下降流となる。

一般に発達期にある低気圧では、図 5.8 に模式的に示したように、低気圧の前面（東側）に温暖前線、後面（西側）に寒冷前線が見られる。これは東側に暖気移流、西側に寒気移流があることを示している。従って、低気圧の東側には上昇流、西側には下降流が生じていることになる。

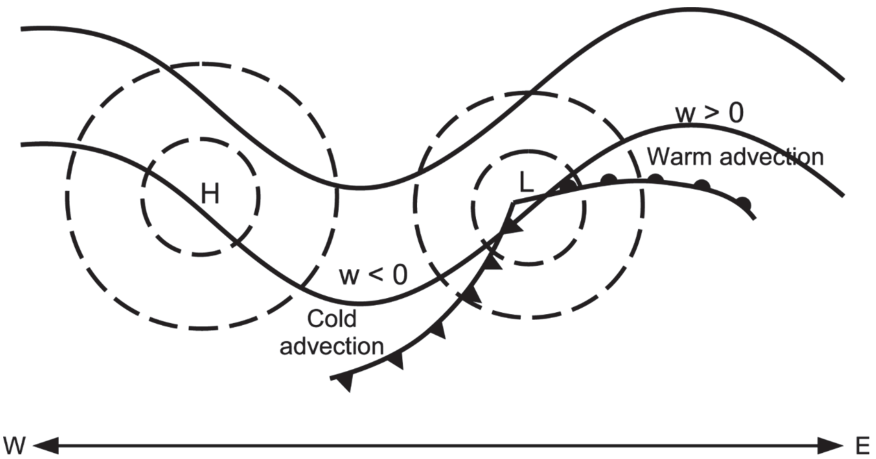


図 5.8　発達中の地上低気圧・高気圧（破線）に伴う下層の暖気移流・寒気移流の分布と、上層のリッジ・トラフ（実線）及び温度移流がもたらす鉛直運動（w）の位置関係を表す模式図。（Holton 1992 に基づく）

5.4.7 温帯低気圧における準地衡風運動のまとめ

ここまでで示した温帯低気圧の特徴を、改めて図 5.9 で説明する。まず、地点 A は 500 hPa トラフの位置で、下層の寒気移流のため 500hPa ジオポテンシャル高度が低下している。地衡風バランスが保たれるためには、500hPa 相対渦度の増大 $\partial\zeta_g/\partial t > 0$ が必要である。ここで渦度方程式 (5.3.9) 式と連続の式 (5.2.8c) から

$$\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} = -\boldsymbol{V}_g \cdot \nabla_p(\zeta_g + f) + f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p} = -\boldsymbol{V}_g \cdot \nabla_p(\zeta_g + f) - f_0\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

を考えると、トラフでは絶対渦度移流は 0 なので、渦度の増大には水平収束が必要である。そしてその下層では水平収束を補償する下降流が必要である。ここでは寒気移流に伴って下降流が生じているが、下降流は断熱昇温をもたらし、寒気移流による低温化を一部緩和する効果がある。

図 5.9 の地点 B は地上低気圧の位置である。そこでは 500 hPa ではトラフ前面にあたり、正渦度移流域により渦度が増大する。地衡風バランスが保たれるには 500 hPa ジオポテンシャル高度が低下する必要があり、そのためにはその下層で上昇流に伴う断熱冷却が必要である。すると、地表面付近では水平収束が生じて渦度が増大し地上低気圧が強まる。一方、この 500 hPa より下での上昇流により 500 hPa では水平発散が生じ、500 hPa の渦度を減少させる。すなわち、正渦度移流による渦度増大を、水

平発散により一部緩和する。

図 5.9 の地点 C は 500 hPa リッジの位置である。そこでは地点 A と逆の運動及び変化が生じる。

以上のように、500 hPa トラフ・リッジ及び地上低気圧・高気圧を維持・発達させるためには、地衡風バランス（及び温度風バランス）を保つための 2 次的な循環としての鉛直運動（及びここでは明示されないが水平風の非地衡風運動）が必要である。

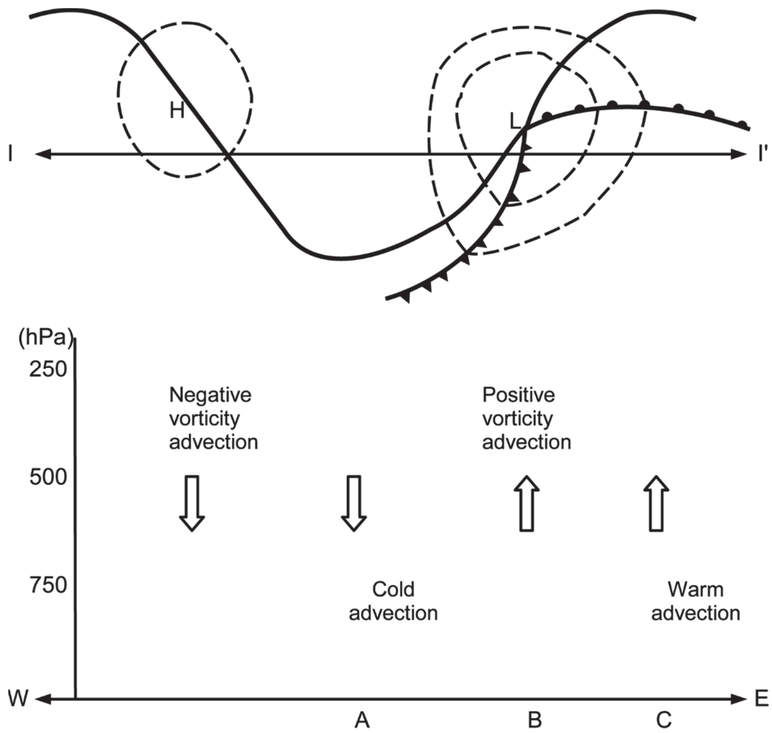


図 5.9　発達中の傾圧波動に伴う 2 次循環。上は模式的な 500hPa 面（実線）と 1000hPa 面（破線）の等高線と地上前線、下は I-I'に沿った鉛直断面における鉛直運動。（Holton 1992 に基づく）

以上でオメガ方程式の右辺の 2 つの項を単純化した低気圧モデルで見てきたが、領域によってはこれらの項の効果が打ち消しあうこともある。例えば地上低気圧中心のすぐ西側では、下層寒気移流により下降流が生じることが考えられるが、そこでは上層トラフの前面であると正渦度移流により上昇流が生じることになり、正味の鉛直運動がどうなるかはわかりにくい場合もある。

5.5　Q ベクトルと非地衡風循環

第 5.3 節で、準地衡風オメガ方程式において、右辺の地衡風運動から非地衡風運動である鉛直運動が生じることが説明された。しかしその右辺の 2 つの強制項が相互に打ち消しあって、正味の鉛直運動が説明しにくい場合がある。それに対して、Q ベクトルを用いたオメガ方程式では強制項が 1 個となる。この節では、Q ベクトルとそれを用いたオメガ方程式、及び、Q ベクトルの性質について説明する。

5.5.1 地衡風的な運動と非地衡風の関係

ここでは、断熱で準地衡風近似の運動方程式と熱力学方程式 (5.3.3a) (5.3.3b) (5.3.3d) を、f面上（β項を無視する）で考える。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)u_g-f_0v_a=0 \tag{5.5.1a}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)v_g+f_0u_a=0 \tag{5.5.1b}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial p}+S(p)\omega=0 \tag{5.5.1c}$$

ここで、地衡風によるラグランジュ微分

$$\frac{d_g}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y}$$

を用いると、(5.5.1a-c) は

$$\frac{d_g}{dt}u_g=f_0v_a\ ,\quad \frac{d_g}{dt}v_g=-f_0u_a\ ,\quad \frac{d_g}{dt}\frac{\partial\Phi}{\partial p}=-S(p)\omega \tag{5.5.2a, b, c}$$

のように書ける。これは、

・ 地衡風運動の時間変化は、それに直交する方向の非地衡風成分を伴う（付録 5B も参照）

・ 熱力学場（温度場）の地衡風による変化は、鉛直運動を伴う

ことを意味する。そしてこれらと連続の式を用いて、時間微分項と非地衡風u_a、v_aを消去することにより、ωを地衡風で表すことが可能になる。

5.5.2 Q ベクトルを用いた準地衡風オメガ方程式

ここでは改めて準地衡風オメガ方程式を導出するために、時間微分項を消去したいが、まず、運動方程式 (5.5.1a, b) を p で偏微分する。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial u_g}{\partial p}+\frac{\partial u_g}{\partial p}\frac{\partial u_g}{\partial x}+\frac{\partial v_g}{\partial p}\frac{\partial u_g}{\partial y}-f_0\frac{\partial v_a}{\partial p}=0 \tag{5.5.3a}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial v_g}{\partial p}+\frac{\partial u_g}{\partial p}\frac{\partial v_g}{\partial x}+\frac{\partial v_g}{\partial p}\frac{\partial v_g}{\partial y}+f_0\frac{\partial u_a}{\partial p}=0 \tag{5.5.3b}$$

これらは以下のように書ける。

$$\frac{d_g}{dt}\left(\frac{\partial u_g}{\partial p}\right)+\frac{\partial u_g}{\partial p}\frac{\partial u_g}{\partial x}+\frac{\partial v_g}{\partial p}\frac{\partial u_g}{\partial y}-f_0\frac{\partial v_a}{\partial p}=0 \tag{5.5.4a}$$

$$\frac{d_g}{dt}\left(\frac{\partial v_g}{\partial p}\right)+\frac{\partial u_g}{\partial p}\frac{\partial v_g}{\partial x}+\frac{\partial v_g}{\partial p}\frac{\partial v_g}{\partial y}+f_0\frac{\partial u_a}{\partial p}=0 \tag{5.5.4b}$$

ここから、地衡風の鉛直微分の項を消去することを考える。温度風バランス（第 3 章）は

$$f_0\frac{\partial u_g}{\partial p}=\frac{R}{p}\frac{\partial T}{\partial y},\qquad f_0\frac{\partial v_g}{\partial p}=-\frac{R}{p}\frac{\partial T}{\partial x} \tag{5.5.5a, b}$$

であったので、(5.5.4a, b) は以下のように変形できる。

$$\frac{R}{f_0 p}\frac{d_g}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{R}{f_0 p}\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial u_g}{\partial x}-\frac{R}{f_0 p}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial u_g}{\partial y}-f_0\frac{\partial v_a}{\partial p}=0 \tag{5.5.6a}$$

$$-\frac{R}{f_0 p}\frac{d_g}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{R}{f_0 p}\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial v_g}{\partial x}-\frac{R}{f_0 p}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial v_g}{\partial y}+f_0\frac{\partial u_a}{\partial p}=0 \tag{5.5.6b}$$

これらの式には、気温水平傾度の時間微分が含まれている。これを消去したいので、熱力学方程式 (5.5.1c) 式に静力学平衡の式 $\partial\Phi/\partial p=-RT/p$ を適用して、気温の時間変化を表す。

$$\frac{R}{p}\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)T-S(p)\omega=0 \tag{5.5.7}$$

これをyまたはxで偏微分すると、それぞれ

$$\frac{R}{p}\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{R}{p}\frac{\partial u_g}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{R}{p}\frac{\partial v_g}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y}-S(p)\frac{\partial\omega}{\partial y}=0 \tag{5.5.8a}$$

$$\frac{R}{p}\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{R}{p}\frac{\partial u_g}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{R}{p}\frac{\partial v_g}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y}-S(p)\frac{\partial\omega}{\partial x}=0 \tag{5.5.8b}$$

と書け、気温の水平傾度の時間変化が現れる。(5.5.8a, b) と、(5.5.6a, b) に f_0 をかけたものから、それぞれ d_g/dt の項を消去すると、

$$\left[\frac{R}{p}\frac{\partial u_g}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{R}{p}\frac{\partial v_g}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y}-S(p)\frac{\partial\omega}{\partial y}\right]-\left[\frac{R}{p}\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial u_g}{\partial x}-\frac{R}{p}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial u_g}{\partial y}-f_0^2\frac{\partial v_a}{\partial p}\right]=0 \tag{5.5.9a}$$

$$\left[\frac{R}{p}\frac{\partial u_g}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{R}{p}\frac{\partial v_g}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y}-S(p)\frac{\partial\omega}{\partial x}\right]+\left[\frac{R}{p}\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial v_g}{\partial x}-\frac{R}{p}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial v_g}{\partial y}+f_0^2\frac{\partial u_a}{\partial p}\right]=0 \tag{5.5.9b}$$

これらにさらに地衡風の連続の式 $\partial u_g/\partial x+\partial v_g/\partial y=0$ も使い、さらに、左辺に非地衡風に関する項、右辺に地衡風に関する項をまとめるように変形すると、

$$S(p)\frac{\partial\omega}{\partial y}-f_0^2\frac{\partial v_a}{\partial p}=\frac{2R}{p}\frac{\partial u_g}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{R}{p}\frac{\partial v_g}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y}-\frac{R}{p}\frac{\partial u_g}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{2R}{p}\left[\frac{\partial u_g}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial v_g}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y}\right] \tag{5.5.10a}$$

$$S(p)\frac{\partial\omega}{\partial x}-f_0^2\frac{\partial u_a}{\partial p}=\frac{2R}{p}\frac{\partial v_g}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y}+\frac{R}{p}\frac{\partial u_g}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x}-\frac{R}{p}\frac{\partial v_g}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{2R}{p}\left[\frac{\partial u_g}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial v_g}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y}\right] \tag{5.5.10b}$$

これらを次のように表す。

$$S(p)\frac{\partial\omega}{\partial y}-f_0^2\frac{\partial v_a}{\partial p}=-2Q_2 \tag{5.5.11a}$$

$$S(p)\frac{\partial\omega}{\partial x}-f_0^2\frac{\partial u_a}{\partial p}=-2Q_1 \tag{5.5.11b}$$

ここで、右辺は

$$Q_2\equiv-\frac{R}{p}\left[\frac{\partial u_g}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial v_g}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y}\right]=-\frac{R}{p}\frac{\partial\boldsymbol{V}_g}{\partial y}\cdot\nabla_p T \tag{5.5.12a}$$

$$Q_1\equiv-\frac{R}{p}\left[\frac{\partial u_g}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial v_g}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y}\right]=-\frac{R}{p}\frac{\partial\boldsymbol{V}_g}{\partial x}\cdot\nabla_p T \tag{5.5.12b}$$

である。これを Q **ベクトル**のy成分とx成分とする。

$$\boldsymbol{Q} \equiv (Q_1, Q_2) = \left(-\frac{R}{p}\frac{\partial \boldsymbol{V}_g}{\partial x}\cdot\nabla_p T, \qquad -\frac{R}{p}\frac{\partial \boldsymbol{V}_g}{\partial y}\cdot\nabla_p T\right) \tag{5.5.13}$$

(5.5.11a, b) をそれぞれyとxで偏微分して和をとると、右辺は $-2\nabla_p\cdot\boldsymbol{Q}$ すなわちQベクトルの収束の2 倍であり、左辺は

$$\left(S(p)\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} - f_0^2\frac{\partial^2 v_a}{\partial y\partial p}\right) + \left(S(p)\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} - f_0^2\frac{\partial^2 u_a}{\partial x\partial p}\right)$$
$$= S(p)\nabla_p^2\omega - f_0^2\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y}\right) = S(p)\nabla_p^2\omega + f_0^2\frac{\partial^2\omega}{\partial p^2} \tag{5.5.14}$$

と変形できる。ここで、非地衡風の連続の式

$$\frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} + \frac{\partial \omega_a}{\partial p} = 0 \tag{5.3.3c}$$

を用いている（$\omega_a = \omega$）。これらにより、

$$S(p)\nabla_p^2\omega + f_0^2\frac{\partial^2\omega}{\partial p^2} = -2\nabla_p\cdot\boldsymbol{Q} \tag{5.5.15}$$

これが Q ベクトルを用いたオメガ方程式である。第 5.4 節で見たように波動擾乱を考え、$\omega(x,y,p,t) = \widehat{\omega}(t)\sin(\pi p/p_0)\cos kx\cos ly$ 　のように置くと、左辺$\propto -\omega$ となる。Q ベクトルの収束の場合は右辺が正になるので $\omega < 0$ の上昇流、発散の場合は下降流に対応することになる。

なお、Q ベクトルの意味については付録 5C も参照していただきたい。

5.5.3 Q ベクトルの性質

ここでは Q ベクトルの性質を考えるために、まず、非地衡風運動がない、完全に地衡風的な運動による傾圧的な変化を考えてみる。熱力学方程式で鉛直運動もないことになるので、

$$\frac{d_g T}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{V}_g\cdot\nabla_p\right)T = 0 \tag{5.5.16}$$

これをx、yで偏微分すると、それぞれ

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{V}_g\cdot\nabla_p\right)T = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{V}_g\cdot\nabla_p\right)\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{V}_g}{\partial x}\cdot\nabla_p T = 0 \tag{5.5.17a}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{V}_g\cdot\nabla_p\right)T = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{V}_g\cdot\nabla_p\right)\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{V}_g}{\partial y}\cdot\nabla_p T = 0 \tag{5.5.17b}$$

ここからそれぞれ

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{V}_g\cdot\nabla_p\right)\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial \boldsymbol{V}_g}{\partial x}\cdot\nabla_p T = \frac{p}{R}Q_1 \tag{5.5.18a}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{V}_g\cdot\nabla_p\right)\frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{\partial \boldsymbol{V}_g}{\partial y}\cdot\nabla_p T = \frac{p}{R}Q_2 \tag{5.5.18b}$$

これらは次のように書ける。

$$\frac{d_g}{dt}\left(\frac{R}{p}\nabla_p T\right) = \boldsymbol{Q} \tag{5.5.19}$$

これにより、Q ベクトルは水平温度傾度の地衡風的な時間変化と言える。

同様に、完全に地衡風的と考えると、運動方程式をp で偏微分した (5.5.4a,b) で非地衡風の項を 0 として、

$$\frac{d_g}{dt}\left(\frac{\partial u_g}{\partial p}\right) + \frac{\partial u_g}{\partial p}\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial p}\frac{\partial u_g}{\partial y} = 0 \tag{5.5.20a}$$

$$\frac{d_g}{dt}\left(\frac{\partial v_g}{\partial p}\right) + \frac{\partial u_g}{\partial p}\frac{\partial v_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial p}\frac{\partial v_g}{\partial y} = 0 \tag{5.5.20b}$$

ここに、温度風の関係

$$f_0\frac{\partial u_g}{\partial p} = \frac{R}{p}\frac{\partial T}{\partial y}, \qquad f_0\frac{\partial v_g}{\partial p} = -\frac{R}{p}\frac{\partial T}{\partial x}$$

と、地衡風の連続の式を使うと、

$$\frac{d_g}{dt}\left(f_0\frac{\partial u_g}{\partial p}\right) - \frac{R}{p}\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial v_g}{\partial y} - \frac{R}{p}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial u_g}{\partial y} = 0 \tag{5.5.21a}$$

$$\frac{d_g}{dt}\left(f_0\frac{\partial v_g}{\partial p}\right) + \frac{R}{p}\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial v_g}{\partial x} + \frac{R}{p}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial u_g}{\partial x} = 0 \tag{5.5.21b}$$

これは、下記のように書けるので、Q ベクトルは鉛直シアーの地衡風的な時間変化とも解釈できる。

$$\frac{d_g}{dt}\left(f_0\frac{\partial u_g}{\partial p}\right) = -Q_2, \qquad \frac{d_g}{dt}\left(f_0\frac{\partial v_g}{\partial p}\right) = +Q_1 \tag{5.5.22a,b}$$

ここで、例えば、北ほど低温である温度場（$\partial T/\partial y < 0$）である環境において、$Q_2 < 0$ となるような変化が起こったとすると、(5.5.18b) と (5.5.22a) より

$$\frac{d_g}{dt}\left(\frac{R}{p}\frac{\partial T}{\partial y}\right) = Q_2 < 0, \qquad \frac{d_g}{dt}\left(f_0\frac{\partial u_g}{\partial p}\right) = -Q_2 > 0$$

のように、地衡風による水平温度傾度と鉛直シアーの時間変化が生じる。ところが、これは南北の温度傾度を増大させるが、偏西風が上空ほど強いような鉛直シアーを弱めることを意味する。上の 2 式の差をとると、

$$\frac{d_g}{dt}\left(f_0\frac{\partial u_g}{\partial p} - \frac{R}{p}\frac{\partial T}{\partial y}\right) = -2Q_2 > 0$$

であり、この左辺の括弧内は温度風バランスの式を表す。温度風バランスした状態なら左辺は 0 のはずだが、右辺が 0 でないので、温度風バランスからのずれが増大を続けることを表す。つまり、Q ベクトルの強制による変化は温度風バランスを破壊するように作用すると言える。このバランスの破壊は非地衡風成分を無視したために生じてしまうものなので、非地衡風成分を無視することはできない。従って、Q ベクトルが 0 でないところでは、破壊された温度風バランスを回復するために、鉛直運動を含む非地衡風運動が生じている必要がある。

5.5.4 天気図上の Q ベクトル

前項のように非地衡風成分は無視はできないが、Q ベクトルは近似的には (5.5.19) 式により、水平温度傾度が増大する際、相対的な暖気が強まる方向を向く。しかし天気図上でそれを見積もるのは容易ではない。

ひとつの考え方として、等温線に沿って平行に、寒気側を左側とするようにx軸をとる。すると $\partial T/\partial x = 0$ となるので、(5.5.13) 式は

$$\boldsymbol{Q} = -\frac{R}{p}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v_g}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_g}{\partial y}\right) = -\frac{R}{p}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v_g}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial v_g}{\partial y}\boldsymbol{j}\right) \tag{5.5.23}$$

ここで、y 軸は寒気側を向いているので $\partial T/\partial y < 0$ であり、また地衡風の連続の式も使うと、

$$\boldsymbol{Q} = \frac{R}{p}\left|\frac{\partial T}{\partial y}\right|\left(\frac{\partial v_g}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial u_g}{\partial x}\boldsymbol{j}\right) = -\frac{R}{p}\left|\frac{\partial T}{\partial y}\right|\left(\boldsymbol{k} \times \frac{\partial \boldsymbol{V}_g}{\partial x}\right) \tag{5.5.24}$$

と書き直せる。すると Q ベクトルは、x方向（等温線に沿った方向）での地衡風の変化のベクトルを時計回りに 90°回転させ、水平温度傾度 $|\partial T/\partial y|$ をかけると得られることになる。

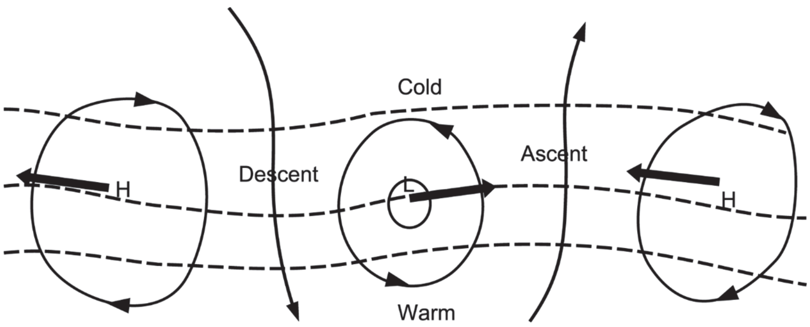


図 5.10　一連の低気圧・高気圧に伴う理想化した等圧線（実線）と等温線（破線）と Q ベクトル（太矢印）の分布。(Holton 1992 に基づく）

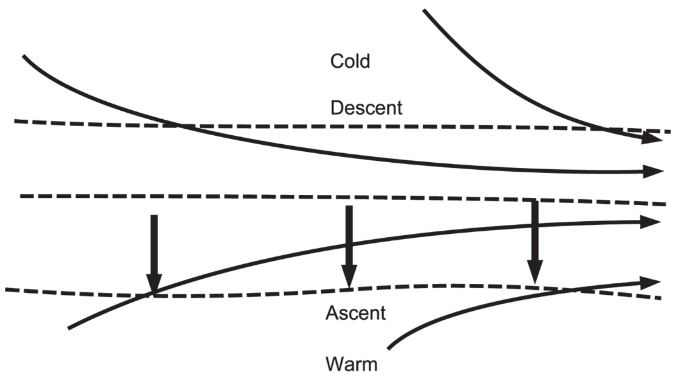


図 5.11　ジェット気流の合流域（ジェットストリークの入り口）における Q ベクトル（太矢印）。実線は等高線、破線は等温線。(Holton 1992 に基づく）

例えば一連の高低気圧に関する図 5.10 では、低気圧の中心付近では東へ進むほど南風（北向き風）が強くなるので、$\partial \boldsymbol{V}_g/\partial x$ ベクトルは北を向き、それを時計回りに 90°回転させたものとして Q ベク

トルは東向きとなる。さらにその東で、高気圧の中心付近では、東へ進むほど南風が弱くなるので、$\partial \boldsymbol{V}_g/\partial x$ ベクトルは南を向き、Q ベクトルは西向きとなる。すると低気圧の東で Q ベクトルが収束し、オメガ方程式 (5.5.15) により上昇流となる。また低気圧の西では Q ベクトルが発散し下降流を示唆する。これは第 5.4 節で見た低気圧の構造と矛盾しない。

またジェット気流の合流域の図 5.11 では、等温線に沿って東へ進むほど西風（東向きの風）が強くなるので、$\partial \boldsymbol{V}_g/\partial x$ ベクトルは東を向き、Q ベクトルは南向きとなる。これはジェット気流合流域で、南側（流れに沿った方向に対して右側）で Q ベクトルが収束し上昇運動が生じることを意味する。

5.5.5 Q ベクトルを用いた温帯低気圧発達の解釈

温帯低気圧の自励発達（self-development）は、傾圧帯における上層トラフ・リッジと下層低気圧・高気圧の相互作用でシステムが発達することを説明する。これについて「総観気象学基礎編」と「同　応用編」（北畠 2019a; 2019b）でそれぞれ、準地衡風渦度方程式等と渦位を用いて説明していた。ここでは Q ベクトルを用いて模式的な説明を行う。

図 5.12 は傾圧帯の擾乱の模式図である。右向きの黒矢印で上層偏西風とそれに伴う鉛直シアーを表す。この鉛直シアーと温度風バランスした南北温度傾度がある（図には描画されていない）。この環境場で、以下のような変化が生じる。

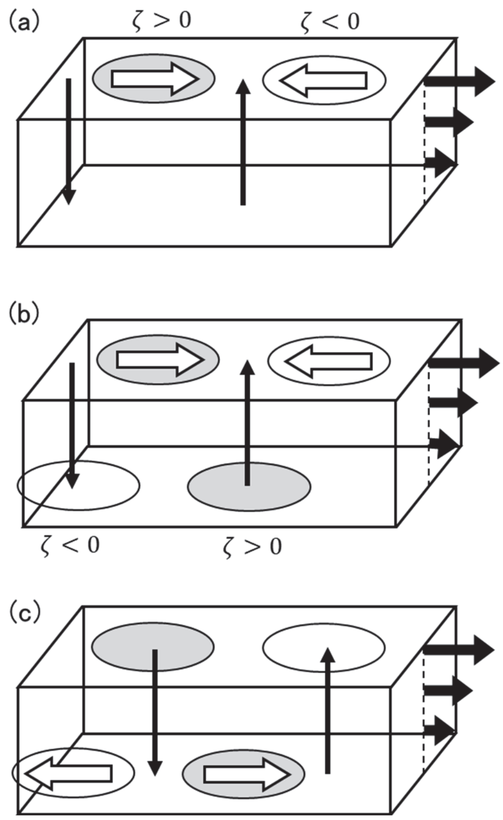


図 5.12　偏西風帯の上層と下層の渦度偏差の相互作用の模式図。点彩の円は正渦度偏差、白円は負渦度偏差。黒矢印は大気の運動、太矢印は Q ベクトル。（Hoskins and James 2014 に基づき作成）

(a) 初期には下層には渦度偏差はないとする。上層にはトラフ（点彩域、$\zeta > 0$）とリッジ（$\zeta < 0$）があり、この渦度と南北温度傾度のために、図 5.10 と同様に Q ベクトル（白抜き矢印）がそれぞれ東向きと西向きに生じている。このため、トラフ（$\zeta > 0$）の東側では Q ベクトルの収束により上昇流が、またトラフの西側では Q ベクトルの発散により下降流が励起される（細矢印）。

(b) (a) で上層擾乱により励起された上昇流・下降流により、それぞれ、下層で正渦度偏差（点彩域、$\zeta > 0$）と負渦度偏差（$\zeta < 0$）が生じる。これは鉛直運動に伴う気柱の伸縮または下層収束・発散によるもので、渦度方程式 (5.3.9) により説明できる。これにより、上層トラフの東側に下層正渦度偏差、西側に下層負渦度偏差が生じる。

(c) (b) で生じた下層正渦度偏差・負渦度偏差と、背景場の南北温度傾度（図には描画されていない）により、下層で Q ベクトルが生じる（太矢印）。これも図 5.10 と同じ位置関係である。これにより、下層正渦度偏差の東側では Q ベクトルの収束に対応する上昇流が励起され、上層では発散が生じて負渦度偏差（リッジ）が強化される。下層正渦度偏差の西側では下層 Q ベクトルの発散により下降流が励起され、そのため上層では収束が生じ、正渦度偏差が強化される。これらにより、トラフ（正渦度極大）の軸が西に傾く構造になるとともに、上層と下層で渦度強化の正のフィードバックが生じ、上層トラフ・リッジと下層低気圧・高気圧のシステム全体が強化される。

この説明では温度場の変化が示されず、低気圧の構造の変化を十分に説明することはできないが、温帯低気圧の発達が上層と下層でそれぞれ生じる波動の相互作用として説明できることが示唆される。傾圧帯における波動の不安定は、このあと、第 6 章と第 7 章の中立波動の説明を経て、第 8 章で傾圧不安定として論じられる。

5.6 準地衡風渦位方程式

5.6.1 準地衡風渦位方程式の導出

第 5.3 節で準地衡風渦度方程式 (5.3.9) 式と熱力学方程式 (5.3.3d) 式から鉛直運動の項を消去し、ジオポテンシャル傾向方程式を得た。ここでは同じ式から別の変形を行う。(5.3.3d) に $f_0/S(p)$ をかけ p で偏微分すると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_g\frac{\partial}{\partial x} + v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0}{S(p)}\frac{\partial \Phi_0}{\partial p}\right) + \left(\frac{\partial u_g}{\partial p}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial p}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{f_0}{S(p)}\frac{\partial \Phi_0}{\partial p}\right) + f_0\frac{\partial \omega_a}{\partial p} = 0 \tag{5.6.1}$$

これは (5.3.13) と同じだが、左辺第 2 項は

$$\left(\frac{\partial u_g}{\partial p}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial p}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial p}\right) = f_0\left(\frac{\partial u_g}{\partial p}\frac{\partial v_g}{\partial p} - \frac{\partial v_g}{\partial p}\frac{\partial u_g}{\partial p}\right) = 0$$

により消去されるため、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_g\frac{\partial}{\partial x} + v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0}{S(p)}\frac{\partial \Phi_0}{\partial p}\right) + f_0\frac{\partial \omega_a}{\partial p} = 0 \tag{5.6.2}$$

となる。一方、準地衡風渦度方程式 (5.3.9) 式を変形すると、fが時間変化しないことから、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_g\frac{\partial}{\partial x} + v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\zeta_g + f\right) = f_0\frac{\partial \omega_a}{\partial p} \tag{5.6.3}$$

と書けるので、(5.6.2) 式と (5.6.3) 式から ω_a を消去すると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\left\{f+\zeta_g+\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0}{S(p)}\frac{\partial\Phi_0}{\partial p}\right)\right\}=0 \tag{5.6.4}$$

が得られる。これは、

$$q\equiv f+\zeta_g+\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0}{S(p)}\frac{\partial\Phi_0}{\partial p}\right) \tag{5.6.5}$$

または $\zeta_g=(1/f_0)\nabla_p^2\Phi_0$ を使って

$$q\equiv f+\frac{1}{f_0}\nabla_p^2\Phi_0+\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0}{S(p)}\frac{\partial\Phi_0}{\partial p}\right) \tag{5.6.6}$$

で定義される量が、摩擦のない断熱過程では等圧面上の地衡風に沿って保存されることを示している。(5.6.5)、(5.6.6) 式で定義される量 q を**準地衡風渦位**または**準地衡風ポテンシャル渦度**（quasi-geostrophic potential vorticity）と呼ぶ。そして (5.6.4) 式または

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)q=0 \tag{5.6.7}$$

を、**準地衡風渦位方程式**または**準地衡風ポテンシャル渦度方程式**（quasi-geostrophic potential vorticity equation）と呼ぶ。

【問題】上記より、ジオポテンシャル傾向方程式 (5.3.17) と準地衡風渦位方程式は相互に見方を変えたものに他ならないことがわかる。準地衡風渦位方程式 (5.6.4) から傾向方程式を直接導いてみよ。

5.6.2 準地衡風渦位と鉛直運動

第 5.4 節では鉛直運動ωの診断が地衡風相対渦度ζ_gを用いて準地衡風オメガ方程式で説明された。ここでは準地衡風渦位qと鉛直運動の関係を考える。準地衡風渦位の定義 (5.6.6) をtとpで偏微分して f_0 をかけ、また第 5.4 節と同様に簡単のため$S(p)$を気圧に依存しないσとして、

$$f_0\frac{\partial^2}{\partial t\partial p}q=\frac{\partial}{\partial t}\left\{\nabla_p^2\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial p}\right)+{f_0}^2\frac{\partial^2}{\partial p^2}\left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\Phi_0}{\partial p}\right)\right\}=\left(\nabla_p^2+\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial^2}{\partial p^2}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial p}\right) \tag{5.6.8}$$

と変形しておく。一方、熱力学方程式は (5.3.3d) より

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial p}\right)+\boldsymbol{V}_g\cdot\nabla_p\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial p}\right)+S(p)\omega=0$$

である。ここでも$S(p)$をσとしたうえで、これを用いて (5.6.8) から$\partial^2\Phi_0/\partial t\partial p$を消去すると、

$$f_0\frac{\partial^2}{\partial t\partial p}q=-\left(\nabla_p^2+\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial^2}{\partial p^2}\right)\left[\boldsymbol{V}_g\cdot\nabla_p\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial p}\right)+\sigma\omega\right] \tag{5.6.9}$$

と書ける。渦位保存則 (5.6.6) は

$$\frac{d_g q}{dt}=\frac{\partial q}{\partial t}+\boldsymbol{V}_g\cdot\nabla_p q=0 \tag{5.6.10}$$

なので、これを用いて (5.6.9) の左辺が変形できて、

$$f_0\frac{\partial}{\partial p}\left(\boldsymbol{V}_g\cdot\nabla_p q\right)=\left(\nabla_p^2+\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial^2}{\partial p^2}\right)\left[\boldsymbol{V}_g\cdot\nabla_p\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial p}\right)+\sigma\omega\right] \tag{5.6.11}$$

となり、さらに変形して

$$\left(\nabla_p^2+\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial^2}{\partial p^2}\right)\omega=\frac{f_0}{\sigma}\frac{\partial}{\partial p}\left(\boldsymbol{V}_g\cdot\nabla_p q\right)+\frac{1}{\sigma}\left(\nabla_p^2+\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial^2}{\partial p^2}\right)\left[\boldsymbol{V}_g\cdot\nabla_p\left(-\frac{\partial\Phi_0}{\partial p}\right)\right] \tag{5.6.12}$$

が得られる。左辺は準地衡風オメガ方程式と同じで、ω に 3 次元ラプラシアンに類似した作用素を作用したものだが、右辺第 1 項は準地衡風渦位の地衡風による水平移流の鉛直傾度であり、上層の正渦位移流が大きい場合は上昇流が励起されることを示す。右辺第 2 項は層厚の水平移流（水平温度移流）に左辺と同じ作用素を作用したものであり、温度移流の正偏差（暖気移流）では上昇流が励起されることが示唆される。

5.6.3 流線関数による準地衡風渦位方程式の表現

(5.3.1a,b) 式で定義される地衡風は非発散なので、流線関数

$$\psi\equiv\frac{1}{f_0}\Phi_0 \tag{5.6.13}$$

によって表現することができ、

$$u_g=-\frac{\partial\psi}{\partial y}\quad,\qquad v_g=\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{5.6.14a, b}$$

と書ける（流線関数については付録 3A を参照）。このとき、準地衡風渦位は

$$q=f+\nabla_p^2\psi+\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0^2}{S(p)}\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) \tag{5.6.15}$$

と書けるので、準地衡風渦位方程式 (5.6.7) 式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left\{f+\nabla_p^2\psi+\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0^2}{S(p)}\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\right\}=0 \tag{5.6.16}$$

のように、流線関数 ψ だけで表すことができる。そして、初期場の ψ の分布がわかればその後の ψ 分布の予測の可能性も生じることがわかる。これは第 7 章・第 8 章で使用される。

5.6.4 渦位偏差から周囲への影響

地球大気における安定度は成層圏で大きく対流圏では小さいので、渦位も成層圏で大きく対流圏で小さい。上部対流圏で成層圏起源の高渦位空気が局所的に下降すると、相対渦度の大きいトラフとして現れる。そして準地衡風渦位の定義式に鉛直微分が含まれていることから、ある高度に渦位偏差があると他の高度に影響が生じることが示唆される。鉛直方向への影響を見積もるため、渦位の定義式を変形した (5.6.6) 式をさらに次のように変形して、各項の大きさを比較してみる。

$$\left[\frac{1}{f_0}\nabla_p^2+\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0}{S(p)}\frac{\partial}{\partial p}\right)\right]\Phi_0=q-f \tag{5.6.17}$$

この式の左辺を第 5.2 節で行ったように代表的なスケールを使って無次元化すると、

$$\left[\frac{U}{L}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2}{\partial y^{*2}}\right)_p+\frac{Lf_0{}^2}{U}\frac{\partial}{\partial p^*}\left(\frac{p^{*2}}{Ri}\frac{\partial}{\partial p^*}\right)\right]\Phi^*\sim q-f$$

から

$$\frac{U}{L}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2}{\partial y^{*2}}\right)_p+\frac{1}{Ro^2 Ri}\frac{\partial}{\partial p^*}\left(p^{*2}\frac{\partial}{\partial p^*}\right)\right]\Phi^*\sim q-f \tag{5.6.18}$$

と変形できる。ここでは第 5.2 節の$\tilde{S}$と同様に、そこで導入したリチャードソン数Riを使って

$$S(p)=\frac{U^2}{P^2}\frac{Ri}{p^{*2}}$$

としている。(5.6.18) 式の左辺第 1 項と第 2 項が同程度の大きさになるには

$$Ro^2 Ri\equiv Bu\sim 1 \tag{5.6.19}$$

である必要があることがわかる。このBuはバーガー数（Burger number）と呼ばれる無次元数である。第 5.2 節ではこれに対応する値が 1 程度であることをRoとRiの典型的な値から説明していたが、ここではBu数自体の意味を説明したことになる。Riはz座標系では

$$Ri=\frac{N^2H^2}{U^2} \tag{5.6.20}$$

であり、

$$Bu\equiv\frac{N^2H^2}{f_0{}^2L^2} \tag{5.6.21}$$

である。ロスビーの内部変形半径 $\lambda_R=NH/f_0$、及び、ロスビーハイト（Rossby height）またはロスビー深度（Rossby depth） $H_R=f_0L/N$ も使うと、

$$\sqrt{Bu}=\frac{\lambda_R}{L}=\frac{H}{H_R}=\frac{Ro}{Fr} \tag{5.6.22}$$

の関係を示すことができる。Frはフルード数（Froude number）で、$Fr=U/NH$ である。(5.6.19) の Bu〜1 と (5.6.22) の関係から、擾乱の水平スケールは $L\sim\lambda_R$、擾乱の鉛直スケールは $H\sim H_R$ と言える。擾乱が鉛直方向に影響を及ぼすスケール $H\sim H_R$ はその擾乱の水平スケールLと鉛直安定度Nに依存する。このことから、擾乱の水平スケールLが大きければ、また環境の鉛直安定度Nが小さければ、擾乱が鉛直方向に大きく影響することがわかる。中緯度の対流圏では典型的にはf_0〜10^{-4} s^{-1}、N〜10^{-2} s^{-1} なので、L〜1000 km であればH_R〜10 km となり、圏界面付近の渦位偏差の水平スケールが 1000km 以上であれば対流圏に深く影響すると考えることができる。なお、RoとFrの関係も、水平運動のスケールと鉛直成層のスケールの関係を表す。

準地衡風渦位の定義式を変形した (5.6.17) 式では、左辺はΦ_0に 3 次元ラプラシアンに類似した作用素を作用したものとなり、この式はΦ_0を変数とする微分方程式と考えることができる。すると、ある時刻における準地衡風渦位qの分布がわかれば、適切な境界条件を与えれば同じ時刻のジオポテンシャルΦ_0の 3 次元分布をこの式で計算することができ、さらにそこから地衡風や温位の 3 次元分布を推定することができる。これを渦位逆変換（potential vorticity inversion）という。

図 5.13 には、高度 5km に半径数百 km 程度の渦位偏差がある場合に生じる流れや温位分布を示している。等高度面 (a) (b) では、渦位偏差から 1000 km 以上離れた位置でも流れに影響が表れている。(c)

(d) は東西鉛直断面で、渦位偏差の上下数kmにわたって気圧・温位・風に影響が出ていることが示されている。

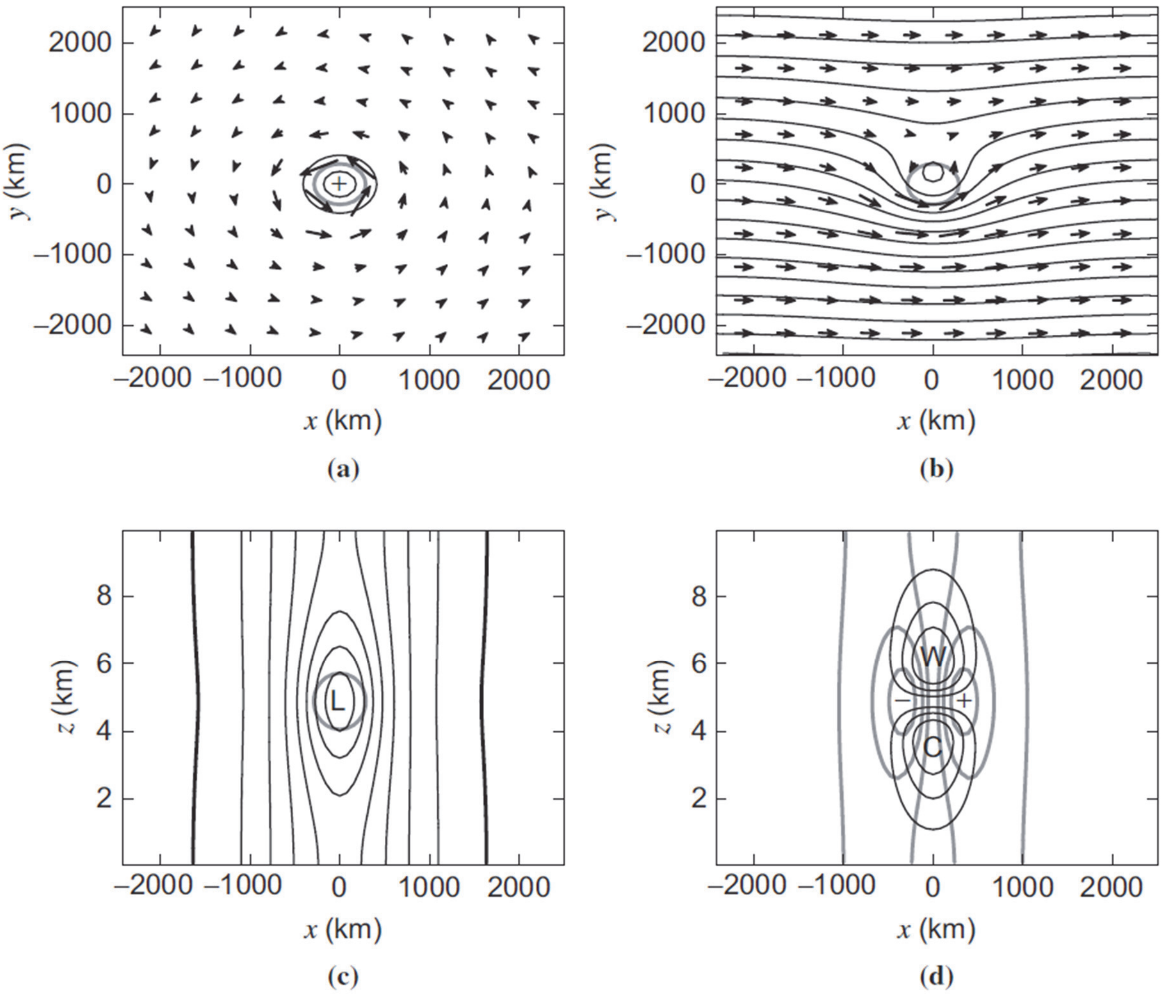


図 5.13　2 PVU の準地衡風渦位偏差を、風速が高度とともに線形的に増大する西風の中に埋め込んだ場合の、渦位逆変換により求めた流れや気圧・温位の分布（Holton and Hakim 2012）。(a) 高度 5 km の渦位の等値線（0.5 PVU ごと）と、その渦位偏差により生じた風（ベクトル）。(b) 高度 5 km の等圧線と風ベクトル（渦位偏差により生じた風と偏西風の和）。(c) 気圧偏差の等値線（太線は 0 hPa）。(d) 南北風（グレー線）と温位（黒線、W と C はそれぞれ暖気と寒気）。(a)-(c) にはグレー線で準地衡風渦位 1 PVU を表す。

第 5 章の参考文献

Palmén, E. and C. W. Newton, 1969: Atmospheric Circulation Systems. Their Structural and Physical Interpretation. Academic Press, New York, 606pp.

柴田正和、2009：漸近級数と特異摂動法。森北出版、257pp.

付録 5A　摂動法を用いずに定義した非地衡風と準地衡風方程式系

第 3 章では、2 次元の地衡風$\boldsymbol{V}_g$と非地衡風$\boldsymbol{V}_a$について、

$$\boldsymbol{V}_g = \frac{1}{f}\boldsymbol{k}\times\nabla_p\Phi\,, \qquad \boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_g + \boldsymbol{V}_a \tag{5A.1}$$

のように定義していた。そこでは本章のような摂動展開はしておらず、Φや$\boldsymbol{V}$等は微小な変動が除去されていない。

一方、本章の第 5.2 節では各変数をロスビー数 Roで摂動展開し、得られた 0 次と 1 次の方程式系から、第 5.3 節で地衡風（0 次）と非地衡風（1 次）

$$u_g = -\frac{1}{f_0}\frac{\partial\Phi_0}{\partial y}, \qquad v_g = \frac{1}{f_0}\frac{\partial\Phi_0}{\partial x} \tag{5.3.1a, b}$$

$$u_a = u_1 + \frac{1}{f_0}\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}, \qquad v_a = v_1 - \frac{1}{f_0}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} \tag{5.3.2a, b}$$

を定義していた。この定義では $u = u_g + u_a$ にはならない（v成分も同様、以下同じ）が、地衡風の 1 次の成分を-

$$u_{g\_1} = -\frac{1}{f_0}\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}$$

とすれば、

$$u \approx u_0 + u_1 = u_g + u_{g\_1} + u_a \tag{5A.2}$$

と表すことができる。このことから、上記の定義で単に $u_g + u_a$ とするのでは地衡風の 1 次の成分が無視されてしまい不適切であること、それぞれ何次の近似か意識することが重要であることがわかる。一方、仮に「地衡風」を 1 次までの近似として $u_g = u_0 + u_{g\_1} = -(1/f_0)\,\partial(\Phi_0 + \Phi_1)/\partial y$ のように定義するとすれば、摂動法で得られた 1 次の方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0\frac{\partial}{\partial x} + v_0\frac{\partial}{\partial y}\right)u_0 - f_0 v_1 - \beta y v_0 = -\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} \tag{5.2.24a}$$

においてu_0をu_gと置き換えることができなくなり、準地衡風方程式系を導くことができなくなる。

最近の教科書では、摂動法により理論的に正しく高精度な取り扱いを追求するよりも、定性的にわかりやすい説明を行うことも多い。よく行われる説明では、地衡風・非地衡風を

$$\boldsymbol{V}_g = \frac{1}{f_0}\boldsymbol{k}\times\nabla_p\Phi\,, \qquad \boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_g + \boldsymbol{V}_a \tag{5A.3}$$

のように定義する。ここでは f_0を一定とした点では第 3 章の定義 (5A.1) と異なり、また地衡風・非地衡風とも摂動展開の高次の項まで含むことになる点で第 5.2 節での定義とも異なる。この定義で、$|\boldsymbol{V}_a|/|\boldsymbol{V}_g| \ll 1$ として、運動方程式

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} + f\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{V} = -\nabla_p\Phi + \boldsymbol{F}_r \tag{5.2.1a}$$

の加速度項（左辺第 1 項）を地衡風で置き換えた $d_g\boldsymbol{V}_g/dt = \partial\boldsymbol{V}_g/\partial t + \boldsymbol{V}_g\cdot\nabla_p\boldsymbol{V}_g$ で「近似」し、また左辺第 2 項と右辺第 1 項を

$$f\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{V}+\nabla_p\Phi=(f_0+\beta y)\boldsymbol{k}\times\left(\boldsymbol{V}_g+\boldsymbol{V}_a\right)-f_0\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{V}_g\approx f_0\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{V}_a+\beta y\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{V}_g$$

のように変形することにより、

$$\frac{d_g\boldsymbol{V}_g}{dt}=-f_0\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{V}_a-\beta y\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{V}_g \tag{5A.4}$$

の形にする（例えば Holton 1992）か、またはf面近似としてβ項を無視して

$$\frac{d_g\boldsymbol{V}_g}{dt}=-f_0\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{V}_a \tag{5A.5}$$

とすることが多い（例えば Martin 2006; 北畠 2019a）。これらの変形は、$|\boldsymbol{V}_a|/\left|\boldsymbol{V}_g\right|$ に関する摂動展開による近似と見るなら、運動方程式 (5.2.1a) の加速度項については 0 次の項のみ残した近似を行っている一方で、コリオリ項は 1 次の項も残しているので、厳密さに欠けるように見える。しかし加速度項とコリオリ項のスケールの比が R_o~0.1 のため（第 5.2.2 項）、結果的に (5A.4) 式は R_oによる摂動展開により導出された運動方程式 (5.3.3a,b) と等しく、また (5A.5) は (5.5.1a,b) と等しい。このように d/dt を $d_g/dt=\partial/\partial t+u_g\,\partial/\partial x+v_g\,\partial/\partial y$ に置き換えることで準地衡風近似を説明することがしばしば行われているのだが、正確にはどのように説明すべきかも確認しておいていただきたい。

付録 5B　地衡風の時間変化と非地衡風

第 5.4 節で、伝統的な準地衡風理論の枠組みで、鉛直運動の診断を行った。ただし、そこで用いる水平運動は地衡風運動のみで、非地衡風の水平風成分については陽に扱わなかった。準地衡風近似では非地衡風成分は地衡風成分より一桁小さいと考えており、水平移流は地衡風による成分のみ考慮するなどの近似を行っていたが、条件によっては非地衡風による移流が大きくなる場合がある（例えば前線における水平温度移流）。ここでは準地衡風近似の運動方程式を用いて非地衡風運動の検討を行う。

簡単のために、β項を無視した準地衡風近似の運動方程式 (5.5.1a, b) を検討する。これをベクトル形式で表すと、

$$\frac{d_g\boldsymbol{V}_g}{dt}+f_0\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{V}_a=0 \tag{5B.1}$$

これを $\boldsymbol{V}_a$ について解くと

$$\boldsymbol{V}_a=\frac{1}{f_0}\boldsymbol{k}\times\frac{d_g\boldsymbol{V}_g}{dt} \tag{5B.2}$$

これにより、非地衡風は地衡風の加速度に対して左を向くと言える。これをさらに変形すると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}_a&=\frac{1}{f_0}\left(\boldsymbol{k}\times\frac{\partial\boldsymbol{V}_g}{\partial t}\right)+\frac{1}{f_0}\boldsymbol{k}\times\left(\boldsymbol{V}_g\cdot\nabla_p\right)\boldsymbol{V}_g\\&=-\frac{1}{f_0^2}\nabla_p\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)+\frac{1}{f_0}\boldsymbol{k}\times\left(\boldsymbol{V}_g\cdot\nabla_p\right)\boldsymbol{V}_g\end{aligned} \tag{5B.3}$$

が得られる。一般に、風速が小さければ右辺第 1 項が、風速が大きければ右辺第 2 項が卓越する。

(5B.3) 式の右辺第 1 項は変圧風（isallobaric wind）と呼ばれ、ベクトルはジオポテンシャルの減少する方向を向く。これはz座標系では

$$\boldsymbol{V}_{isal} = -\frac{1}{\rho f_0^2}\nabla_z\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right) \tag{5B.4}$$

と表される。一般に下層では偏西風が弱いため、(5B.3) 式の右辺第 2 項と比較して第 1 項（変圧風）が卓越すると考えられるので、下層風の水平発散は

$$\nabla_z \cdot \boldsymbol{V} = \nabla_z \cdot \boldsymbol{V}_a \cong \nabla_z \cdot \boldsymbol{V}_{isal} = -\frac{1}{\rho f_0^2}\nabla_z^2\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right) \tag{5B.5}$$

のように近似できることになる。ここで、2 次元ラプラシアンについて、第 5.4 節などでよく行ったように $\nabla_z^2 A \propto -A$ と考えると、水平発散は

$$\nabla_z \cdot \boldsymbol{V} \propto \frac{\partial p}{\partial t} \tag{5B.6}$$

と表される。ここでは地上気圧の低下量が地上風の水平収束の大きさに関係することが示唆される（第 3.4 節の議論と比較してみていただきたい）。

地上気象観測では前 3 時間地上気圧変化が観測・通報される。その等値線（イサロバール：isallobar）を解析して気圧低下域の分布から地上収束の分布を推定する試みが過去にあった。これは (5B.6) 式の考え方に基づく。

(5B.3) 式の右辺第 2 項は、地衡風運動量の移流に関する成分であり、偏西風の強い領域ではこれが卓越する。これを$\boldsymbol{V}_{adv}$とすると、東向き及び北向きの単位ベクトル$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$を使って以下のように書ける。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}_{adv} &= \frac{1}{f_0}\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{V}_g\cdot\nabla_p)\boldsymbol{V}_g = \frac{1}{f_0}\left[-(\boldsymbol{V}_g\cdot\nabla_p)v_g\boldsymbol{i} + (\boldsymbol{V}_g\cdot\nabla_p)u_g\boldsymbol{j}\right]\\ &= \frac{1}{f_0}\left[-u_g\frac{\partial v_g}{\partial x}\boldsymbol{i} - v_g\frac{\partial v_g}{\partial y}\boldsymbol{i} + u_g\frac{\partial u_g}{\partial x}\boldsymbol{j} + v_g\frac{\partial u_g}{\partial y}\boldsymbol{j}\right]\end{aligned} \tag{5B.7}$$

蛇行する上層ジェット気流のトラフ・リッジでは、u_gと $|\partial v_g/\partial x|$ が大きいため、(5B.7) 式の右辺第 1 項が卓越し、トラフ（$\partial v_g/\partial x > 0$）では西向き、リッジ（$\partial v_g/\partial x < 0$）では東向きの非地衡風が生じる。これにより、トラフ前面（東側）・リッジ後面（西側）では発散、リッジ前面（東側）・トラフ後面（西側）では収束となる。これらは変圧風に伴う発散とは逆符号で、上層では移流の効果による発散が卓越する。

ジェット気流で特に風の強い領域である、いわゆるジェットストリークでは、その入り口・出口でu_gと $|\partial u_g/\partial x|$ が大きいため、(5B.7) 式の右辺第 3 項が卓越する。ジェットストリーク入り口では $\partial u_g/\partial x > 0$ のため北向き（ジェット気流に対して左向き）の非地衡風、ジェットストリーク出口では $\partial u_g/\partial x < 0$ のため南向き（ジェット気流に対して右向き）の非地衡風が生じる。

以上のトラフ・リッジ及びジェットストリークに関連して生じる非地衡風運動励起については、北畠（2019a）第 4.1 節では (5B.2) 式を使って説明している。

付録 5C　Q ベクトルに関連した C ベクトル（Xu 1992）の導入と非地衡風渦度

第 5.5 節の Q ベクトルは、準地衡風的な鉛直運動励起の推定には便利だが、その意味は必ずしも分かりやすいものではない。しかし、その導出途中で見た (5.5.11a,b) 式

$$S(p)\frac{\partial\omega}{\partial y}-f_0^2\frac{\partial v_a}{\partial p}=-2Q_2\ ,\quad S(p)\frac{\partial\omega}{\partial x}-f_0^2\frac{\partial u_a}{\partial p}=-2Q_1 \qquad (5.5.11a,b)$$

のそれぞれの左辺は、非地衡風の 3 次元渦度の水平成分の形に似ている。Xu (1992) はこの点に着目して C ベクトルを導入し、それを用いて Q ベクトルを説明した。C ベクトルはほとんど使われないが、ここではその考え方を紹介しておく（ただし鉛直座標など原論文から変更している部分がある）。

第 5.5 節で (5.5.2a, b, c) から出発したのと同様に、準地衡風方程式系を、地衡風と層厚のラグランジュ微分と非地衡風のバランスに関する方程式として表す。

$$\frac{d_g}{dt}u_g=f_0v_a\ ,\quad \frac{d_g}{dt}v_g=-f_0u_a\ ,\quad \frac{d_g}{dt}\frac{\partial\Phi}{\partial p}=-S(p)\omega \qquad (5.5.2a, b, c)$$

第 5.5 節では準地衡風オメガ方程式の導出を目標としていたので、(5.5.2a,b,c) から時間微分を消去することを目指した。ここでは (5.5.2a,b) の地衡風をジオポテンシャルで表して

$${f_0}^2u_a=-\frac{d_g}{dt}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\ ,\quad {f_0}^2v_a=-\frac{d_g}{dt}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\ ,\quad S(p)\times(-\omega)=-\frac{d_g}{dt}\frac{\partial\Phi}{\partial(-p)} \qquad (5C.1a, b, c)$$

としておき（pとωは$z>0$の方向を正とするため負号をつけておく）、これを 3 次元ベクトル $\widetilde{\boldsymbol{v}_a}=\left({f_0}^2u_a\,,{f_0}^2v_a,\ S(p)\dot{}(-\omega)\right)$ のように表すと、このベクトルの渦度は次のようになる。

$$\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{v}_a}=\left[S(p)\frac{\partial(-\omega)}{\partial y}-{f_0}^2\frac{\partial v_a}{\partial(-p)}\,,\quad {f_0}^2\frac{\partial u_a}{\partial(-p)}-S(p)\frac{\partial(-\omega)}{\partial x}\,,\quad {f_0}^2\left(\frac{\partial v_a}{\partial x}-\frac{\partial u_a}{\partial y}\right)\right] \qquad (5C.2)$$

ここではこれを 2 で除したものを C ベクトルと定義する。

$$\frac{1}{2}(\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{v}_a})\equiv\boldsymbol{C}=(C_1\,,C_2\,,C_3) \qquad (5C.3)$$

この C ベクトルの各成分は、(5C.2) を使って

$$2C_1=\ -S(p)\frac{\partial\omega}{\partial y}+{f_0}^2\frac{\partial v_a}{\partial p} \qquad (5C.4a)$$

$$2C_2=\ -{f_0}^2\frac{\partial u_a}{\partial p}+S(p)\frac{\partial\omega}{\partial x} \qquad (5C.4b)$$

$$2C_3={f_0}^2\left(\frac{\partial v_a}{\partial x}-\frac{\partial u_a}{\partial y}\right) \qquad (5C.4c)$$

と書ける（Q ベクトルとの類似に注意）。このうち、まず (5C.4a) に (5C.1b,c) を使って変形すると、

$$\begin{aligned}2C_1=&\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{d_g}{dt}\frac{\partial\Phi}{\partial p}\right)-\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{d_g}{dt}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\\
&=\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial p}+\frac{\partial u_g}{\partial y}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial p}+\frac{\partial v_g}{\partial y}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial p}\right]\\
&-\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial p}+\frac{\partial u_g}{\partial p}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial v_g}{\partial p}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right]\\
&=\frac{\partial u_g}{\partial y}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial p}+\frac{\partial v_g}{\partial y}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial p}-\frac{\partial u_g}{\partial p}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial v_g}{\partial p}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\end{aligned}$$

となって、時間微分が消える。さらに地衡風及び温度風の関係を使って変形すると、

$$2C_1 = 2f_0\left(\frac{\partial u_g}{\partial y}\frac{\partial v_g}{\partial p} - \frac{\partial v_g}{\partial y}\frac{\partial u_g}{\partial p}\right) = -\frac{2R}{p}\left(\frac{\partial u_g}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y}\right) \qquad \text{(5C.5a)}$$

となる。同様にして (5C.4b) は

$$2C_2 = 2f_0\left(-\frac{\partial u_g}{\partial x}\frac{\partial v_g}{\partial p} + \frac{\partial v_g}{\partial x}\frac{\partial u_g}{\partial p}\right) = \frac{2R}{p}\left(\frac{\partial u_g}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y}\right) \qquad \text{(5C.5b)}$$

である。(5C.4a,b) を (5.5.11a,b) と比較、及び、(5C.5a,b) を第 5.5 節の Q ベクトルと比較すると、

$$C_1 = Q_2\ ,\quad C_2 = -Q_1 \qquad \text{(5C.6)}$$

である。すなわち、C ベクトルの水平成分 $\boldsymbol{C_H} = (C_1\,,\ C_2\,,\ 0)$と Q ベクトル $\boldsymbol{Q} = (Q_1\,,\ Q_2\,,\ 0)$ には

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{C}_H \qquad \text{(5C.7)}$$

の関係があり、Q ベクトルは $\boldsymbol{C_H}$を水平面（等圧面）上で反時計回りに 90 度回転させたもの（$\boldsymbol{C_H}$に対して左向き）と言える。

前線帯における大気の運動とベクトル$\boldsymbol{C_H}$（及び Q ベクトル）の関係を考える。それに先立って、(5C.5a,b) を次のように書き替えておく。

$$2C_1 = f_0\frac{\partial u_g}{\partial y}\frac{\partial v_g}{\partial p} - f_0\frac{\partial v_g}{\partial y}\frac{\partial u_g}{\partial p} - \frac{R}{p}\frac{\partial u_g}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{R}{p}\frac{\partial v_g}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y} \qquad \text{(5C.8a)}$$

$$2C_2 = -f_0\frac{\partial u_g}{\partial x}\frac{\partial v_g}{\partial p} + f_0\frac{\partial v_g}{\partial x}\frac{\partial u_g}{\partial p} + \frac{R}{p}\frac{\partial u_g}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{R}{p}\frac{\partial v_g}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y} \qquad \text{(5C.8b)}$$

図 5C.1 は東西にのびた前線に沿ってx軸（東向きを正）を取り、寒気側を向く方（北向き）にy軸を取っている。すなわち$\partial T/\partial x = 0$、$\partial T/\partial y < 0$、$\partial u_g/\partial p < 0$、$\partial v_g/\partial p = 0$である。図 5C.1a では合流変形の運動が生じており、$\partial v_g/\partial y < 0$、$\partial u_g/\partial x > 0$、$\partial v_g/\partial x = 0$、$\partial u_g/\partial y = 0$ である。すると (5C.8a) の右辺第 1 項と第 3 項は 0、第 2 項と第 4 項は負で、$C_1 < 0$ であり、(5C.8b) では$C_2 = 0$ である。このため、$\boldsymbol{C_H}$ はx軸の負の方向を向き、Q ベクトルはyの負の方向、すなわち暖気側（合流変形により暖気が強まる方向）を向く。これに伴って、渦度のx成分（y-p平面内での渦）が生じ、非地衡風運動が励起される。この場合の (5C.8a)（ただし右辺第 1 項と第 3 項は 0）と、(5C.4a) を比較すると、

$$-S(p)\frac{\partial \omega}{\partial y} + {f_0}^2\frac{\partial v_a}{\partial p} = -\frac{R}{p}\frac{\partial v_g}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y} - f_0\frac{\partial v_g}{\partial y}\frac{\partial u_g}{\partial p} \qquad \text{(5C.9a)}$$

と書ける。この式の左辺と右辺の第 1 項と第 2 項をそれぞれ比較すると、第 1 項に関しては、温度場が $\partial v_g/\partial y$ により変形されることにより、初期状態より昇温した暖気側の空気は上昇運動、低温化した寒気側の空気は下降運動する鉛直運動が励起されることを表す。また第 2 項に関しては、温度場が変形したがu_gの鉛直シアーが変化しないために、バランスしない成分の鉛直シアー $\partial(\delta u)/\partial p > 0$ が生じている状態になり、それに対する右向きのコリオリ力のため非地衡風 v_a （上空で$y > 0$の向き、下層で$y < 0$の向き）が生じることを表す。

図 5C.1b ではシアー変形の運動が生じており、$\partial v_g/\partial x > 0$、$\partial u_g/\partial x = 0$、$\partial v_g/\partial y = 0$、$\partial u_g/\partial y = 0$ である。すると (5C.8a) では $C_1 = 0$、(5C.8b) では右辺第 1 項と第 3 項は 0、第 2 項と第 4 項は負で、$C_2 < 0$ である。このため、$\boldsymbol{C_H}$ はyの負の方向を向き、Q ベクトルはxの正の方向（シアー変形により暖気が強まる方向）を向く。これに伴って、渦度のy成分（x-p平面内での渦）が生じ、非地衡風運動が励起される。この場合の (5C.8b) も (5C.4b) と比較すると、

$$S(p)\frac{\partial \omega}{\partial x} - {f_0}^2 \frac{\partial u_a}{\partial p} = \frac{R}{p}\frac{\partial v_g}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y} + f_0 \frac{\partial v_g}{\partial x}\frac{\partial u_g}{\partial p} \tag{5C.9b}$$

のように書け、左辺・右辺のそれぞれ第 1 項は、温度場が $\partial v_g/\partial x$ により変形されることによって、東側（暖気移流側）では初期より昇温するため上昇運動が生じ、西側（寒気移流側）では低温化するため下降運動する鉛直運動が励起されることを表す。第 2 項に関しては、温度場の変形により $\partial(\delta T)/\partial x > 0$ が生じたためにそれとバランスする南北風の鉛直シアー $\partial v_g/\partial p < 0$ が必要だが、それが生じていないために、バランスしない運動の成分 $\partial(\delta v)/\partial p > 0$ があることになる。これに対する右向きコリオリ力により非地衡風 u_a が生じることを表す。

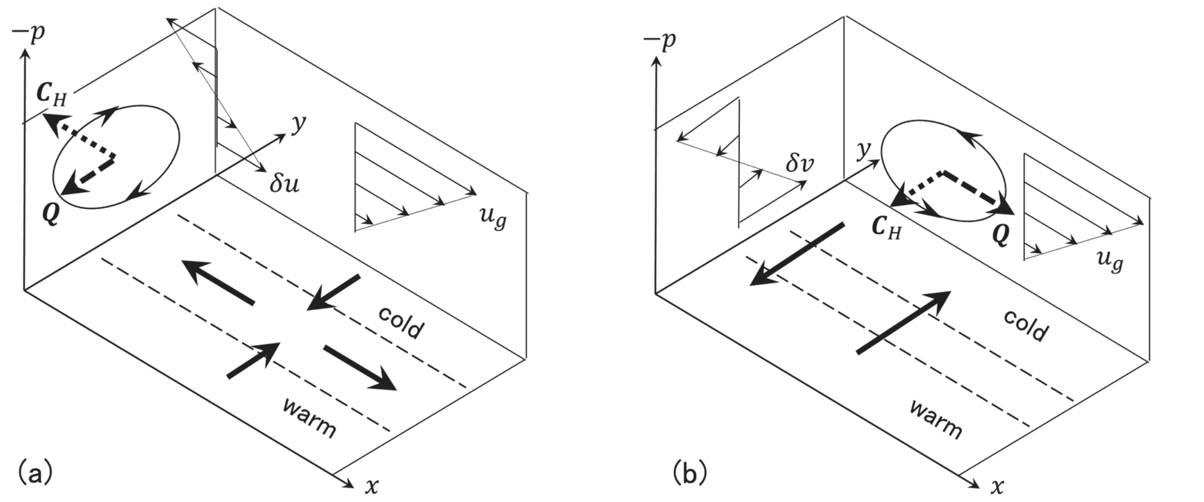


図 5C.1　x軸に沿ってのびる前線帯の温度場（破線）が地衡風により変形（太矢印）された際に生じる非地衡風循環（楕円）。(a) 合流変形の場合、(b) シアー変形の場合。記号は本文を参照。δuとδvの大きさは強調している。Xu (1992) に基づき作成。

以上の議論では、地衡風運動により励起される非地衡風循環の推定には、Q ベクトルよりも C ベクトルの方が直感的に考えやすいかもしれない。一方、Q ベクトルのメリットは、準地衡風オメガ方程式の強制項が Q ベクトルの発散で表される点であった。これを C ベクトルで考えてみると、(5C.6) を用いて

$$\nabla_p \cdot \boldsymbol{Q} = \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} = -\frac{\partial C_2}{\partial x} + \frac{\partial C_1}{\partial y} = -\boldsymbol{k}\cdot(\nabla \times \boldsymbol{C}) \tag{5C.10}$$

と書けるので、準地衡風的な鉛直運動の励起は「C ベクトルの回転の鉛直成分」で見積もることができると言える。しかし、図表示ではベクトルの回転よりも発散のほうがわかりやすいであろうから、この点は Q ベクトルにメリットがあると言えるだろう。

C ベクトルの鉛直成分C_3は、(5C.4c) により、非地衡風渦度の鉛直成分に対応する。この式に (5C.1a,b) を使い、

$$2C_3 = -\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_g\frac{\partial}{\partial x} + v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x} + \frac{\partial u_g}{\partial x}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial v_g}{\partial x}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right]$$
$$+\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_g\frac{\partial}{\partial x} + v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x} + \frac{\partial u_g}{\partial y}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial v_g}{\partial y}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x}\right]$$
$$= 2f_0\left(\frac{\partial u_g}{\partial y}\frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial x}\frac{\partial v_g}{\partial y}\right) \tag{5C.11}$$
$$= \frac{f_0}{2}\left[\left(\frac{\partial v_g}{\partial x} + \frac{\partial u_g}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_g}{\partial x} - \frac{\partial v_g}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y}\right)^2\right]$$

のように変形する。ここで、最右辺第 4 項（地衡風の発散）が 0 であることと、

$$D_1 = \frac{\partial u_g}{\partial x} - \frac{\partial v_g}{\partial y}\,, \qquad D_2 = \frac{\partial v_g}{\partial x} + \frac{\partial u_g}{\partial y}\,, \qquad \zeta_g = \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \tag{5C.12}$$

と書けること（D_1、D_2はそれぞれ地衡風による合流変形・シアー変形、ζ_gは地衡風相対渦度の鉛直成分）を使うと、(5C.4c) と (5C.11) から次のように書ける。

$$2C_3 = {f_0}^2\left(\frac{\partial v_a}{\partial x} - \frac{\partial u_a}{\partial y}\right) = \frac{f_0}{2}\left({D_1}^2 + {D_2}^2 - {\zeta_g}^2\right) \tag{5C.13}$$

(5C.13) から、以下の 2 点がわかる。

① 地衡風による変形が 0 でなければ、正の非地衡風渦度（の鉛直成分）が生じる。

② 地衡風渦度が 0 でなければ、負の非地衡風渦度（の鉛直成分）が生じる。

このうち②に関しては、曲率を持った流れの傾度風を考えれば、低気圧性の流れ（正渦度）の場合は地衡風速よりも傾度風速のほうが小さく、地衡風とは逆方向の非地衡風、すなわち非地衡風による負渦度があることがわかる。逆に高気圧性の流れ（負渦度）の場合は地衡風速より傾度風速のほうが大きく、非地衡風はこのときも負の渦度を持つことがわかる。①に関しては、典型的な合流変形の場合（$D_1 > 0$）として図 5C.2 の状況を考えると、右上象限と左下象限では地衡風の流れが低気圧性曲率のために地衡風と逆向きの非地衡風が生じ、左上象限と右下象限では地衡風の流れが高気圧性曲率のために地衡風と同じ方向の非地衡風が生じる。これらにより、非地衡風の正渦度が生じると説明できる。

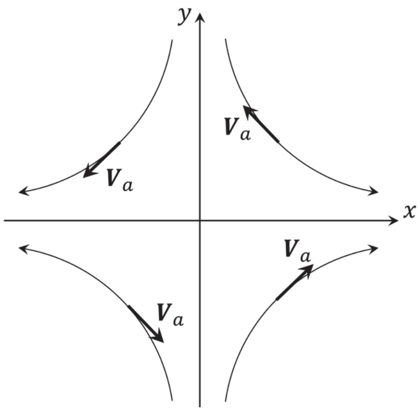


図 5C.2　典型的な合流変形の場合の地衡風の流れ（細実線矢印）の場合に生じる 2 次元非地衡風ベクトル$\boldsymbol{V}_a$（太矢印）。

付録 5C の参考文献

Xu, Q., 1992: Ageostrophic pseudovorticity and geostrophic C-vector forcing ― A new look at the Q vector in three dimensions. J. Atmos. Sci., 49, 981-989.

第 6 章 大気波動論 1:線形波動論

本章から第 8 章まで、大気中に生じる様々な波動を扱う。波動には、振動する実体としての媒質と、振動を引き起こすための復元力の存在が不可欠である。例えば、音波は大気中の波動として身近なもので、媒質は大気（空気）であり、復元力は空気の圧縮性に伴う弾性力である。一方、大気中の空気塊が何らかの理由で上下に変位すると、その際の圧力変化に応じた断熱変化により、上昇した空気は周囲より低温で重くなり、また下降した空気は周囲より高温で軽くなる。このため大気に働く重力がその変位を元に戻すように作用して波動を引き起こす。これは（内部）重力波であり、復元力は重力（浮力）である。

現実の大気中では、音波も浮力やコリオリ力の影響を受け、また内部重力波もコリオリ力の影響を受けるので、その性質が変化している。様々な波動の性質を知っておくことは、数値予報モデルを扱う際にも必須である。

本章では、線形波動論を用いて、前半では 3 つの特殊な場合として、重力等の影響がなく 1 方向のみに伝わる音波と、地球自転の影響を考慮しない内部重力波、及び、地球自転の影響により変形された重力波である慣性重力波を扱い、後半ではそれらを一般化した波動の性質について説明する。さらに大規模で地球自転の影響を大きく受ける波動については、次章で扱う。なお、本章と次章で扱うのは、波動の振幅が時間とともに変化しない中立波動である。そして、対象として扱う現象のスケールにより異なる方程式系を用いる。

6.1 線形波動論への導入

6.1.1 摂動法

フーリエ変換の考え方により、大気の運動はさまざまな波動の重ね合わせとして考えることができる。本章では基礎方程式系から出発し、その中に含まれる波動解を調べる。そのためには、方程式系を満足する比較的簡単な流れの場（**基本場**、または基本状態と呼ぶ）をまず設定し、そこに波動状の**微小擾乱**が加わったと考え、その波動擾乱の満足する方程式を数学的に求めて、その解を調べる。現実の現象では非線形効果により複雑な変化が生じるが、波動擾乱の振幅が十分小さければ、擾乱部分の方程式から非線形項を無視して方程式を線形化できると考える。このような方法が**摂動法**である。既に第 1 章で音波、第 2 章で浅水重力波、第 3 章で地衡風調節、そして第 5 章で準地衡風近似を説明した際に、基本場と微小な変動に分解して評価する方法をとっていた。

手法を改めて確認すると、例えば東西風x方向の分布と時間変化 $u(x,t)$ について、xとtによらない基本場 $\bar{u}$ と擾乱（摂動） u' の成分に分離し、 $u(x,t)=\bar{u}+u'(x,t)$ と書くと、$\partial\bar{u}/\partial x=0$ であることから慣性項は以下のように書ける。

$$u\frac{\partial u}{\partial x}=(\bar{u}+u')\frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}+u')=\bar{u}\frac{\partial u'}{\partial x}+u'\frac{\partial u'}{\partial x}$$

摂動法を用いる場合、2 つの仮定を満たす必要がある。

（1）摂動成分を 0 とした場合に、基本場自体ももとの方程式系を満足しなければならない。

（2）擾乱の振幅は基本場と比較して十分に小さく無視できる。

後者に関しては、$|u'/\bar{u}| \ll 1$ であり $|\bar{u}\,\partial u'/\partial x| \gg |u'\,\partial u'/\partial x|$ であると仮定する。すると上記の慣性項では右辺第 2 項が 2 次の項（$'$ のついた変数が 2 個かかっている項）すなわち非線形項で、微小量として無視できるので、

$$u\frac{\partial u}{\partial x} \approx \bar{u}\frac{\partial u'}{\partial x}$$

と近似できる。このような近似により、擾乱場と基本場の方程式系をそれぞれ構築する。

そこからさらに微小擾乱部分の波動解を調べるのが**線形波動論**（linear perturbation theory）である。

6.1.2 波動の分散関係と位相速度・群速度

第 2 章では簡単な例として浅水方程式系により浅水重力波を扱った。これは重力が復元力として働く、重力波である。その際、水平運動と水面の高さについて、それぞれ $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}'$, $h = H + h'$ とおいて、微小変動の方程式系で表していた。同様の波動について、ここではx方向のみに伝わる波を考える。

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = -g\frac{\partial h'}{\partial x}$$

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + H\frac{\partial u'}{\partial x} = 0$$

これは簡単な形なので、どのような波動なのかは第 2 章で容易に求められたが、複雑な方程式系の場合は、それらに波動解を与えてその波数と振動数を求める。ここではこれらの方程式系に

$$u' = u_0 \exp[i(kx - \sigma t)], \qquad h' = h_0 \exp[i(kx - \sigma t)]$$

の形の波動解を与えてみる。すると

$$u_0 \sigma = g h_0 k, \qquad h_0 \sigma = u_0 H k$$

となるので、これらからu_0とh_0を消去して

$$(\sigma/k)^2 = gH$$

が得られる。ここから、**位相速度**（phase velocity）　$c_p = \sigma/k = \pm\sqrt{gH}$ であることがわかる。なお、この波数kと振動数σの関係式を、この波動の**分散関係**（dispersion relationship）という。ただし、この例では波数と振動数が比例関係にあり、位相速度が波数によらない。このような場合は「分散がない」（非分散性波動）という。

実際の大気中の波動はしばしば分散があり、また複数の波数・振動数の波が存在し、大気の運動を表す方程式系を解くと様々な波数・振動数の組み合わせが導出される。ここでは単純な複数の波動が同時に存在しているときの波について考える。図 6.1a のように波長が若干異なる 2 つの波を重ね合わせると、図 6.1b のように波長の非常に長い波と波長の短い波の重ね合わせのように見える。これを波動関数で表すと以下のようになる。まず、波数と振動数がそれぞれ、$k + \delta k$ と $\sigma + \delta\sigma$ の波、及び、$k - \delta k$ と $\sigma - \delta\sigma$ の波の重ね合わせとして、

$$\psi(x,t) = \exp[i\{(k+\delta k)x - (\sigma + \delta\sigma)t\}] + \exp[i\{(k-\delta k)x - (\sigma - \delta\sigma)t\}]$$

のように表し、これを変形すると、

$$\psi(x,t)=\left[e^{i(\delta kx-\delta\sigma t)}+e^{-i(\delta kx-\delta\sigma t)}\right]e^{i(kx-\sigma t)}=2\cos(\delta kx-\delta\sigma t)\,e^{i(kx-\sigma t)}$$

となる。これは、短波長（波数k）・高周波（振動数σ）のいわゆる搬送波（carrier wave）が位相速度 $c_p=\sigma/k$ で進むのに対して、長波長（波数 δk）・低周波（振動数 $\delta\sigma$）の波（envelope）で表される振幅の特に大きい領域（波束：wave packet）が速度 $c_g=\delta\sigma/\delta k$ で進むことを意味する。このように**群速度**（group velocity）$c_g=\partial\sigma/\partial k$ が定義される。一般に波動のエネルギーの輸送は群速度による。非分散性波動の場合は、群速度と位相速度が一致する。

図 6.1 で (b) の太線は $\sin(\pi x)-\sin(0.8\pi x)$ であり、波長 2.2 の短波長波動が現れている。同じ図中の細線は envelope で、$\pm\sin(0.1\pi x)$ で波長 20 の長波長波動である。(c) の太線は (a) の太線の波動（波長 2）が位相 0.6 進み、(a) の細線の波動（波長 2.5）が位相 0.25 進んだ場合の合成である。これを (b) と比較すると、波長 2.2 の短波長波動は位相が 0.44 進み、波長 20 の長波長波動は位相が 2 進んでいる。これにより、リッジ C と D は振幅が増大する一方、A と B は減衰している。つまり、この例では位相速度より群速度が大きく、（短波長）波動の位相よりもエネルギーが速く進むことを表す。

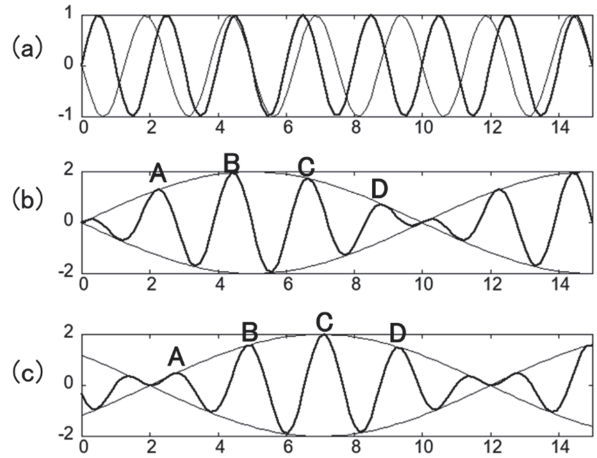


図 6.1 (a) 太線は$\sin(\pi x)$ すなわち波長 2 の波動で、細線は$-\sin(0.8\pi x)$ すなわち波長 2.5 の波動。(b) 太線は (a) の 2 つの波動の合成で、細線は太線のグラフの包絡線。(c) (b) と同じ、ただし (a) の太線と細線の波動が異なる速度で進んだ場合の例。（本文参照）

6.1.3 1 次元の波動の例：音波

摂動法の利用例として、大気中の波動であり、第 1 章でも扱った音波を取り上げる。ここでは特に、摩擦力や非断熱加熱だけでなく重力や地球自転の影響を受けない純粋な音波が伝わる場合で、x方向に基本場の流れがあり、空気塊の変位がx方向にのみ起こるような状態について見ておく。局所直交座標系の基礎方程式は

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\tag{6.1.1a}$$

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}=0\tag{6.1.1b}$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{\partial\theta}{\partial t}+u\frac{\partial\theta}{\partial x}=0\tag{6.1.1c}$$

(6.1.1a) は x方向の運動方程式、 (6.1.1 b) は連続の式、(6.1.1c) は熱力学方程式である。温位は

$$\theta = (p/\rho R)\cdot(p_0/p)^{R/C_p}$$

で、この両辺の対数を取ると、$\gamma \equiv C_p/C_v$ も使って、

$$\ln\theta = \left(1 - R/C_p\right)\ln p - \ln\rho + \text{constant} = \gamma^{-1}\ln p - \ln\rho + \text{constant} \tag{6.1.2}$$

と書ける。これを時間微分（d/dt）すると、(6.1.1c) より

$$\frac{1}{\gamma}\frac{d\ln p}{dt} - \frac{d\ln\rho}{dt} = 0 \tag{6.1.3}$$

(6.1.3) と (6.1.1b) から

$$\frac{1}{\gamma}\frac{d\ln p}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{6.1.4}$$

が得られる。また、(6.1.1a) と (6.1.4)を以下のように書き直しておく。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \tag{6.1.5a}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma p\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{6.1.5b}$$

ここで、線形化のため、xとtによらない基本場$\bar{u}$、$\bar{p}$、$\bar{\rho}$を用いて以下のように置く。

$$u = \bar{u} + u'(x,t), \quad p = \bar{p} + p'(x,t), \quad \rho = \bar{\rho} + \rho'(x,t) \tag{6.1.6}$$

これを (6.1.5a,b) に代入すると、

$$\frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial t} + (\bar{u}+u')\frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial x} + \frac{1}{\bar{\rho}}\left(1 - \frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right)\frac{\partial(\bar{p}+p')}{\partial x} = 0 \tag{6.1.7a}$$

$$\frac{\partial(\bar{p}+p')}{\partial t} + (\bar{u}+u')\frac{\partial(\bar{p}+p')}{\partial x} + \gamma(\bar{p}+p')\frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial x} = 0 \tag{6.1.7b}$$

ここで、テイラー展開し 2 次以上の項を無視した次の関係を使っている（第 1 章付録 1A も参照)。

$$\frac{1}{(\bar{\rho}+\rho')} = \frac{1}{\bar{\rho}}\left(1 + \frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right)^{-1} \approx \frac{1}{\bar{\rho}}\left(1 - \frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right)$$

(6.1.7a,b) から、変動がない場合として基本状態

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x} = 0 \tag{6.1.8a}$$

$$\frac{\partial\bar{p}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x} + \gamma\bar{p}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} = 0 \tag{6.1.8b}$$

が得られる（ただしここでは基本場はxとtによらないのですべて 0 である)。微小擾乱成分の方程式系としては、 (6.1.7a,b) で 2 次以上の項を無視し、$\bar{u},\ \bar{p},\ \bar{\rho}$が$x, t$に関して一様であることも考慮すると、

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial p'}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)u' + \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \tag{6.1.9a}$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial p'}{\partial x}+\gamma\bar{p}\frac{\partial u'}{\partial x}=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)p'+\gamma\bar{p}\frac{\partial u'}{\partial x}=0 \tag{6.1.9b}$$

が得られる。(6.1.9b) の両辺に $(\partial/\partial t+\bar{u}\,\partial/\partial x)$ を適用し、(6.1.9a) を用いてu'を消去すると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 p'-\frac{\gamma\bar{p}}{\bar{\rho}}\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2}=0 \tag{6.1.10}$$

となり、よく知られた波動方程式になる。これに波動解

$$p'=P\exp[i(kx-\sigma t)] \tag{6.1.11}$$

を与えると、

$$(-i\sigma+ik\bar{u})^2-(\gamma\bar{p}/\bar{\rho})(ik)^2=0$$

が得られ、ここから振動数σが得られる。

$$\sigma=k\left(\bar{u}\pm\sqrt{\gamma\bar{p}/\bar{\rho}}\right) \tag{6.1.12}$$

位相速度 c は、

$$c=\sigma/k=\bar{u}\pm\sqrt{\gamma\bar{p}/\bar{\rho}}=\bar{u}\pm c_s \tag{6.1.13}$$

である。ここで、$c_s\equiv\sqrt{\gamma\bar{p}/\bar{\rho}}$ は音速であり、c はドップラーシフトした音波の速度（位相速度）であることを意味する。また群速度 $c_g=\partial\sigma/\partial k$ もcに等しく、音波は分散がないことがわかる。

u' についても (6.1.11) と同様に

$$u'=U\exp[i(kx-\sigma t)]$$

のように置くと、(6.1.9b) からUとPの関係が得られるので、

$$u'=-\frac{-\sigma+k\bar{u}}{k\gamma\bar{p}}p'=\pm\frac{p'}{\bar{\rho}c_s} \tag{6.1.14}$$

が得られる。

音波のエネルギー方程式も求めよう。微小変動の方程式系 (6.1.9a,b) で、簡単のため基本状態が静止状態（$\bar{u}=0$）とすると、

$$\frac{\partial u'}{\partial t}+\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial p'}{\partial x}=0 \tag{6.1.15a}$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t}+\bar{\rho}c_s^2\frac{\partial u'}{\partial x}=0 \tag{6.1.15b}$$

と書ける。(6.1.15a) $\times\bar{\rho}u'+$ (6.1.15b) $\times p'/\bar{\rho}c_s^2$ を計算して整理すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\bar{\rho}{u'}^2+\frac{1}{2\bar{\rho}c_s^2}{p'}^2\right]+\frac{\partial}{\partial x}(p'u')=0 \tag{6.1.16}$$

この式の左辺の時間微分の括弧内は音波のエネルギー密度で、第 1 項が運動エネルギー、第 2 項が弾性エネルギーを表す。一方、第 2 項の $p'u'$ は圧力のなす仕事率で、エネルギーフラックスに相当する。エネルギー密度をEとすると、(6.1.14) も用いて、

$$E \equiv \frac{1}{2}\bar{\rho}u'^2 + \frac{1}{2\bar{\rho}c_s^2}p'^2 = \frac{1}{\bar{\rho}c_s^2}p'^2 \tag{6.1.17}$$

となり、運動エネルギー密度と弾性エネルギー密度が等しいことがわかる。さらに、エネルギーフラックス$\boldsymbol{F}$は

$$\boldsymbol{F} \equiv p'u' = \pm\frac{p'^2}{\bar{\rho}c_s} = (\pm c_s) \times E = \boldsymbol{c}_g E \tag{6.1.18}$$

となり、波動のエネルギーが群速度で伝わることが表される。

大気現象で音波が重要な役割をするものは少ないが、レーダーが電波を用いて観測を行うように、音波を用いてそのドップラーシフトから上空の状態を調べる測器がある（ドップラーソーダーや電波音波併用レーダー：RASS)。音波は一般に減衰が大きいが、核実験や火山噴火などによって生じた音波のうち低周波のもの（低周波音波、インフラソニック波）は、遠く離れた場所まであまり減衰せずに伝播して、空振として観測されることがある。数値モデルではむしろ音波の除去が必要になることがある（第 6.4 節及び付録 6A 参照)。

6.1.4 平面波と波数ベクトル

前項の音波は縦波であり、1 次元の運動のみで表現したが、気象学に関連する波動はほとんどが横波であり、その運動は 2 次元または 3 次元で考える必要がある。ここではx-y平面上で伝播する波動を

$$\psi = \psi_0 \exp[i(kx + ly - \sigma t)] \tag{6.1.19}$$

の形で表し、図 6.2a に示す。kとlはそれぞれ、x 方向と y 方向の波数である。これは任意の時刻tに、$kx + ly =$一定となる直線（図中の細線）が等位相となる。またz方向に一様であるなら、x-y平面における直線はx-y平面に垂直な平面（等位相面）を表す。これを**平面波**の**波面**（wave front）という。図のように波面とy軸のなす角をαとすると、この波動の波長λと、x軸とy軸それぞれに沿った方向の波長λ_xと λ_yは、$\lambda = \lambda_x \cos\alpha = \lambda_y \sin\alpha$ より

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda_x^2} + \frac{1}{\lambda_y^2} \tag{6.1.20}$$

の関係があることがわかる。

ここで**波数ベクトル** $\boldsymbol{k} = (k, l)$ を定義する（ここでは$k > 0$、$l > 0$とする）と、これは波面を表す直線の法線ベクトルで $k = |\boldsymbol{k}|\cos\alpha$、 $l = |\boldsymbol{k}|\sin\alpha$ （ただし $|\boldsymbol{k}|^2 = k^2 + l^2$）であり、波面の進行方向を表す。$\lambda_x = 2\pi/k$、$\lambda_y = 2\pi/l$ であることと (6.1.20) から、この波動の波長は

$$\lambda = 2\pi/|\boldsymbol{k}| \tag{6.1.21}$$

となり、波数 $|\boldsymbol{k}|$ で表される。そして位相速度は 1 波長の距離を 1 周期の時間（$= 2\pi/\sigma$）で進む速度なので、波動の位相速度c_p及びx軸とy軸に沿った方向の位相速度 c_{px}とc_{py}は

$$c_p = \frac{\sigma}{|\boldsymbol{k}|}, \qquad c_{px} = \frac{\sigma}{k}, \qquad c_{py} = \frac{\sigma}{l}, \tag{6.1.22}$$

と書ける。これらと (6.1.20) を用いると

$$\frac{1}{{c_p}^2}=\frac{1}{{c_{px}}^2}+\frac{1}{{c_{py}}^2} \tag{6.1.23}$$

の関係が得られる。$|c_p|$は$\sqrt{{c_{px}}^2+{c_{py}}^2}$ とは表せないこと、すなわち位相速度は (6.1.22) の各式を使っての (c_{px}, c_{py}) の形のベクトル成分表記ができないことに特に注意が必要である。

波数ベクトルを用いて波動の性質を表すには、図 6.2b のように軸を波数で取った**波数空間**で表すこともある。第 7 章でロスビー波の考察に波数空間を用いる。

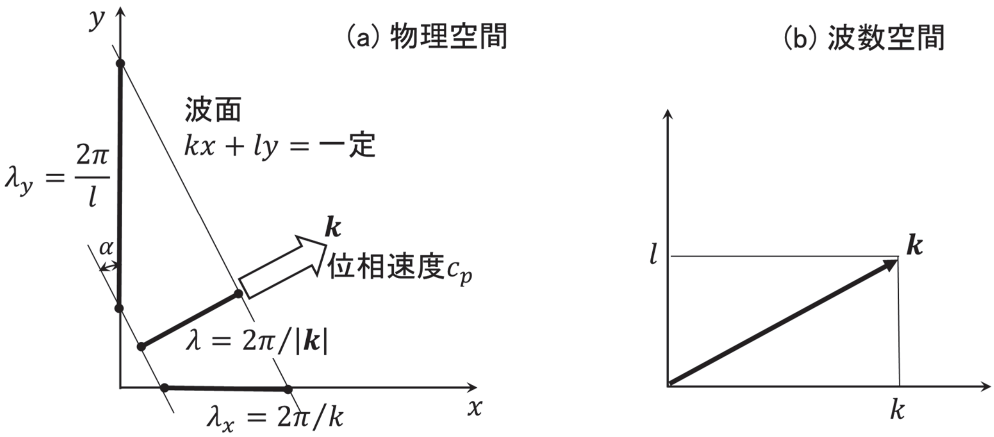


図 6.2　x-y平面上で波数ベクトル$\boldsymbol{k}(k>0、l>0)$を持った波動の模式図。
(a) 物理空間、(b) 波数空間。

6.2 内部重力波

この節では**内部重力波**（internal gravity wave）を取り上げる。第 2 章の浅水重力波が流体表面の変動として現れる波であるのに対して、内部重力波は、大気の内部で空気塊が浮力により振動する。復元力が重力（浮力）である点では浅水重力波と同じである。ただし、浅水重力波はその波動が鉛直方向に伝播することは考えなかったのに対して、内部重力波は水平方向だけでなく鉛直方向にも伝播する。

内部重力波は山岳を乗り越える流れや、激しい湿潤対流などで生じた、強い上昇流に伴って励起される。そしてこれは空気塊の鉛直運動を伴うので、メソスケール現象の発生にも関連することがあり、また衛星やレーダーの観測で雲や降水域として可視化されることがある。内部重力波が不安定化したものの一つに第 8 章のケルビン・ヘルムホルツ不安定がある。

6.2.1 パーセル法による内部重力波

はじめに、内部重力波に伴うx-z平面内の運動をパーセル法で考える。ここでは、x方向とz方向の波数をそれぞれ $k<0$、$m<0$ とすると、図 6.3 のような波面（$\varphi=kx+mz=$一定となる面）を持つ波となる。この波面と鉛直軸のなす角をαとすると $\cos\alpha=k/\sqrt{k^2+m^2}$ である。

この波動は基本的には横波であり、波に伴う空気塊の運動は、波数ベクトルに直交する。図 6.3 では空気塊の運動は太実線のようになると考えられる。このときの空気塊の変位を δs とすれば、それに伴う鉛直方向の変位は $\delta z=\delta s\cdot\cos\alpha$ と表される。第 2 章で静的安定度に関して説明されていたように、乾燥空気塊が静的に安定な大気中を断熱的に鉛直方向に δz だけ変位した際の、浮力のみによる運動の方程式は、ブラント・バイサラ振動数 $N^2=g\,d\ln\bar{\theta}/dz$を用いて

$$\frac{d^2}{dt^2}\delta z = -N^2\delta z$$

であった（浮力振動）。今、浮力を空気塊の振動方向とそれに直交する方向（位相速度の方向）に分解すると、振動方向の浮力の成分は $-N^2\delta z\cos\alpha$ になるので、空気塊の振動方向の運動方程式は

$$\frac{d^2}{dt^2}\delta s = -N^2\delta z\cos\alpha = -N^2\cos^2\alpha\cdot\delta s$$

と書ける。これは単振動の式であるから、振動数は

$$\sigma^2 = N^2\cos^2\alpha = N^2k^2/(k^2+m^2) \tag{6.2.1}$$

となる。ここから、$|\sigma|/N = |\cos\alpha|$ であることもわかる。図 6.3 の角度αは、波の位相の進行方向（図中の白抜き矢印）とx軸のなす角に等しい。この角度αが小さいほど（すなわち$|m|$に対して$|k|$が大きいほど、つまり位相の進行方向が水平に近いほど）空気の振動方向は鉛直に立ち、復元力は大きくなる。それにつれて振動数 $|\sigma|$ も大きくなり、その上限（周期としては下限）がちょうどブラント・バイサラ振動数で与えられることになる。

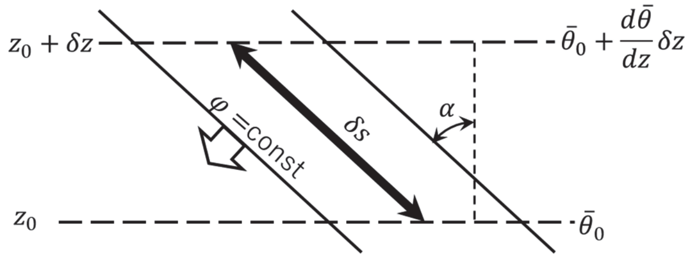


図 6.3　純粋な内部重力波で、位相線が鉛直方向から角度αで傾いている場合の、空気塊の振動の経路（黒太線の矢印）。Holton (2004) に基づく。

6.2.2 摂動法による内部重力波

a. ブシネスク近似による波動

次に、内部重力波に伴うx-z面内の運動を摂動法で表す。

ここでは以下の形の局所直交座標系の基礎方程式を用いる。

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{6.2.2a}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial z} = -\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+g\right) \tag{6.2.2b}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{6.2.2c}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}+u\frac{\partial \theta}{\partial x}+w\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \tag{6.2.2d}$$

(6.2.2a) (6.2.2b) は、それぞれ、x方向とz方向の運動方程式、 (6.2.2c) は連続の式、(6.2.2d) は熱力学方程式である。ここで、(6.2.2c) の連続の式は、本来は第 6.1 節で音波に対して用いたように

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0 \tag{6.2.3}$$

と書くべきである。しかし (6.2.3) には大気の圧縮性を表す密度の時間変化の項が入っており、このためにこれらの方程式系を解くと密度波である音波も解となってしまう。気象現象の解析においては音波はほとんど関係がないので、音波が解に含まれないように、連続の式で大気を非圧縮としたのが (6.2.2c) である。それにより内部重力波が表現できる。ただし、熱力学方程式 (6.2.2d) では温位の変化が表現されており、そこには密度変化も伴っていることに注意が必要である。この点についても以下の議論のどこかで工夫（近似）を行っているので、注意して読んでいただきたい。このように密度波のうち音波を除去して気象現象に関係のある波動だけを取り出す近似を、**ブシネスク近似**（Boussinesq approximation）と呼ぶ。

さて、温位は、

$$\theta=(p/\rho R)\cdot(p_0/p)^{\kappa}$$

である。ここで $\kappa \equiv R/C_p$ である。(6.1.2)と同様に、

$$\ln\theta=(1-\kappa)\ln p-\ln\rho+C=\gamma^{-1}\ln p-\ln\rho+C \tag{6.2.4}$$

と書ける。ここで、 $C=\ln p_0-\ln R$ （定数）である。

次に、(6.2.2a-d) を線形化するために、以下のように置く。

$$\rho=\rho_0+\rho',\quad u=\bar{u}+u',\quad w=w',\quad p=\bar{p}(z)+p',\quad \theta=\bar{\theta}(z)+\theta' \tag{6.2.5}$$

ここでは基本場の東西風と密度が一定であると仮定している。基本場の気圧 $\bar{p}$ は (6.2.2b)を満たす必要があり、またそのうえで基本場の温位 $\bar{\theta}$ は (6.2.4) の関係を満たさなければならないので、それぞれ以下のようになる。

$$\frac{d\bar{p}}{dz}=-\rho_0 g \tag{6.2.6}$$

$$\ln\bar{\theta}=\gamma^{-1}\ln\bar{p}-\ln\rho_0+C \tag{6.2.7}$$

(6.2.2a-d) に (6.2.5) を代入し、またテイラー展開して摂動成分（$'$のついた量）の 2 次の項を無視することで線形化する。例えば (6.2.2b) の右辺の括弧内は

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+g&=\frac{1}{\rho_0+\rho'}\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}+\frac{\partial p'}{\partial z}\right)+g\approx\frac{1}{\rho_0}\left(1-\frac{\rho'}{\rho_0}\right)\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}+\frac{\partial p'}{\partial z}\right)+g\\&\approx\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}\left(1-\frac{\rho'}{\rho_0}\right)+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial z}+g=\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial z}+\frac{\rho'}{\rho_0}g\end{aligned} \tag{6.2.8}$$

と書ける。ここで、(6.2.6) を使ったことで、$\bar{p}$が消去された。また (6.2.4) は

$$\ln\left[\bar{\theta}\left(1+\frac{\theta'}{\bar{\theta}}\right)\right]=\gamma^{-1}\ln\left[\bar{p}\left(1+\frac{p'}{\bar{p}}\right)\right]-\ln\left[\rho_0\left(1+\frac{\rho'}{\rho_0}\right)\right]+C \tag{6.2.9}$$

を経て

$$\ln\bar{\theta}+\ln\left(1+\frac{\theta'}{\bar{\theta}}\right)=\gamma^{-1}\left[\ln\bar{p}+\ln\left(1+\frac{p'}{\bar{p}}\right)\right]-\ln\rho_0-\ln\left(1+\frac{\rho'}{\rho_0}\right)+C$$

と変形し、さらに任意の $\varepsilon\ll 1$ の場合に $\ln(1+\varepsilon)\approx\varepsilon$ であることを考慮すると、

$$\ln\bar{\theta}+\frac{\theta'}{\bar{\theta}}\approx\gamma^{-1}\left(\ln\bar{p}+\frac{p'}{\bar{p}}\right)-\ln\rho_0-\frac{\rho'}{\rho_0}+C$$

と書ける。そして平均場に関する式 (6.2.7) との差を取ると

$$\frac{\theta'}{\bar{\theta}}\approx\frac{1}{\gamma}\frac{p'}{\bar{p}}-\frac{\rho'}{\rho_0}$$

が得られる。これを用いて ρ' を表す。ただし音速 $c_s\equiv\sqrt{\bar{p}\gamma/\rho_0}$ も使って、

$$\frac{\rho'}{\rho_0}\approx\frac{p'}{\rho_0 c_s^2}-\frac{\theta'}{\bar{\theta}} \tag{6.2.10}$$

と書ける。この式により、密度の微小変動が、気圧の変動と温位の変動で表されている。密度変化は音波でも生じ、右辺第 1 項が音波の変動に対応する。ただし、今考えたいのは、天気の変化に関係するような、空気塊の鉛直運動が浮力を復元力として生じる波であり、そこでは空気塊の断熱膨張・断熱圧縮により密度と温位の変化が生じると考えられる。すなわち、浮力に関連した波では、(6.2.10) 式で右辺第 1 項より第 2 項が卓越すると考えられるので、1 次近似として

$$\frac{\rho'}{\rho_0}\approx-\frac{\theta'}{\bar{\theta}} \tag{6.2.11}$$

を採用する。この近似は音速を無限大としたと考えることもできる。

(6.2.8) と (6.2.11) も用いて (6.2.2a-d) を線形化すると、微小変動成分の方程式系は、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)u'=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x} \tag{6.2.12a}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)w'=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial z}+\frac{\theta'}{\bar{\theta}}g \tag{6.2.12b}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial w'}{\partial z}=0 \tag{6.2.12c}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\theta'+w'\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial z}=0 \tag{6.2.12d}$$

となる。鉛直方向の摂動の運動方程式 (6.2.12b) に、鉛直気圧傾度の項（右辺第 1 項）に加えて、断熱膨張／圧縮に関する浮力の項（右辺第 2 項）があるのが特徴である。

(6.2.12a-d) では変数が 4 個あるので、まず (6.2.12a,b) から p' を消去すると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w'}{\partial x}-\frac{\partial u'}{\partial z}\right)-\frac{g}{\bar{\theta}}\frac{\partial\theta'}{\partial x}=0 \tag{6.2.13}$$

これは渦度方程式のy成分である。さらに (6.2.12c,d) を使うと、w' のみの式となって、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w'}{\partial z^2}\right)+N^2\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2}=0 \tag{6.2.14}$$

ここで、Nはブラント・バイサラ振動数（$N^2\equiv g\,d\ln\bar{\theta}/dz$）で、ここでは定数と考えると、$w'$のみで閉じた式となったので、ここから w'を求めることができる。

【問題】(6.2.14) 式を求めよ。

b. 内部重力波の分散関係と伝播

(6.2.14) 式で、w'について、次の波動解を与える（W_r、W_iは実数）。

$$w' = W\exp[i(kx + mz - \sigma t)] = (W_r + iW_i)\exp[i(kx + mz - \sigma t)] \tag{6.2.15}$$

これにより、以下の分散関係式が得られる。

$$(\sigma - \bar{u}k)^2(k^2 + m^2) - N^2k^2 = 0 \tag{6.2.16}$$

x-z面内の波数ベクトルを$\boldsymbol{k} = (k, m)$とすると、

$$\hat{\sigma} \equiv \sigma - \bar{u}k = \pm\frac{Nk}{\sqrt{k^2 + m^2}} = \pm\frac{Nk}{|\boldsymbol{k}|} \tag{6.2.17}$$

ここで、$\hat{\sigma}$ は固有振動数（intrinsic frequency）で、基本場の流れに相対的な振動数である。符号が正の場合は基本場の流れに相対的に東向き、負の場合は西向きに位相が伝播する波を表す。これに対して σ はドップラーシフトした振動数である。なお、(6.2.17) の固有振動数 $\hat{\sigma}$ はパーセル法で求めた (6.2.1) 式のσに等しいことに注意してほしい。

基本場の流れに相対的な位相速度は、x成分・z成分がそれぞれ $c_x = \hat{\sigma}/k$、$c_z = \hat{\sigma}/m$ であり、地面に相対的な位相速度の大きさc_pと群速度ベクトルは、

$$c_p = \frac{|\sigma|}{|\boldsymbol{k}|} \tag{6.2.18}$$

$$\boldsymbol{c}_g = \frac{\partial\sigma}{\partial\boldsymbol{k}} = \left(\bar{u} \pm \frac{Nm^2}{(k^2 + m^2)^{3/2}}, \qquad \mp\frac{Nmk}{(k^2 + m^2)^{3/2}}\right) \tag{6.2.19}$$

である。(6.2.19) より、基本場の流れに相対的な群速度ベクトルは、波数ベクトル$\boldsymbol{k}$に直交する。

今度は、 $\hat{\sigma} = Nk/|\boldsymbol{k}|$ とし（つまり (6.2.17) 式で右辺の符号が+の場合とする）、波数ベクトルの向きを$k > 0$、$m < 0$ とする。この時の構造は図 6.4 のようになり、波面（$\phi = kx + mz$ となる面）は東ほど上へと傾く。そして位相は、基本場の流れに相対的に東・下向きへと伝播する。群速度ベクトルは東・上を向く。上方に伝播するということは、地表面の影響や下層起源の湿潤対流で発生した内部重力波のエネルギーが、圏界面を超えて中層大気まで伝播しうることが説明できる。

次に、さらに簡単のために $\bar{u} = 0$ として、ここまでで考えた内部重力波の各変数の摂動成分について、(6.2.15) と同様に、

$$\begin{gathered} u' = U\exp[i(kx + mz - \sigma t)], \qquad p' = P\exp[i(kx + mz - \sigma t)], \\ \theta' = \Theta\exp[i(kx + mz - \sigma t)] \end{gathered} \tag{6.2.20}$$

のようにして、(6.2.12a,c,d) に与えると、

$$-\sigma U = -\frac{kP}{\rho_0}, \qquad kU + mW = 0, \qquad -i\sigma\Theta + \frac{\bar{\theta}N^2}{g}W = 0$$

を経て

$$U = -\frac{m}{k}W, \quad \Theta = -\frac{i}{\sigma}\frac{\bar{\theta}N^2}{g}W, \quad P = -\frac{m\sigma}{k^2}\rho_0 W \tag{6.2.21}$$

が得られる。ここで、(6.2.15)

$$w' = W\exp[i(kx + mz - \sigma t)] = (W_r + iW_i)\exp[i(kx + mz - \sigma t)]$$

の複素解において物理的に意味があるのは実部なので、

$$\begin{aligned} w' &= \mathrm{Re}[W\exp\{i(kx + mz - \sigma t)\}] \\ &= W_r\cos(kx + mz - \sigma t) - W_i\sin(kx + mz - \sigma t) \end{aligned} \tag{6.2.22a}$$

を考えると、

$$u' = -(m/k)[W_r\cos(kx + mz - \sigma t) - W_i\sin(kx + mz - \sigma t)] \tag{6.2.22b}$$

$$p' = -(\rho_0 m\sigma/k^2)[W_r\cos(kx + mz - \sigma t) - W_i\sin(kx + mz - \sigma t)] \tag{6.2.22c}$$

$$\theta' = (\bar{\theta}N^2/g\sigma)[W_r\sin(kx + mz - \sigma t) + W_i\cos(kx + mz - \sigma t)] \tag{6.2.22d}$$

と表される。これらにより、各摂動成分の位相のずれが以下のように説明できる。

- $k > 0$、$m < 0$ の場合には u' と w' の位相が一致する。（つまり、東向き風と上昇流、西向き風と下降流がそれぞれ同じ領域で生じる）
- m と σ の符号が逆の場合は、p' と w' の位相が一致する。（つまり気圧上昇と上昇流、気圧下降と下降流がそれぞれ同じ領域で生じる）
- $\sigma > 0$ の場合は θ' の位相が w' の位相よりも 1/4 波長だけ先に進む。

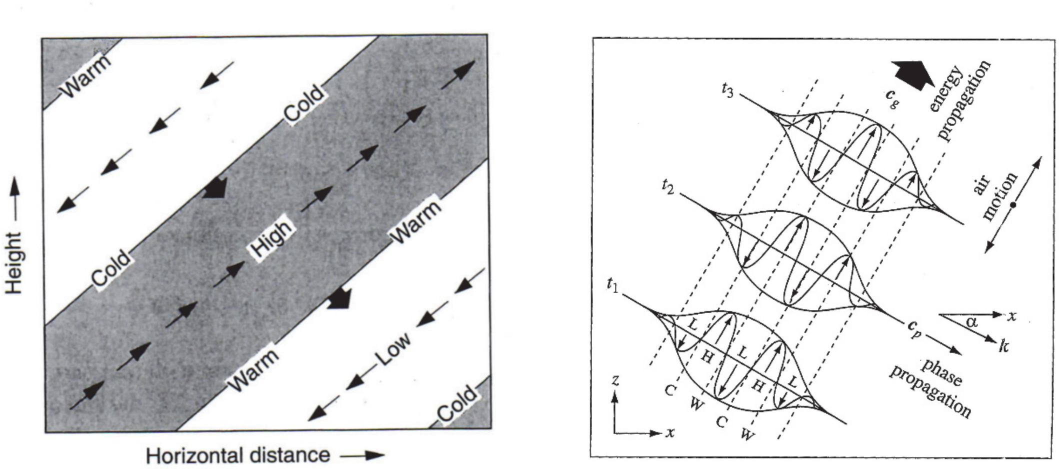


図 6.4　（左）内部重力波の気圧と速度偏差の位相を示す理想的な断面（Holton 2004、後出の図 6.12 (b) と同様）。細い矢印は速度場を、太矢印は位相の進む方向を示す。陰影は上向き運動の領域を示す。（右）内部重力波の基本的な特徴（Lin 2007）。波動の位相とエネルギーはそれぞれ図中の c_p と c_g の方向へ伝播する。H、L、W、C はそれぞれ気圧の高低及び気温の高低の偏差を表す。

c. 内部重力波のエネルギー

ここでも簡単のために $\bar{u}=0$ として、内部重力波のエネルギーについて調べる。方程式系は (6.2.12a-d) から、

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x},\quad \frac{\partial w'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{\theta'}{\bar{\theta}}g,\quad \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0,\quad \frac{\partial \theta'}{\partial t} + w'\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = 0 \qquad \text{(6.2.23a-d)}$$

である。(6.2.23a) $\times u'+$ (6.2.23b) $\times w'+$ (6.2.23c) $\times p'/\rho_0+$ (6.2.23d) $\times g(\theta'/\bar{\theta}) \div (\partial\bar{\theta}/\partial z)$ から、微小擾乱に対するエネルギー方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\rho_0\left(u'^2 + w'^2\right) + \frac{1}{2N^2}\rho_0\left(g\frac{\theta'}{\bar{\theta}}\right)^2\right] + \frac{\partial}{\partial x}(p'u') + \frac{\partial}{\partial z}(p'w') = 0 \qquad \text{(6.2.24)}$$

が得られる。これを 3 次元に拡張すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\rho_0|\boldsymbol{v}'|^2 + \frac{1}{2N^2}\rho_0\left(g\frac{\theta'}{\bar{\theta}}\right)^2\right] + \nabla\cdot(p'\boldsymbol{v}') = 0 \qquad \text{(6.2.25)}$$

である。左辺の時間微分の括弧内第 1 項が運動エネルギー密度、第 2 項が有効位置エネルギー密度、$p'\boldsymbol{v}'$ はエネルギーフラックスを表す。この式は、内部重力波において、エネルギー密度の時間変化がエネルギーフラックスの発散とバランスしていることを表す。

一方、(6.2.20) と (6.2.21) から、

$$u' = \frac{k}{\sigma}\frac{p'}{\rho_0},\qquad w' = -\frac{k^2}{m\sigma}\frac{p'}{\rho_0},\qquad \theta' = i\frac{N^2k^2}{m\sigma^2}\frac{\bar{\theta}}{g}\frac{p'}{\rho_0} \qquad \text{(6.2.26)}$$

これらの 2 乗値の 1 周期平均を計算すると、次のようになる。

$$\overline{u'^2} = \frac{1}{2}\frac{k^2}{\sigma^2}\left|\frac{P}{\rho_0}\right|^2 \qquad \overline{w'^2} = \frac{1}{2}\frac{k^4}{m^2\sigma^2}\left|\frac{P}{\rho_0}\right|^2,\qquad \overline{\theta'^2} = \frac{1}{2}\frac{N^4k^4}{m^2\sigma^4}\left(\frac{\bar{\theta}}{g}\right)^2\left|\frac{P}{\rho_0}\right|^2 \qquad \text{(6.2.27)}$$

これらから、微小擾乱の時間平均エネルギー密度は

$$\overline{E} \equiv \frac{1}{2}\rho_0\left(\overline{u'^2} + \overline{w'^2}\right) + \frac{1}{2N^2}\rho_0\overline{\left(g\frac{\theta'}{\bar{\theta}}\right)^2} = \frac{\rho_0}{4}\frac{k^2(k^2+m^2)}{\sigma^2m^2}\left|\frac{P}{\rho_0}\right|^2 + \frac{\rho_0}{4}\frac{N^2k^4}{m^2\sigma^4}\left|\frac{P}{\rho_0}\right|^2$$

と書ける。ここで、(6.2.17) の分散関係で $\bar{u}=0$ の場合に $\sigma^2(k^2+m^2) = N^2k^2$ なので、時間平均した運動エネルギー密度と有効位置エネルギー密度は等しく、

$$\overline{E} = \frac{\rho_0}{2}\frac{N^2k^4}{m^2\sigma^4}\left|\frac{P}{\rho_0}\right|^2 \qquad \text{(6.2.28)}$$

であることがわかる。

エネルギーフラックスの時間平均は、

$$\overline{p'u'} = \frac{1}{2}\rho_0\frac{k}{\sigma}\left|\frac{P}{\rho_0}\right|^2,\qquad \overline{p'w'} = -\frac{1}{2}\rho_0\frac{k^2}{m\sigma}\left|\frac{P}{\rho_0}\right|^2$$

これをベクトルで表現すると、

$$\overline{p'\boldsymbol{v}'} = \frac{1}{2}\rho_0\frac{k}{\sigma m}\left|\frac{P}{\rho_0}\right|^2(m,-k) = \frac{\rho_0}{2}\frac{N^2k^4}{m^2\sigma^4}\left|\frac{P}{\rho_0}\right|^2\boldsymbol{c_g} = \overline{E}\boldsymbol{c_g} \qquad \text{(6.2.29)}$$

となり、波動のエネルギーが群速度で伝播することが示される。

6.2.3 山岳波

内部重力波のうち水平スケール・時間スケールが小さいものは天気に直接影響することはないが、スケールがやや大きくなると、それによって天気変化が生じることがある。そのような現象のひとつとして、山岳波がある。衛星などの観測において、山脈に平行に雲列が並んだ状態で維持されることで、山脈の存在で励起された内部重力波の上昇流・下降流の分布が可視化されたと説明される。これは流れのある基本場に発生して時間的に移動しない内部重力波と考えられるので、分散関係 (6.2.17) 式から計算したx方向の位相速度

$$c_{px} = \frac{\sigma}{k} = \bar{u} \pm \frac{N}{\sqrt{k^2+m^2}} \tag{6.2.30}$$

が 0 になることが条件である。基本場の流れが西風（$\bar{u} > 0$）の場合にこれを満たすのは右辺第 2 項の符号が－の場合であるので、

$$\sigma = \bar{u}k - \frac{Nk}{\sqrt{k^2+m^2}} \tag{6.2.31}$$

$$\bar{u} = \frac{N}{\sqrt{k^2+m^2}} \tag{6.2.32}$$

が定常波の存在する条件である。この波動の群速度を求めると、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}_g = \frac{\partial\sigma}{\partial\boldsymbol{k}} &= \left(\bar{u} - \frac{Nm^2}{(k^2+m^2)^{3/2}},\quad \frac{Nmk}{(k^2+m^2)^{3/2}}\right) \\ &= \left(\frac{Nk^2}{(k^2+m^2)^{3/2}},\quad \frac{Nmk}{(k^2+m^2)^{3/2}}\right) = \frac{Nk}{(k^2+m^2)^{3/2}}\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{6.2.33}$$

ここから、定常な内部重力波は、群速度は波数ベクトル$\boldsymbol{k}$と平行になること、$\boldsymbol{c}_g$のx成分が正であることから常に山岳の下流側にエネルギーが伝播すること、波動が上方に伝播するには $mk > 0$ である必要があり、波面（$kx + mz =$一定となる面）は高さとともに風上側に傾く。

図 6.5 のような正弦波型の山脈があるとすると、山岳波の水平波長λは、その波源となる山岳の水平スケール程度になると考えられる。$\lambda = 2\pi/k$ なので、定常波の条件 (6.2.32) より、

$$m^2 = \frac{N^2}{\bar{u}^2} - k^2 = \frac{N^2}{\bar{u}^2} - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \tag{6.2.34}$$

が得られる。波動が鉛直方向に伝播するには、$m^2 > 0$ でなければならない（mが虚数の場合は (6.2.20) 式でz方向には波動として伝播しない形になる）ので、(6.2.34) の右辺により、次のように波動伝播の様子が異なることがわかる。

(A) 基本場の風速 $\bar{u}$ と成層状態Nを固定して考えた場合：

$\bar{u}$とNから決まる臨界波長 $\lambda_c = 2\pi\bar{u}/N$ があり、

- $\lambda > \lambda_c$ （山の間隔が広い）→鉛直伝播する
- $\lambda < \lambda_c$ （山の間隔が狭い）→鉛直伝播しない

(B) 山の水平スケール（波長λ）と基本場の成層状態Nを固定して考えた場合：

λとNから決まる臨界風速 $\bar{u}_c = \lambda N/(2\pi)$ があり、

- $|\bar{u}| < \bar{u}_c$ （風が弱い）→鉛直伝播する
- $|\bar{u}| > \bar{u}_c$ （風が強い）→鉛直伝播しない

図では正弦波形の山岳があり、山岳の水平スケールがλ_cと比較して小さい (a) では山岳波の波面の傾きがなく、振幅は上空ほど減衰しており、波動が鉛直方向に伝播していない。一方、λ_cと比較して水平スケールの大きい (b) では波面が高さとともに流れの上流側に傾いており、波のエネルギーが鉛直伝播する内部重力波の性質を示している。

現実には図のような複数の山ではなく孤立した山岳でも山岳波が生じることがある。それについてはさらに別の検討が必要である。孤立峰に関連して生じる山岳波等については Holton (1992, 2004) 及び Holton and Hakim (2012) の Mesoscale Circulations の章や、小倉（1997）を参照していただきたい。

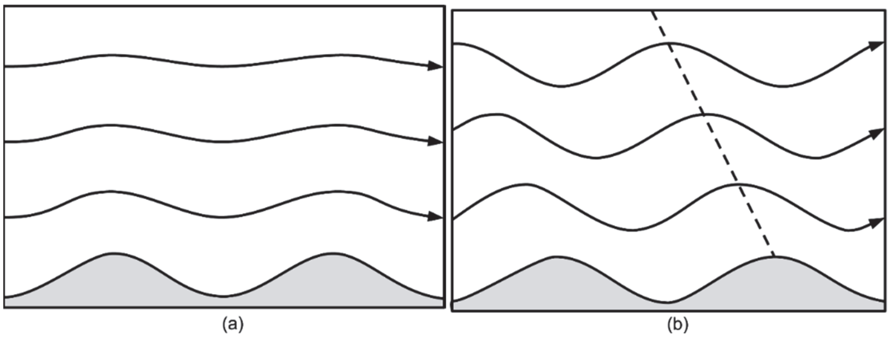


図 6.5　正弦波型の複数の山岳を越える定常的な流れの流線。臨界波長 λ_c と比較して (a) 山岳の間隔が狭い場合、(b) 山岳の間隔が広い場合。(b) の破線は上昇の変位が最大になる位相を表す。Durran (1990) 及び Holton (1992) に基づく。

6.3 慣性重力波（1）

重力波で、水平スケールが数百 km 以上、時間スケールが数時間以上の場合、コリオリの力の影響を受けて運動が変形される。このように地球自転の影響を受けた重力波を**慣性重力波**（inertia gravity wave）と呼ぶ。ここでは前節の内部重力波と同様にパーセル法と摂動法で慣性重力波の性質を調べる。なお、慣性重力波については第 7 章でも浅水方程式系により性質を調べる。

6.3.1 純粋な慣性振動

慣性重力波に重要な、空気塊に対するコリオリ力の影響は、慣性振動と関連している。慣性振動については第 3 章において、水平面上で気圧が一定すなわち気圧傾度力が 0 の場合には、コリオリ力と遠心力がつりあって振動（北半球では時計回りの円運動）が生じることを説明した。この運動の振動数・周期は半径等にはよらず緯度のみで決まり、振動数はf、周期は$2\pi/f = 12\text{hour}/\sin\varphi$　（φは緯度。例えば 45°N の場合は周期 17 時間）であった。

ここでは基本場として、コリオリ力と気圧傾度力が釣り合った定常な東西流（地衡風）

$$fu_g = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad fv_g = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \tag{6.3.1a,b}$$

を考え、$\partial u_g/\partial y \neq 0$ すなわち東西風の水平シアーがあるとして、この流れの安定性をパーセル法によって調べることにする。静力学平衡を仮定し、気圧座標系で扱う。以下は北半球について述べる。

この状態に小さな乱れを与え、空気塊が δt の間に δy だけ変位したとする。$\delta y > 0$（北向きの変位）ならば、北向きの速度成分（$\delta y/\delta t$）に働くコリオリ力により、空気塊は東向きに加速され、それに対して南向きのコリオリ力が増大する。よって、

- 北向きの気圧傾度力が南向きのコリオリ力より大きい場合は、北向き加速が卓越する。空気塊は北向きに進み続ける。これは慣性不安定である。
- 北向きの気圧傾度力が南向きのコリオリ力より小さい場合は、南向き加速が卓越する。空気塊はもとの場所に戻る。これは慣性安定である。

以上のことを数式で見る。空気塊の北への変位 δy（北向き風速$\delta y/\delta t$）を考えると、運動方程式

$$\frac{du}{dt} = fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x} = fv = f\frac{\delta y}{\delta t} \tag{6.3.2a}$$

$$\frac{dv}{dt} = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -fu + fu_g = f(u_g - u) \tag{6.3.2b}$$

を得る。$t = 0$ に $y = y_0$ で地衡風バランスしていた空気塊の東向き速度は $u = u_g(y_0)$である。δt 時間後に空気塊が$y = y_0 + \delta y$ に達したときの東向き速度 $u = u(y_0 + \delta y)$ は、(6.3.2a) も使って、

$$u(y_0 + \delta y) = u_g(y_0) + \frac{du}{dt}\delta t = u_g(y_0) + f\delta y$$

と書ける。一方、$y = y_0 + \delta y$ における基本場の風 $u_g = u_g(y_0 + \delta y)$ は、

$$u_g(y_0 + \delta y) = u_g(y_0) + \frac{\partial u_g}{\partial y}\delta y$$

と書ける。これらを (6.3.2b) の右辺に代入すると、$y = y_0 + \delta y$ における南北風加速度として

$$\frac{dv}{dt} = f\{u_g(y_0 + \delta y) - u(y_0 + \delta y)\} = f\left(\frac{\partial u_g}{\partial y} - f\right)\delta y$$

が得られる。ここで地衡風絶対運動量 $M \equiv fy - u_g$ とおき、また左辺で $v = \delta y/\delta t$とおくと、上式は

$$\frac{d^2\delta y}{dt^2} = -f\frac{\partial M}{\partial y}\delta y$$

これは振動数$\sqrt{f\,\partial M/\partial y}$ の単振動の式で、根号内の $f\,\partial M/\partial y$ の符号により空気塊の運動が決まる。

$f\,\partial M/\partial y > 0$　　南向きコリオリ力＞北向き気圧傾度力　→振動　→慣性安定

$f\,\partial M/\partial y = 0$　　南向きコリオリ力＝北向き気圧傾度力　→慣性中立

$f\,\partial M/\partial y < 0$　　南向きコリオリ力＜北向き気圧傾度力　→北に加速　→慣性不安定

すなわち、$f\,\partial M/\partial y$ はコリオリ力に対する基本場の水平方向の安定性を表す。

慣性不安定になるのは、主に $f < \partial u_g/\partial y$ の場合で（β効果は相対的に小さいとする）、強い西風地衡風の南側となる。

慣性安定の場合の振動数は、西風の水平シアーにより決まり、水平シアーがない場合や風速極大・極

小（$\partial u_g/\partial y = 0$）の位置では振動数は$f$である。西風地衡風速の極大の北側（低気圧性シアー側）では振動数が f より大きく、南側（高気圧シアー側）では f より小さくなる。

6.3.2 パーセル法による慣性重力波の表現

前項の準備のもとに、静的に安定（$N^2 > 0$）な静止大気（$u_g = v_g = 0$）における慣性重力波のメカニズムを考える。この場合は $M = fy$ より $f\,\partial M/\partial y = f^2 > 0$ なので、慣性安定である。ここに小さな乱れを与えた時の空気塊の運動をパーセル法で考えると、この空気塊には、変位を元に戻そうとする復元力として、鉛直方向の浮力と水平方向のコリオリ力の両方が働く。

このときの南北断面における空気塊の運動を、図 6.6 に示している。この運動は横波（波数ベクトル$\boldsymbol{k}$と振動方向が直交する）とすると、波数ベクトル$\boldsymbol{k}$（波の位相の進行方向）と水平軸 yのなす角をαとし、振動面上での空気塊の変位を δs とすれば、変位の鉛直方向及び水平方向への射影はそれぞれ、

$$\delta z = \delta s \cos\alpha\ , \quad \delta y = \delta s \sin\alpha$$

である。また鉛直方向及び水平方向への復元力について、振動方向の成分を求めると、それぞれ

$$-N^2 \delta z \cos\alpha\ , \quad -f^2 \delta y \sin\alpha$$

であるから、振動方向への運動方程式は、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\delta s\right) = -N^2 \delta z \cos\alpha - f^2 \delta y \sin\alpha = -(N^2\cos^2\alpha + f^2\sin^2\alpha)\delta s$$

となる。これは単振動の式で、振動数σは

$$\sigma^2 = N^2\cos^2\alpha + f^2\sin^2\alpha$$

で与えられる。ただし、$f^2/N^2 \sim 10^{-4}$ なので、$\alpha \cong 90°$ の場合（振動がほぼ水平面上である場合）以外は $\sigma^2 \cong N^2\cos^2\alpha$ として良い。この振動数は波数k、mを使って

$$\sigma^2 = \frac{N^2k^2 + f^2m^2}{k^2+m^2} \qquad \left(\cos\alpha = \frac{k}{\sqrt{k^2+m^2}},\quad \sin\alpha = \frac{m}{\sqrt{k^2+m^2}}\right) \tag{6.3.3}$$

と表される。慣性重力波は浮力とコリオリ力を復元力とする波であると言える。

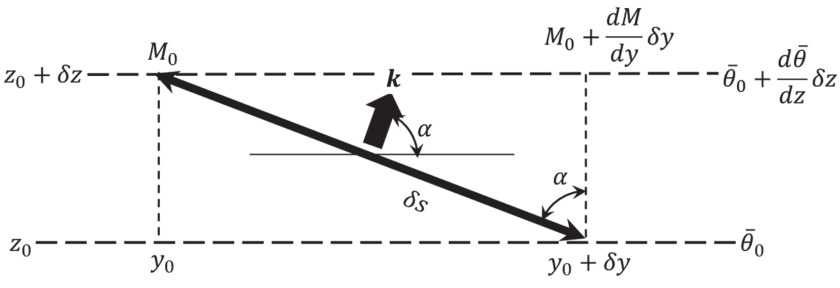


図 6.6　慣性重力波における空気塊の運動。（Holton 2004 に基づく）

6.3.3 摂動法による慣性重力波

第 6.2 節で内部重力波に関して用いたように、ここでもブシネスク近似による微小擾乱の方程式を用いる。基本場は安定成層の静止大気（$\bar{u} = 0$）とする。今回はコリオリの力が無視できない現象が対象なので、水平方向の運動方程式にコリオリ項が加わるとともに、南北風は 0 ではない。すると、微小

変動成分の方程式系は、(6.2.12a-d) 式にコリオリ項と南北風成分の式を加えた

$$\frac{\partial u'}{\partial t} - fv' = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x} \tag{6.3.4a}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + fu' = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial y} \tag{6.3.4b}$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{\theta'}{\bar{\theta}}g \tag{6.3.4c}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \tag{6.3.4d}$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + w'\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = 0 \tag{6.3.4e}$$

となる。簡単のために運動はy方向に一様として、単一の振動数を持つ平面波を仮定した単色平面波解を代入する。

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \\ p'/\rho_0 \\ g\theta'/\bar{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \\ P \\ \Theta \end{pmatrix} \exp\{i(kx + mz - \sigma t)\} \tag{6.3.5}$$

これを (6.3.4a-e) に代入すると、 $N^2 \equiv g(1/\bar{\theta})(d\bar{\theta}/dz)$ も用いて、代数方程式

$$-i\sigma U - fV = -ikP \tag{6.3.6a}$$

$$-i\sigma V + fU = 0 \tag{6.3.6b}$$

$$-i\sigma W = -imP + \Theta \tag{6.3.6c}$$

$$ikU + imW = 0 \tag{6.3.6d}$$

$$-i\sigma\Theta + N^2 W = 0 \tag{6.3.6e}$$

が得られ、これらからU、V、P、Θを消去すると、

$$\sigma^2 k^2 W = (-\sigma^2 + f^2)m^2 W + N^2 k^2 W$$

が得られる。すなわちこの方程式系が非自明解（$U = V = W = P = \Theta = 0$ ではない解）を持つ条件から、次の分散関係式が得られる。

$$\sigma^2 = \frac{N^2 k^2 + f^2 m^2}{k^2 + m^2} \tag{6.3.7}$$

　さらに、現在考えている運動は鉛直スケールより水平スケールの方がはるかに大きいとすると、静力学平衡が適用できて、(6.3.4c) 式で $\partial w'/\partial t = 0$ とすることができ、(6.3.6c) の左辺を 0 とした代数方程式系から、分散関係は

$$\sigma^2 = f^2 + \frac{N^2 k^2}{m^2} \tag{6.3.8}$$

となる。これは (6.3.7) で $N \gg f$、$m \gg k$ とした場合に対応する。

　これらの分散関係は、後出の第 6.4.2 項で見る $N > |\sigma| > f$ の場合に内部波が伝播することと矛盾し

ない。また (6.3.6d) で $kU+mW=0$ であることから波数ベクトル $\boldsymbol{k}=(k,0,m)$ と $\boldsymbol{v}'=(u',v',w')$ は $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}'=0$ の関係を持つ。すなわち速度ベクトルは波数ベクトルと垂直で、慣性重力波においても大気の運動が波面に沿って起こることがわかる。このことは大気の運動が非発散である場合に一般的に成り立つことである。さらに、中緯度で乾燥大気の場合にN〜10^{-2} s^{-1}、f〜10^{-4} s^{-1} のオーダーであることを考慮すると、水平波長が鉛直波長の 100 倍程度より大きいとコリオリの力の影響による運動が卓越し、逆に水平波長が鉛直波長の 100 倍程度より小さいと重力波の性質が卓越することがわかる。

見方を変えると、(6.3.6b) より $V=-iU(f/\sigma)$ であることから、v'とu'は位相が$\pi/2$ずれていて、複素数の実部は

$$u'=U\cos(kx+mz-\sigma t)\,,\;\; v'=U(f/\sigma)\sin(kx+mz-\sigma t) \tag{6.3.9}$$

のように表すことができる。$|\sigma|\gg f$ であれば南北風成分の変動v'は東西風成分と比較してほとんど無視でき、波動は内部重力波的に振る舞う。これに対して慣性重力波では $|\sigma|$ が f に近づくため南北風成分が無視できなくなる。高度による風向変化を考えると、$m>0$ の場合は上へ行くにつれて反時計回り、$m<0$ の場合は上へ行くにつれて時計回りに風向が変化することになる。群速度の鉛直成分はmと逆符号なので、水平風の風向変化はエネルギーの鉛直伝播を示唆するものとなる。

【問題】分散関係の式 (6.3.7) から慣性重力波の群速度を求めよ。

図 6.7 は、$k>0$、$m<0$ の場合の慣性重力波の構造を表す（内部重力波の場合の図 6.4 と比較のこと）。これは、風速の南北成分は東西成分より位相が$\pi/2$進むことを表し、$f>0$ なら風のホドグラフ（風速ベクトルの終点を結んだもの）は時間とともに時計回りの変化をすることを示す。

図 6.8 には観測された風のホドグラフ（ある地点上空の各項度における水平風ベクトルの終点を結んだもの）を示している。図に示されている観測の高度は 30〜55 km で、上部成層圏〜下部中間圏であり、冬は偏西風、夏は偏東風が卓越している。風向が高さとともに時計回りに変化していることから、対流圏で励起された波のエネルギーが上向きに伝播していることがわかる。

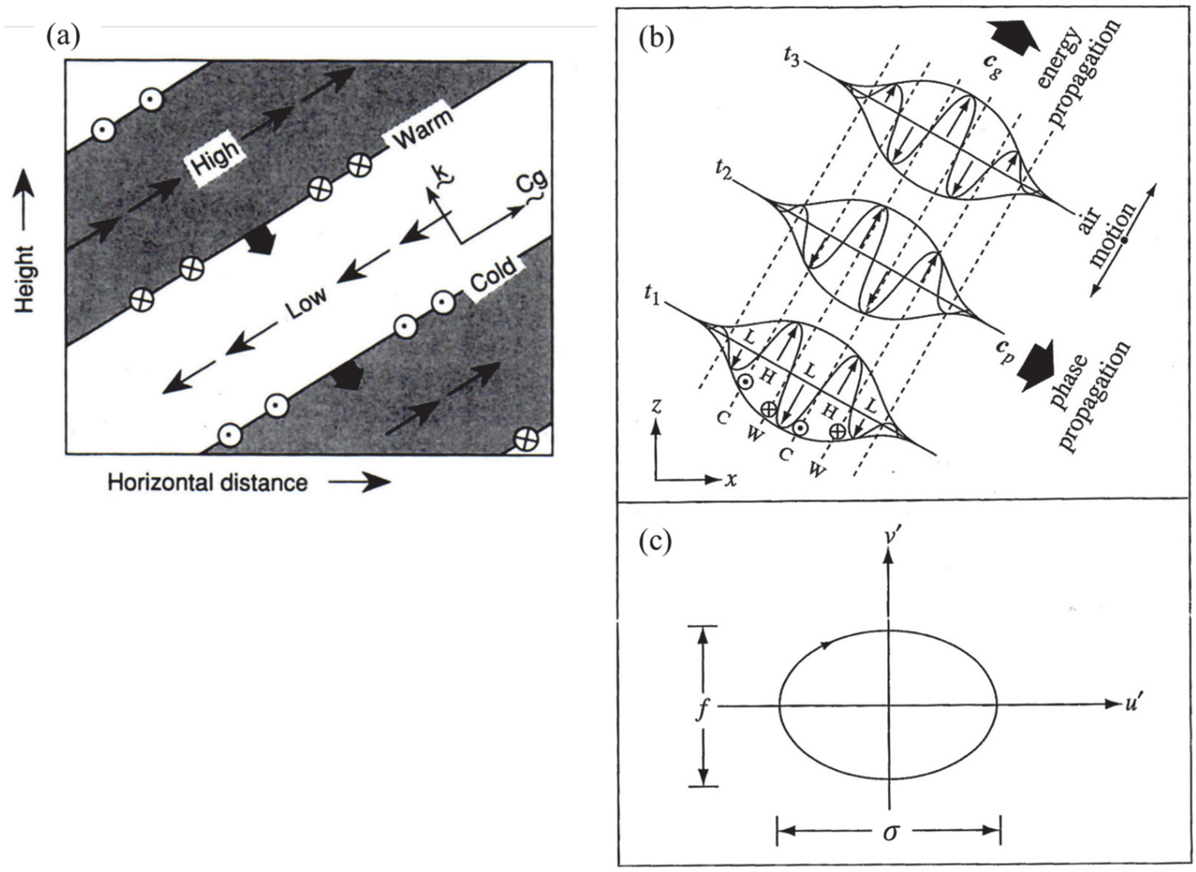


図 6.7 (a) 慣性重力波の気圧・気温・速度の偏差の位相を示す理想的な断面図（図 6.12 (c) と同様、Holton (2004) による）。細い矢印は東西及び鉛直方向の速度場を、図の面に垂直な矢印は南北風成分を、太矢印は位相の伝播方向を示す。陰影は上向き運動の領域を示す。

(b) 慣性重力波の運動を、図 6.4 右と同様の表現で、南北方向の運動もあることを表している。(c) 流体粒子の運動を平面に投影したもの。エネルギーが上方に伝播する慣性重力波において、流体粒子が長軸・短軸比が σ/f である楕円上を時計回りに運動することを表している。（(b)(c) は Lin (2007) を一部改変）

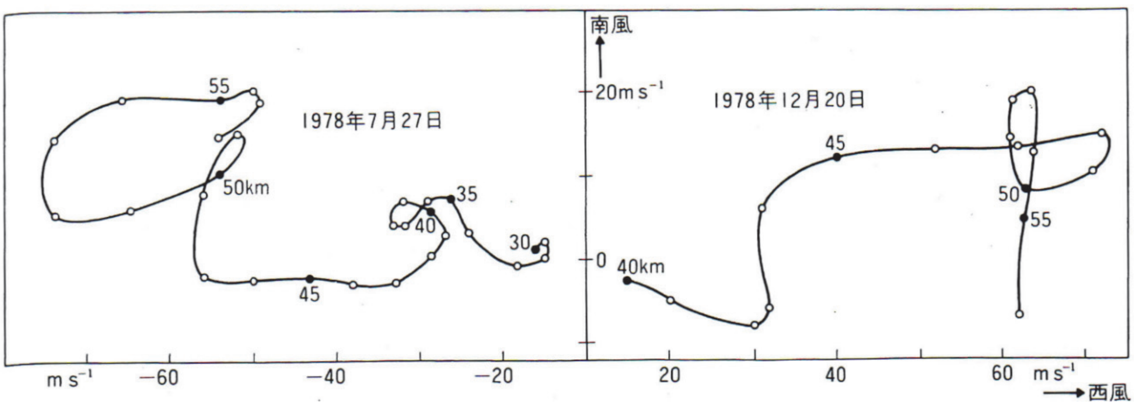


図 6.8　岩手県綾里の旧ロケット観測所で観測された上空の風のホドグラフ。1 km ごとの各高度での風速ベクトルの終点を結んだもの。（松野・島崎 1981）

6.4 大気中の波動の一般化

前節までは、内部重力波または慣性重力波を想定してそれぞれ対応した方程式系で説明した。この節では、それらを含めた波動の一般化について検討する。なお、ここでは対流圏だけでなく、中層大気（成層圏・中間圏）の波動も対象とする。

6.4.1 等温静止大気の方程式系

はじめに、第 1 章で導かれた基礎方程式系を、断熱で摩擦がない場合について書き下すと、運動方程式、連続の式、熱力学方程式、状態方程式は、以下のようになる。

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}+2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\boldsymbol{g} \tag{6.4.1a}$$

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0 \tag{6.4.1b}$$

$$C_p\frac{dT}{dt}-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt}=0 \tag{6.4.1c}$$

$$p=\rho RT \tag{6.4.1d}$$

ここで、$\boldsymbol{v}$は 3 次元の風ベクトルである。また$\boldsymbol{g}$は遠心力の効果を含めた重力加速度で、慣例により鉛直下向きとする。 (6.4.1c,d) からTを消去して次のように書き換えることができる。

$$\frac{dp}{dt}-\gamma\frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt}=0 \tag{6.4.2}$$

ただし、$\gamma=C_p/C_v$ である。すると、方程式系は $\boldsymbol{v}$、p、ρを従属変数とし、(6.4.1a,b) 及び (6.4.2) 式の 3 個の式で閉じることになる。

この方程式系に対して、まず基本場を設定する必要がある。ここでは基本場として**静止大気**を考える。すなわち

$$\bar{\boldsymbol{v}}\equiv(\bar{u},\bar{v},\bar{w})=(0,0,0) \tag{6.4.3}$$

とし、p、ρの基本場をそれぞれ $\bar{p}$、$\bar{\rho}$ として、これらを (6.4.1a,b) と (6.4.2) に代入すると、

$$-\frac{1}{\bar{\rho}}\nabla\bar{p}+\boldsymbol{g}=0,\qquad \text{すなわち}\ \frac{1}{\bar{\rho}}\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial x},\frac{\partial\bar{p}}{\partial y},\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}\right)=(0,0,-g) \tag{6.4.4a}$$

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt}=0,\qquad \text{すなわち}\ \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial t}=0 \tag{6.4.4b}$$

$$\frac{d\bar{p}}{dt}-\gamma\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}}\frac{d\bar{\rho}}{dt}=0,\qquad \text{すなわち}\ \frac{d\bar{p}}{dt}=\frac{\partial\bar{p}}{\partial t}=0 \tag{6.4.4c}$$

が得られる。(6.4.4a) と (6.4.4c) より、$\bar{p}$ が$x,\ y,t$に依存しないzのみの関数であることがわかる。そして (6.4.4a) のz成分から、$\bar{\rho}$ もzのみの関数であることがわかる。さらに、それらと状態方程式 (6.4.1d) から、基本場の気温 $\bar{T}$ もまたzのみの関数である。

ここで、簡単のため $\bar{T}$ は高さによらず一定で $\bar{T}=T_0$ とする。すなわち**等温静止大気**を基本場とす

る。これは基本状態としては、対流圏の一般的な構造と比較すると非現実的に見えるが、ブラント・バイサラ振動数が定数となる（後述）ことなどにより、多様な波動を分離して論じるには便利な仮定である。この場合、(6.4.4a) のz成分と、基本場の状態方程式 $\bar{p} = \bar{\rho} R T_0$ より、

$$\frac{1}{\bar{p}}\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\frac{g}{RT_0}$$

となるので、地表面気圧をp_0として積分すると、

$$\bar{p}(z) = p_0 \exp\left(-\frac{gz}{RT_0}\right) = p_0 \exp\left(-\frac{z}{H_0}\right) \qquad H_0 \equiv \frac{RT_0}{g}：スケールハイト$$

$$\bar{\rho}(z) = \frac{\bar{p}(z)}{RT_0} = \rho_0 \exp\left(-\frac{z}{H_0}\right) \qquad \rho_0 \equiv \frac{p_0}{RT_0}$$

が得られる。

次に、以上の基本場に対する微小擾乱の方程式系を求める。

$$\boldsymbol{v} = \bar{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}', \qquad p = \bar{p} + p', \qquad \rho = \bar{\rho} + \rho'$$

とおき、これらを (6.4.1a,b) と (6.4.2) に代入して微小量の 2 次以上の項を無視して整理すると、最終的には以下の線形化された擾乱の方程式が得られる。

$$\bar{\rho}\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}'}{\partial t} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}'\right) = -\nabla p' - \rho' g \boldsymbol{k} \tag{6.4.5a}$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + w' \frac{d\bar{\rho}}{dz} + \bar{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{v}' = 0 \tag{6.4.5b}$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} - \bar{\rho} g w' - \gamma R T_0 \left(\frac{\partial \rho'}{\partial t} + w' \frac{d\bar{\rho}}{dz}\right) = 0 \tag{6.4.5c}$$

ここでは (6.4.5a) と (6.4.5b) を導出してみよう。まず (6.4.1b) の左辺 $d\rho/dt$ を$\rho = \bar{\rho} + \rho'$で表すと、

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \boldsymbol{v}' \cdot \nabla \bar{\rho} + \boldsymbol{v}' \cdot \nabla \rho'$$

である。今の場合、基本場 $\bar{\rho}$ はzだけの関数であったので、上の式は、

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho'}{\partial t} + w' \frac{d\bar{\rho}}{dz} + \boldsymbol{v}' \cdot \nabla \rho'$$

と書ける。これを (6.4.1b) の左辺第 1 項に代入し、また第 2 項も基本場と擾乱成分で表すと、

$$\left[\frac{\partial \rho'}{\partial t} + w' \frac{d\bar{\rho}}{dz} + \boldsymbol{v}' \cdot \nabla \rho'\right] + \bar{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{v}' + \rho' \nabla \cdot \boldsymbol{v}' = 0$$

が導かれる。ここで微小量の 2 次の項を省略すれば、線形化された連続の式 (6.4.5b) が得られる。

一方、$d\boldsymbol{v}/dt$に関しては、基本場が静止（$\bar{\boldsymbol{v}} = 0$）であったことに注意して、

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = \frac{\partial \boldsymbol{v}'}{\partial t} + (\boldsymbol{v}' \cdot \nabla)\boldsymbol{v}'$$

と表す。すると (6.4.1a) は

$$(\bar{\rho}+\rho')\left[\frac{\partial \boldsymbol{v}'}{\partial t}+(\boldsymbol{v}'\cdot\nabla)\boldsymbol{v}'+2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}'\right]=-\nabla(\bar{p}+p')+(\bar{\rho}+\rho')\boldsymbol{g}$$

と表せる。ここで、基本場が満たす関係 (6.4.4a) に注意し、また微小量の 2 次以上の項を省略すると、(6.4.5a) が得られる。

【問題】(6.4.2) 式を導け。

【問題】(6.4.5c) 式を導け。

【注意】微小擾乱の方程式を導く際には、ラグランジュ微分 d/dt は非線形項を含む非線形演算子なので、必ず展開して、非線形項を陽に計算しなければならない。

6.4.2 等温静止大気における線形波動

この項では、(6.4.5a-c) に基づいて、等温静止大気を基本場とする線形波動を調べる。ただし、以下では現象のスケールは地球の半径と比較すると十分小さいと考え、プリミティブ方程式系と同様に局所的に直交直線座標が使えるものとする。またコリオリパラメータの緯度変化も無視できる（f面近似、fは一定）とする。

a. 擾乱成分の方程式の解

以下では (6.4.5a) において $2\boldsymbol{\Omega}$ を $f\boldsymbol{k}$ で置き換える。運動方程式を水平成分と鉛直成分に分け、また各変数を

$$\boldsymbol{v}'=\exp\left(\frac{z}{2H_0}\right)\tilde{\boldsymbol{v}}=\exp\left(\frac{z}{2H_0}\right)(\tilde{\boldsymbol{V}}+\tilde{w}\boldsymbol{k}),\qquad (\rho',p')=\exp\left(-\frac{z}{2H_0}\right)(\tilde{\rho},\tilde{p}) \tag{6.4.6}$$

を用いて書き換える（$\tilde{\boldsymbol{V}}$は水平成分のみ）。すると、

$$\rho_0\left(\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{V}}}{\partial t}+f\boldsymbol{k}\times\tilde{\boldsymbol{V}}\right)=-\nabla_z\tilde{p} \tag{6.4.7a}$$

$$\rho_0\frac{\partial\tilde{w}}{\partial t}=-\frac{\partial\tilde{p}}{\partial z}+\frac{\tilde{p}}{2H_0}-\tilde{\rho}g \tag{6.4.7b}$$

$$\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial t}+\rho_0\left(\nabla_z\cdot\tilde{\boldsymbol{V}}+\frac{\partial\tilde{w}}{\partial z}-\frac{1}{2H_0}\tilde{w}\right)=0 \tag{6.4.7c}$$

$$\frac{\partial\tilde{p}}{\partial t}-\gamma RT_0\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial t}+\rho_0\left(\frac{\gamma RT_0}{H_0}-g\right)\tilde{w}=0 \tag{6.4.7d}$$

となり、微分方程式の係数が定数になる。

【問題】(6.4.7a-d) を導出せよ。

これらの方程式を成分ごとにまとめなおすと、以下のようになる。

$$\rho_0\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}-f\tilde{v}\right)=-\frac{\partial\tilde{p}}{\partial x} \tag{6.4.8a}$$

$$\rho_0\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial t}+f\tilde{u}\right)=-\frac{\partial\tilde{p}}{\partial y} \tag{6.4.8b}$$

$$\rho_0\frac{\partial\tilde{w}}{\partial t}=-\left(\frac{\partial\tilde{p}}{\partial z}-\frac{\tilde{p}}{2H_0}\right)-\tilde{\rho}g \tag{6.4.8c}$$

$$\frac{\partial\tilde{p}}{\partial t}-c_s^2\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial t}+\rho_0\left(\frac{c_s^2}{H_0}-g\right)\tilde{w}=0 \tag{6.4.8d}$$

$$\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial t}+\rho_0\left\{\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}+\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}+\left(\frac{\partial\tilde{w}}{\partial z}-\frac{\tilde{w}}{2H_0}\right)\right\}=0 \tag{6.4.8e}$$

ただし、$c_s^2=\gamma RT_0$（音速）である。この方程式系は定数係数の線型方程式系なので、調和関数（三角関数）型の解、言い換えると単色平面波解が存在する。方程式の解はxとyに対して対等で、x-y平面内の任意の回転座標変換に対してその形を変えないので、平面波の進行方向にx軸を取れば、平面波に伴う場はy方向に一様（y方向の波数が 0）になる。従って、一般性を失うことなく、解の形を

$$\begin{pmatrix}\tilde{u}\\ \tilde{v}\\ \tilde{w}\\ \tilde{p}/\rho_0\\ \tilde{\rho}/\rho_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}U\\ V\\ W\\ P\\ Q\end{pmatrix}\exp\{i(kx+mz-\sigma t)\} \tag{6.4.9}$$

と、y方向の運動を考えない形におくことができる。これはx-z平面を伝播するy平面波を表す。そしてここではσとkは実数とする。(6.4.9) を (6.4.8a-e) に代入すると、U、V、W、P、Qに関する代数方程式

$$\left.\begin{array}{c}-i\sigma U-fV=-ikP\\ -i\sigma V+fU=0\\ -i\sigma W=-\left(im-\dfrac{1}{2H_0}\right)P-gQ\\ -i\sigma P+i\sigma c_s^2Q+\left(\dfrac{c_s^2}{H_0}-g\right)W=0\\ -i\sigma Q+ikU+\left(im-\dfrac{1}{2H_0}\right)W=0\end{array}\right\} \tag{6.4.10}$$

が得られる。これが $U=V=W=P=Q=0$ 以外の解（非自明解）を持つためには、係数行列式が 0 でなければならない。すなわち、

$$\begin{vmatrix}-i\sigma & -f & 0 & ik & 0\\ f & -i\sigma & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -i\sigma & \left(im-\dfrac{1}{2H_0}\right) & g\\ 0 & 0 & (\gamma-1)g & -i\sigma & i\sigma c_s^2\\ ik & 0 & \left(im-\dfrac{1}{2H_0}\right) & 0 & -i\sigma\end{vmatrix}=0 \tag{6.4.11}$$

である。行列式を具体的に計算すると、

$$i\sigma\left[\{c_s^2\sigma^2-(\gamma-1)g^2\}k^2+(f^2-\sigma^2)\left\{\sigma^2-c_s^2m^2-\frac{c_s^2}{4H_0^2}\right\}\right]=0$$

これを次のように書き換えておく。

$$\sigma[c_s^2(\sigma^2 - N^2)k^2 + (f^2 - \sigma^2)(\sigma^2 - c_s^2 m^2 - \sigma_a^2)] = 0 \tag{6.4.12}$$

ただし、

$$N^2 \equiv \frac{(\gamma - 1)g^2}{c_s^2}, \quad \sigma_a^2 \equiv \frac{c_s^2}{4H_0^2} \tag{6.4.13}$$

としている。このNは等温大気のブラント・バイサラ振動数で、定数である（下の【問題】を参照）。

(6.4.12) 式はσに関する 5 次方程式である。よって、5 個のモードの解（定常解 1 個と波動解 4 個）が存在する。以下ではそれらを個別に述べる。

【問題】方程式系 (6.4.10) を導け。

【問題】ブラント・バイサラ振動数の定義 $N^2 = g\,\partial \ln\theta/\partial z$ を用いて、(6.4.13) 式に示した等温大気の場合のブラント・バイサラ振動数を導け。

【問題】 2 原子分子理想気体の定積比熱と定圧比熱がそれぞれ $C_v = (5/2)R$、$C_p = C_v + R = (7/2)R$ と表されることを用いて、等温大気の場合に $N^2 = (2/7)(g/H_0)$、$\sigma_a^2 = (7/20)(g/H_0)$ であることを示せ。

b. 定常な地衡風運動を表す解

(6.4.12) 式の解のひとつは $\sigma = 0$（定常運動）に関するもので、このとき解は、(6.4.10) より

$$fV = ikP,\ U = 0,\ W = 0,\ \left(\frac{1}{2H_0} - im\right)P = gQ$$

を満足する。この関係式を、方程式系 (6.4.8a-e) を経てさらに変数 u'、v'、w'、p'、ρ' に戻ると、

$$-fv' = -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial p'}{\partial x}, \quad u' = 0, \quad w' = 0, \quad \frac{\partial p'}{\partial z} = -g\rho' \tag{6.4.14}$$

である。このうち最初のものは地衡風の関係、最後のものは静力学平衡を表している。従ってこれは、微小擾乱成分が静力学平衡にありまた地衡風バランスした定常状態にあることを表す。

c. 波動解

(6.4.12) 式の $\sigma = 0$ 以外の解は、分散関係

$$c_s^2(f^2 - \sigma^2)m^2 + c_s^2(N^2 - \sigma^2)k^2 = (f^2 - \sigma^2)(\sigma^2 - \sigma_a^2) \tag{6.4.15}$$

またはこれを変形した

$$m^2 + \frac{\sigma^2 - N^2}{\sigma^2 - f^2}k^2 = \frac{\sigma^2 - \sigma_a^2}{c_s^2} \tag{6.4.16}$$

を満たす。これをσ^2の 2 次方程式と見ると、σ^2に関して 2 個の根が存在し、そのそれぞれに対して符号の異なる 2 個のσ（すなわち伝播方向の異なる 2 個の解）が決まる。解の全体像を把握するために、まず中緯度で $T_0 =$ 250 K での σ_a、N、f の値を見積もっておく。$T_0 =$ 250 K の等温大気のスケールハイトは、$H_0 = RT_0/g$〜7.3 km、また $\sigma_a^2 = (7/20)(g/H_0)$ である（前掲の【問題】も参照）ことから、

σ_a〜0.0216 s^{-1}（周期 290 秒）

N〜0.0196 s^{-1}（周期 321 秒）

f 〜10^{-4} s^{-1}（周期 17 時間）　　すなわち、

$$f^2 \ll N^2 < \sigma_a^2$$

であることがわかる。よって、解は以下の 4 つの場合に分けて考えることができる。

（1）$|\sigma| > \sigma_a$ （周期 290 秒以下）のとき

$$\frac{\sigma^2 - N^2}{\sigma^2 - f^2} > 0, \qquad \frac{\sigma^2 - \sigma_a^2}{c_s^2} > 0$$

であるから、σを固定した場合の (6.4.16) 式を満足するk、mの組み合わせはk-m平面（波数空間）上の楕円として表される（図 6.9a の各σに対応する楕円)。この場合、(6.4.9) 式はx-z平面を伝播する波動解を表す。このような鉛直方向にも伝播する波を**内部波**という。

（2）$\sigma_a > |\sigma| > N$ （周期 290 秒以上 321 秒以下）のとき

$$\frac{\sigma^2 - N^2}{\sigma^2 - f^2} > 0, \qquad \frac{\sigma^2 - \sigma_a^2}{c_s^2} < 0$$

であるから $m^2 < 0$ となり、 (6.4.16) 式を満足するmは虚数となる。これを (6.4.9) 式に戻って考えれば、解は鉛直方向には波動ではなく指数関数の形をとり、高度とともに減衰する。つまりこの場合の波動は鉛直方向には伝播しない。このような波を**外部波**という。

（3）$N > |\sigma| > f$ （周期 321 秒以上 17 時間以下）のとき

$$\frac{\sigma^2 - N^2}{\sigma^2 - f^2} < 0, \qquad \frac{\sigma^2 - \sigma_a^2}{c_s^2} < 0$$

であるから、σを固定した場合の (6.4.16) 式を満足するk、mの組み合わせはk-m平面（波数空間）上の双曲線として表される（図 6.9a の双曲線）。この場合、(6.4.9) 式はx-z平面を伝播する波動解を表す。これは鉛直方向にも伝播する内部波である。

（4）$f > |\sigma| > 0$ （17 時間以上）のとき

$$\frac{\sigma^2 - N^2}{\sigma^2 - f^2} > 0, \qquad \frac{\sigma^2 - \sigma_a^2}{c_s^2} < 0$$

であるから（2）と同様に$m^2 < 0$ となり、(6.4.16) 式を満足するmは虚数となり、(6.4.9) 式が表すのは鉛直伝播しない外部波である。

（1）と（3）の場合について (6.4.15) 式をσ^2について解くと、

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}\{c_s^2(k^2+m^2)+f^2+\sigma_a^2\}\left[1 \pm \sqrt{1-\frac{4\{c_s^2(N^2k^2+f^2m^2)+f^2\sigma_a^2\}}{\{c_s^2(k^2+m^2)+f^2+\sigma_a^2\}^2}}\right] \tag{6.4.17}$$

を得る。この解のうち、根号の前の符号が＋の根は高周波で、音波（ただし重力等により変形された）に対応する。根号の前の符号が－の根は低周波で、内部重力波や慣性重力波（ただし音波の性質を若干持つ）に対応する。

図 6.10、図 6.11 では、上で述べたような波動の分類で、横軸に水平波数 k、縦軸に振動数σをとっている。両者は基本的に同じだが、図 6.11 は軸が両対数となっている。$m^2 > 0$ （図 6.10 では$n^2 > 0$で斜線無し）の領域は内部波領域で、鉛直伝播できる波動が存在できる。$m^2 < 0$ （図 6.10 では$n^2 < 0$で斜線）の領域の波動は鉛直伝播できない外部波である。具体的には、以下のようになる。

・図 6.10、図 6.11 の上部（音波と記載されている）：上記（1）の高周波（$\sigma > \sigma_a$）の内部波

・その下の領域（図 6.10 では斜線領域）：(2）の外部波領域

・図 6.10 の下部、及び、図 6.11 の右側中ほどの領域（内部重力波・慣性重力波と記載されている）：（3）の低周波（$N > |\sigma| > f$）の内部波

・図 6.11 で$\sigma < f$～10^{-4} s^{-1} 以下の領域：(4）の外部波領域

・図 6.11 の左下の領域（内部ロスビー波）：次章参照

・$\sigma^2 = c_s^2k^2 + f^2$ の線上：ラム波（Lamb wave；地表面に沿って伝播する音波の一種と見なせるもので、ここでは詳細は省略する）

この章の前半では、重力の影響を受けない純粋な音波と、地球自転の影響を受けない純粋な内部重力波、及び地球自転の影響を受ける慣性重力波を、個別に見てきた。それに対して、この節の議論からは、音波で振動数の小さいもの（周期の長いもの）は重力の影響を受け、また内部重力波で振動数が小さいもの（周期が長いもの）は地球自転の影響を受けることが示唆される。各種の波動の模式図を図 6.12 に示しておく。

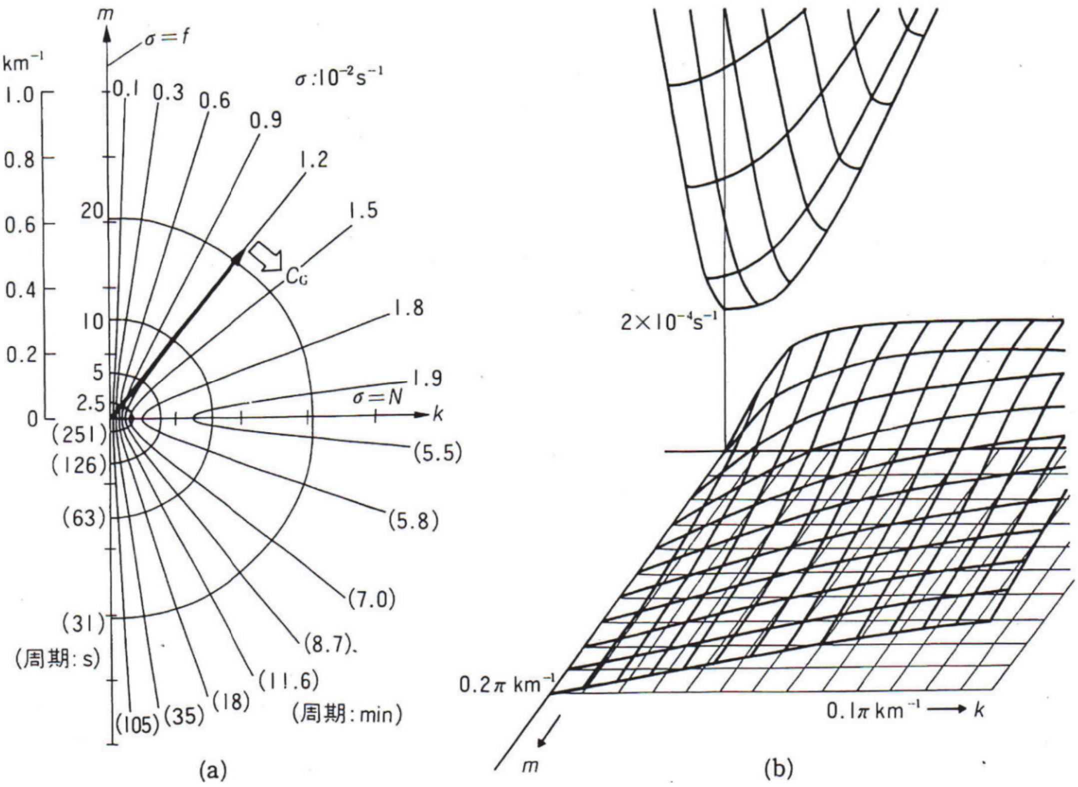


図 6.9　(a) 波数空間（k-m空間）で見た等温静止大気中の波動の振動数σの等値線。横軸と縦軸はそれぞれ km^{-1} 単位で表した水平波数k、鉛直波数mであり、各等値線の端の数値は振動数（10^{-2} s^{-1} 単位）と周期（括弧内の数字は楕円に関しては秒単位、双曲線に関しては分単位）である。例えばσ =20 の楕円は振動数 20×10^{-2} s^{-1}＝0.2 s^{-1}、周期$T=2\pi/\sigma=31.4$ s の等値線を表し、σ =0.1 の双曲線は振動数σ =10^{-3} s^{-1}、周期 105 分の等値線を表す。本文中に述べたように、振動数の大きい波（音波）に対する等値線は楕円に、振動数の小さい波（内部重力波）に対する等値線は双曲線になる。図に示されている矢印は内部重力波の場合の波数ベクトル（黒矢印。波の位相の進行方向）と群速度（白矢印。エネルギーの伝播方向）である。

(b) 同じ関係をσを鉛直座標として（k,m）平面上の曲面の形に描いたもの。上の面が音波、下の面が内部重力波。（松野・島崎 1981）

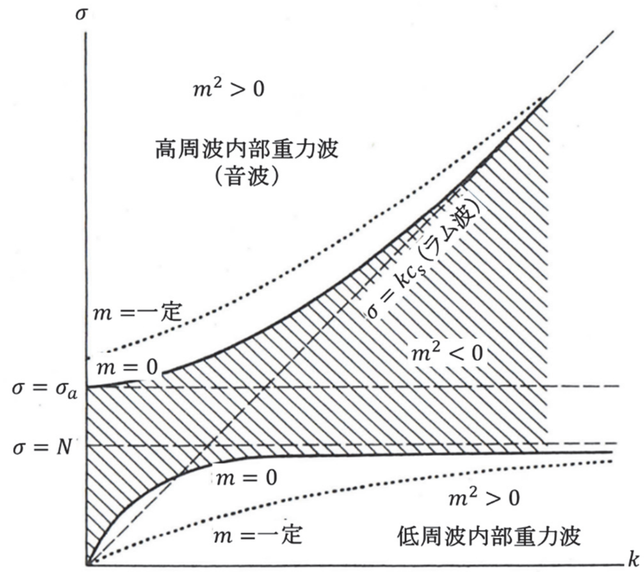


図 6.10　水平波数kと振動数σの関係として各種大気波動の存在領域を示す図。（小倉(1978) を改変）

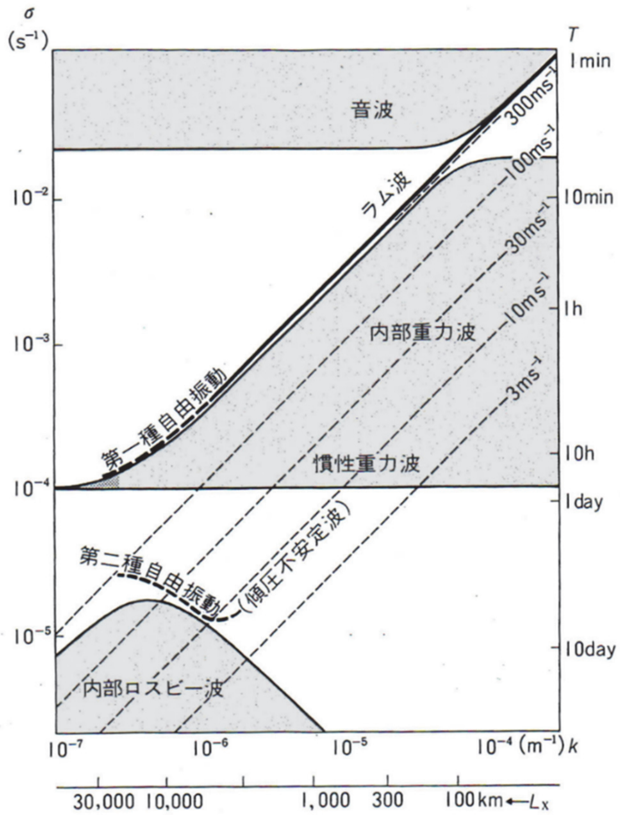


図 6.11　水平波数kと振動数σの関係として各種大気波動の存在領域を示す図（図 6.10 と同様だが横軸・縦軸を対数としている）。斜めの破線は水平位相速度の等値線。(k, σ）の組み合わせにより、鉛直方向にも波として伝わりうる運動が存在する場合には、陰影をつけてある（内部波領域）。白抜きの部分は 3 次元的な波動は存在しない（外部波領域）。（松野・島崎 1981）

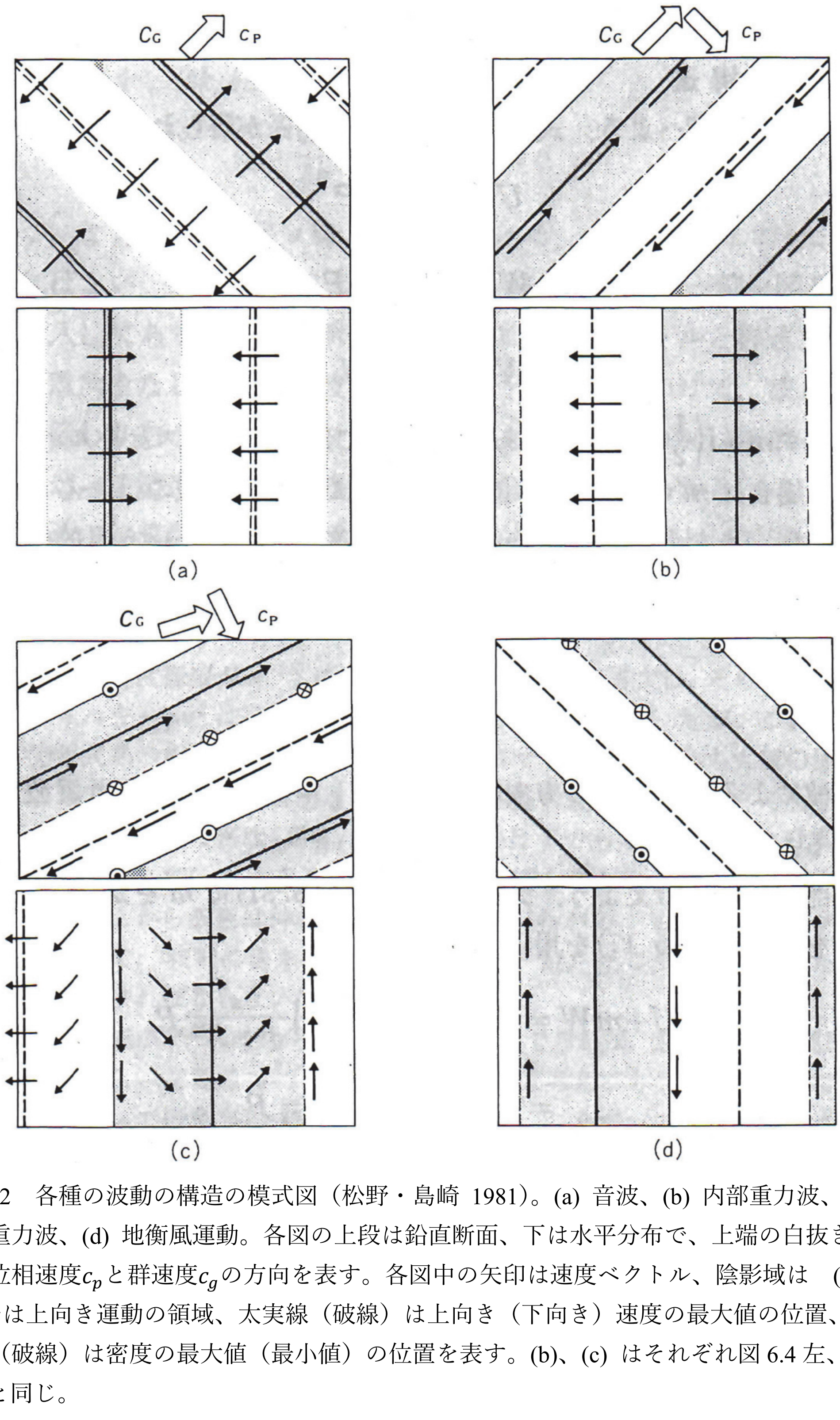


図 6.12　各種の波動の構造の模式図（松野・島崎 1981）。(a) 音波、(b) 内部重力波、(c) 慣性重力波、(d) 地衡風運動。各図の上段は鉛直断面、下は水平分布で、上端の白抜き矢印は位相速度c_pと群速度c_gの方向を表す。各図中の矢印は速度ベクトル、陰影域は (a)～(c) では上向き運動の領域、太実線（破線）は上向き（下向き）速度の最大値の位置、細実線（破線）は密度の最大値（最小値）の位置を表す。(b)、(c) はそれぞれ図 6.4 左、図 6.7a と同じ。

第 6 章の参考文献

Lin, Y.-L., 2007: Mesoscale Dynamics. Cambridge Univ. Press, 630pp.

松野太郎、島崎達夫、1981: 成層圏と中間圏の大気 (大気科学講座 3)。東京大学出版会、279pp。

小倉義光、1997：メソ気象の基礎理論。東京大学出版会、215pp。

付録 6A 音波の除去

音波は、気象学で興味の対象となることは少なく、むしろ、気象解析や数値予報では解析に用いる方程式系や予報方程式系の解に音波が含まれると様々な困難が生じる。例えば、数値予報モデルで最も単純な時間積分法である 1 次の陽解法を用いる場合、ΔxとΔtがそれぞれ数値モデルの空間と時間の格子間隔、cが流れの速さや波動の伝播速度のうちの最大値であるときに、

$$\nu = c\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)$$

で定義されるクーラン数（Courant number）νが $|\nu| \leqq 1$ の条件を満たす場合に安定に時間積分できることが知られている（Courant-Friedrichs-Lewy（CFL）条件。例えば藤井 1994; Durran 2010）。もしこのような予報方程式が位相速度約 340 m s^{-1} の音波を含むと、例えば格子間隔 2 km の数値モデルでは時間積分のタイムステップを 6 秒以下にする必要があり、気象学的にはあまり意味のない音波のために多大な計算機資源を要してしまう。

そこで、さまざまな工夫が行われているが、手法の一つとして、方程式系を変形して音波が解とならないような方程式系とすることが考えられる。その際、当然のことながら、方程式系の変形によって音波以外の波動成分（内部重力波・慣性重力波）が損なわれないようにする必要がある。

今後の検討のため、等温大気における擾乱成分の方程式系 (6.4.8) に、スイッチδ_1、δ_2を付けておく。これらを 0 または 1 の値とすることで、δ_1は静力学平衡の有無、δ_2は圧縮性の有無を表す。第 6.4 節で扱ったのは、$\delta_1 = \delta_2 = 1$ の場合である。

$$\rho_0\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - f\tilde{v}\right) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \tag{6A.1a}$$

$$\rho_0\left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + f\tilde{u}\right) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} \tag{6A.1b}$$

$$\delta_1 \rho_0 \frac{\partial \widetilde{w}}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} - \frac{\tilde{p}}{2H_0}\right) - \tilde{\rho} g \tag{6A.1c}$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} - c_s^2 \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0\left(\frac{c_s^2}{H_0} - g\right)\widetilde{w} = 0 \tag{6A.1d}$$

$$\delta_2 \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0\left\{\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \left(\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial z} - \frac{\widetilde{w}}{2H_0}\right)\right\} = 0 \tag{6A.1e}$$

ここで、(6.4.12) 式を求めた際と同様にx-z平面を伝播するy平面波を仮定すると、分散関係式は以下のようになり、(6.4.12) と同様にσの 5 次式である。表現される波動はδ_1、δ_2の与え方により変化する。

$$
\begin{aligned}
\sigma\Bigg[& c_s^2(\sigma^2\delta_1 - N^2)k^2 \\
& + (f^2-\sigma^2)\Bigg\{\sigma^2\delta_1\delta_2 - c_s^2 m^2 + \frac{\gamma(1-2\delta_2)+2(\delta_2-1)}{\gamma}\sigma_a^2 \\
& + img(\gamma-1)(\delta_2-1)\Bigg\}\Bigg] = 0
\end{aligned}
\tag{6A.2}
$$

6A.1 静力学平衡近似

第 6.4.1 項で示したのと同様に等温静止大気を基本場として、簡単のため重力の影響は無視できる（$g=0$）とすると、基本場の方程式系より$\bar{p}$と$\bar{\rho}$は高さによらず一定となる。この基本場に対する微小擾乱の方程式系 (6.4.5a-c) において、擾乱は水平方向に一様と仮定すると、

$$\bar{\rho}\frac{\partial w'}{\partial t} = -\frac{dp'}{dz}$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \bar{\rho}\frac{dw'}{dz} = 0$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} - c_s^2\frac{\partial \rho'}{\partial t} = 0$$

となり、

$$\frac{\partial^2 w'}{\partial t^2} = c_s^2\frac{\partial^2 w'}{\partial z^2}$$

が得られる。これはz方向にc_sの速度で伝播する音波を表す。ここでは、$\partial\rho'/\partial t = 0$ としない（すなわち大気の圧縮性は残す）でかつ $\partial w'/\partial t = dp'/dz = 0$（静力学平衡）とすると、方程式の解から$z$方向に伝播する音波が除去されることがわかる。

次に、水平方向の運動も考慮しよう。(6.4.8a-e) において $\partial\tilde{w}/\partial t = 0$ とすることは、(6A.1a-e) において $\delta_1 = 0$、$\delta_2 = 1$ とすることに相当する。この場合、x-z平面を伝播する波動の分散関係 (6A.2) は

$$\sigma[c_s^2N^2k^2 + (f^2-\sigma^2)(c_s^2m^2+\sigma_a^2)] = 0 \tag{6A.3}$$

となる。これは根の数が 5 個から 3 個に減っていることから、一部の波動成分が除去されている（フィルターされている）ことがわかる。(6A.3) をσについて解くと、静力学平衡近似をした場合の振動数として、$\sigma = 0$ 以外に

$$\sigma^2 = \frac{N^2k^2 + f^2(m^2+\sigma_a^2/c_s^2)}{m^2+\sigma_a^2/c_s^2} \tag{6A.4}$$

が得られる。

ここで、静力学平衡近似しない内部重力波の分散関係は (6.4.17) で負号の場合で、以下の形である。

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}\{c_s^2(k^2+m^2)+f^2+\sigma_a^2\}\left[1-\sqrt{1-\frac{4\{c_s^2(N^2k^2+f^2m^2)+f^2\sigma_a^2\}}{\{c_s^2(k^2+m^2)+f^2+\sigma_a^2\}^2}}\right] \tag{6A.5}$$

波数ベクトルの大きさ$\sqrt{k^2+m^2}$ が十分に大きく $f^2 \ll N^2 < \sigma_a^2 \ll c_s^2(k^2+m^2)$ の場合に、 (6A.5) の

根号内を近似すると、

$$\begin{aligned}\sigma^2 &\approx \frac{1}{2}\{c_s^2(k^2+m^2)+f^2+\sigma_a^2\}\left[1-\left\{1-\frac{2\{c_s^2(N^2k^2+f^2m^2)+f^2\sigma_a^2\}}{\{c_s^2(k^2+m^2)+f^2+\sigma_a^2\}^2}\right\}\right] \\ &= \frac{N^2k^2+f^2(m^2+\sigma_a^2/c_s^2)}{k^2+m^2+(\sigma_a^2+f^2)/c_s^2}\end{aligned} \tag{6A.6}$$

が得られ、$k^2 \ll m^2$ であれば (6A.4) は (6A.6) の良い近似となっていることがわかる。つまり、(6A.4) が内部重力波（ただしfが入っており慣性重力波の性質も持つ）の分散関係に近づき、静力学平衡近似することによって音波が除去されていることがわかる。

すなわち、運動の水平スケールが鉛直スケールより十分に大きい現象に対しては、音波の除去に静力学平衡近似を使うことができる。第 2 章のプリミティブ方程式系ではこれが適用されている。

6A.2 非弾性近似

積雲対流のような現象では、水平スケールが鉛直スケールと同程度になるので、音波を除去するために前項の静力学平衡近似を使うことができない。そこで連続の式において $\partial\rho'/\partial t = 0$ とする非弾性近似が用いられることがある。

(6.4.8a-e) において $\partial\tilde{\rho}/\partial t = 0$ とすることは、(6A.1a-e) において $\delta_1 = 1$、$\delta_2 = 0$ とすることに相当する。この場合、分散関係 (6A.2) は

$$\sigma\left[c_s^2(\sigma^2-N^2)k^2+(f^2-\sigma^2)\left\{-c_s^2m^2+\frac{\gamma-2}{\gamma}\sigma_a^2-img(\gamma-1)\right\}\right]=0 \tag{6A.7}$$

となる。これは根の数が 3 個に減っていることから、ここでも一部の波動成分が除去されていることがわかる。(6A.7) をσについて解くと、非弾性近似をした場合の振動数として、$\sigma = 0$ 以外に

$$\sigma^2 = \frac{N^2k^2+f^2\left[m^2+i\dfrac{(\gamma-1)g}{c_s^2}m-\dfrac{\gamma-2}{\gamma}\dfrac{\sigma_a^2}{c_s^2}\right]}{k^2+\left[m^2+i\dfrac{(\gamma-1)g}{c_s^2}m-\dfrac{\gamma-2}{\gamma}\dfrac{\sigma_a^2}{c_s^2}\right]} \tag{6A.8}$$

が得られ、ここでさらに

$$m' \equiv m+i\frac{(\gamma-1)g}{2c_s^2} = m+i\frac{\gamma-1}{2\gamma H_0}$$

とおけば、非弾性近似の場合の分散関係として

$$\sigma^2 = \frac{N^2k^2+f^2\left(m'^2+\dfrac{g^2}{4c_s^4}\right)}{k^2+m'^2+\dfrac{g^2}{4c_s^4}} \tag{6A.9}$$

が得られる。ここで、

$$k^2 \cong m^2 \gg \frac{g^2}{c_s^4} = \frac{1}{\gamma^2H_0^2} \tag{6A.10}$$

が成り立てば、$N \gg f$ であることも使って (6A.9) はさらに簡単化できて

$$\sigma^2 \cong \frac{N^2k^2}{k^2+m^2} \tag{6A.11}$$

となる。これは第 6.2 節で見た純粋な内部重力波の分散関係式であるから、非弾性近似によって音波が除去されたことが示される。この近似が成立するための条件 (6A.10) を鉛直波長 λ_z を使って書き換えると、

$$\lambda_z \ll 2\pi\gamma H_0 \tag{6A.12}$$

となる。$T_0 =$ 250 K のときのスケールハイトが H_0～7.3 km であったから、対流の鉛直波長を 10 km としても上の条件を満たしている。よって、積雲対流のような、水平スケールが鉛直スケールと同程度（水平スケール≲10 km）の現象に対して音波を除去するために非弾性近似を使用することができる。

付録 6A の参考文献

Durran, D. R., 2010: Numerical Methods for Fluid Dynamics: With Applications to Geophysics. Springer, 532pp.

藤井孝蔵、1994：流体力学の数値計算法。東京大学出版会、234pp。

付録 6B　雲による大気波動の可視化

雲により大気中の山岳波が可視化されている例として図 6B.1 を示す。

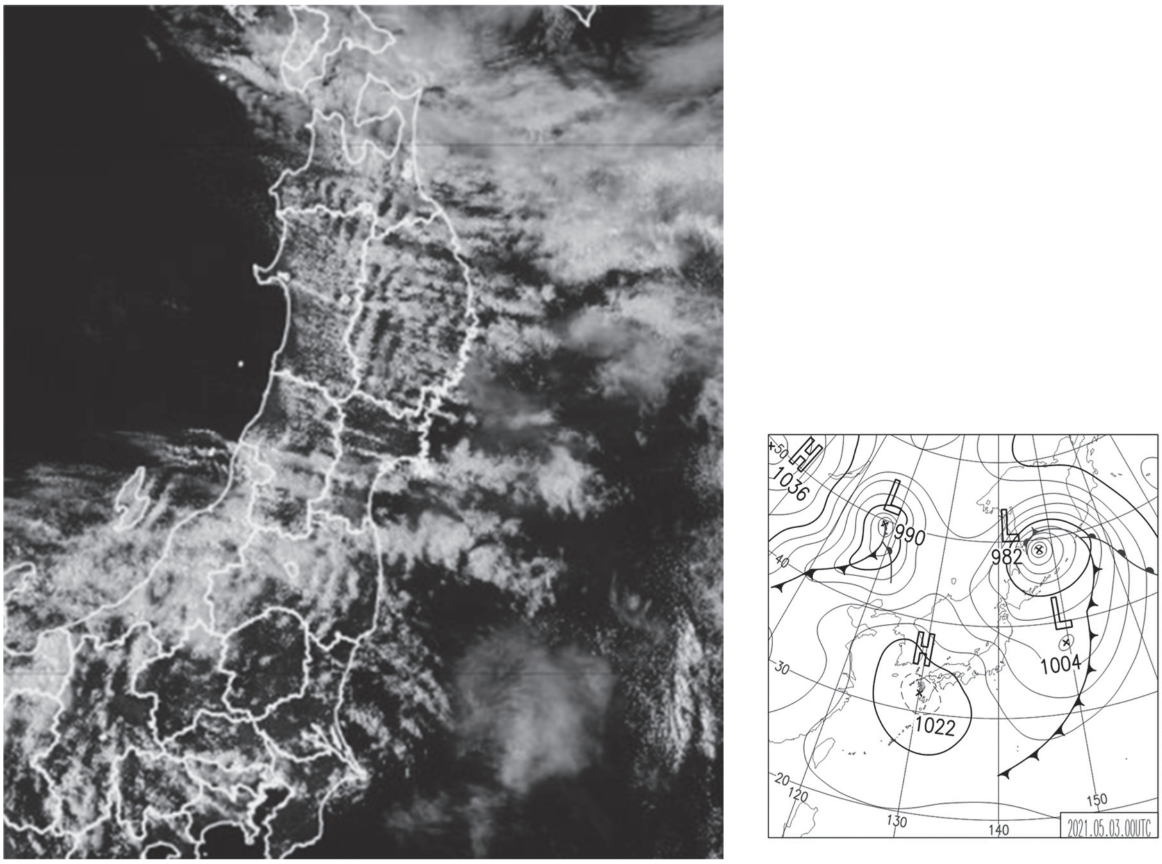


図 6B.1　（左）2021 年 5 月 3 日 13:30(JST) ひまわり 8 号可視画像。強い西風に伴い山岳波の雲が生じている。（右）同日 09JST の地上天気図。

第 7 章　大気波動論2：地球自転の影響を大きく受ける波動

前章では、大気中の波動のうち、主に内部重力波を扱った。これは重力を復元力とし、大気中を水平方向・鉛直方向に進むもので、比較的スケールが小さいため、地球自転の影響（コリオリ力）による変形は小さかった。ただし、波長が大きく、振動数が小さく（周期が長く）なってくると、コリオリ力の影響が生じることも示唆された。

本章では、大気中の波動のうち、比較的スケールが大きく、地球自転の影響が無視できない現象を扱う。スケールが大きくなると、天気変化にも影響が生じるので、天気予報の観点でも重要である。地球の大気は地球全体から見るとごく薄い流体であるので、スケールの大きい波動を調べる際に浅水方程式系がしばしば用いられる。そこでは大気は自由表面を持つ等密度の流体として扱われる。浅水方程式系に関しては、第 2 章で水面の波（表面重力波）を扱った。そこにコリオリ力の効果が加わったものとして、重力とコリオリ力を復元力とする慣性重力波が現れる。さらに側面境界（壁）や $f=0$ である赤道の付近では、壁や赤道に沿って一定の方向にのみ進むケルビン波に姿を変える。一方、コリオリパラメータfの緯度依存性（β効果）を考慮すると、ロスビー波が現れる。天気予報に関係して着目される上空の気圧のトラフ・リッジや、いわゆるテレコネクションは、しばしばロスビー波と関連付けて説明される。ただし、浅水方程式系では波動の鉛直伝播を表現できず、表現できるのは外部波である。本章の最後に、内部波としてのロスビー波を扱う。

7.1　慣性重力波（2）

慣性重力波については第 6 章で摂動法とブシネスク近似の方程式系により論じた。そこでは水平スケールが数百 km 以上、時間スケールが数時間以上で、内部重力波がコリオリ力の影響により変形された波動として示した。ここで、水平スケールが数百 km であるということは、水平スケールが鉛直スケールよりもはるかに大きいことを意味する。現実の慣性重力波が鉛直に伝播することは第 6 章でも述べたように重要な性質であるが、ここでは次節以降のケルビン波やロスビー波への準備も兼ねて、浅水方程式系で鉛直伝播を想定しない慣性重力波の性質を調べる。

7.1.1　浅水方程式系における慣性重力波

まず、第 2 章の浅水方程式系は

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}-fv=-g\frac{\partial h}{\partial x} \tag{7.1.1a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+fu=-g\frac{\partial h}{\partial y} \tag{7.1.1b}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\{(h-h_B)u\}+\frac{\partial}{\partial y}\{(h-h_B)v\}=0 \tag{7.1.1c}$$

であった。ただし、(u,v) は東西風及び南北風、hは自由表面の高さ、h_Bは底面地形の高さである。

ここで基本場として、時間に依存せず、かつ一様な東西風$\bar{u}$を持つ場を考える。(7.1.1a-c) に$u=\bar{u}$

（一定）、$v=\bar{v}=0$、$h=\bar{h}$ を代入すれば、

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial \bar{h}}{\partial y}=-\frac{f}{g}\bar{u}, \qquad \frac{\partial h_B}{\partial x}=0 \tag{7.1.2}$$

が得られる。このうち 2 番目の式は地衡風平衡を表している。これらに注意して、$u=\bar{u}+u'$、$v=\bar{v}+v'$、$h=\bar{h}+h'$ を方程式系 (7.1.1a-c) に代入して、線形化された微小擾乱に対する方程式

$$\frac{\partial u'}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial u'}{\partial x}-fv'=-g\frac{\partial h'}{\partial x} \tag{7.1.3a}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial v'}{\partial x}+fu'=-g\frac{\partial h'}{\partial y} \tag{7.1.3b}$$

$$\frac{\partial h'}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial h'}{\partial x}+v'\frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{h}-h_B\right)+\left(\bar{h}-h_B\right)\left(\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}\right)=0 \tag{7.1.3c}$$

が得られる。

【問題】 (7.1.3a-c) を導け。

ここで、$f=f_0$（f平面近似）、$\bar{u}=0$、底面地形がない（$h_B=0$）とする。このとき$\bar{h}$は一定になり、それをHとおくと、(7.1.3a-c) は以下のように書ける。

$$\frac{\partial u'}{\partial t}-f_0v'=-g\frac{\partial h'}{\partial x} \tag{7.1.4a}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t}+f_0u'=-g\frac{\partial h'}{\partial y} \tag{7.1.4b}$$

$$\frac{\partial h'}{\partial t}+H\left(\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}\right)=0 \tag{7.1.4c}$$

これらから、まずh'のみの式としたい。(7.1.4a,b) をtで偏微分し、さらに再度　(7.1.4a,b)を使って、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f_0^2\right)u'=-g\frac{\partial^2 h'}{\partial t\partial x}-f_0g\frac{\partial h'}{\partial y} \tag{7.1.5a}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f_0^2\right)v'=-g\frac{\partial^2 h'}{\partial t\partial y}+f_0g\frac{\partial h'}{\partial x} \tag{7.1.5b}$$

が得られ、さらにこれらと (7.1.4c) から、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f_0^2\right)\frac{\partial h'}{\partial t}-gH\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\frac{\partial h'}{\partial t}=0 \tag{7.1.6}$$

が得られる。ここで、単色平面波解

$$h'=\hat{h}\exp\{i(kx+ly-\sigma t)\} \tag{7.1.7}$$

を仮定して（7.1.6）に代入すると、分散関係

$$\sigma[-\sigma^2+f_0^2+gH(k^2+l^2)]=0 \tag{7.1.8}$$

となる。これはσに関する 3 次方程式で、3 つの根を持つ。

（1）$\sigma = 0$：定常な地衡風

この場合は、$u',\ v',\ h'$ はtに依存せず、(7.1.4a-c) は、

$$-f_0 v' = -g\frac{\partial h'}{\partial x}, \qquad f_0 u' = -g\frac{\partial h'}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0$$

となる。このうちはじめの 2 つは地衡風の関係式と同等であり、最後の式は水平非発散性を表す。したがって、流れは h' の等値線に沿った非発散性のもので、時間変化もしない。すなわちこの解は定常な地衡風運動に対応する。

（2）$\sigma \neq 0$：慣性重力波

この場合の分散関係式と位相速度 c_pは、

$$\sigma^2 = f_0^2 + gH(k^2 + l^2) \tag{7.1.9}$$

$$c_p = \frac{\sigma}{|\boldsymbol{k}|} = \pm\sqrt{gH + \frac{f_0^2}{|\boldsymbol{k}|^2}} \tag{7.1.10}$$

となる。上の式で $f_0 = 0$ とおくと、第 2 章で見た浅水重力波の位相速度 $c = \pm\sqrt{gH}$ が得られる。第 2 章の浅水重力波では地球の自転の効果は考慮していなかったが、ここでは、波動のスケールが大きくなり地球の自転の効果が無視できなくなると、浅水重力波の位相速度が増大し、かつ分散性を持つようになることがわかる。これが、浅水方程式系における慣性重力波である。また、分散関係から、振動数は波数ベクトルの大きさ$|\boldsymbol{k}|$にのみ依存し、伝播方向によらないことがわかる。

また第 3 章で既出の**ロスビーの変形半径**（Rossby's radius of deformation）$\lambda_d \equiv \sqrt{gH}/f_0$ を用いると、$(k^2 + l^2)^{-1/2} \gg \lambda_d$ の場合は (7.1.9) で $\sigma \sim f_0$ となる。このことは、ロスビーの変形半径と比較して波長が長いと運動は慣性振動的になることを意味する。これに対して、$(k^2 + l^2)^{-1/2} \ll \lambda_d$ の場合、すなわちロスビーの変形半径と比較して波長が短い場合は、f_0 と比較して振動数が大きい波（時間スケールが小さい波）であり、上記の $f_0 = 0$ とおいた場合の浅水重力波に近くなる。

7.1.2 慣性重力波に伴う渦度と発散

(7.1.4a-c) の解として、 (7.1.7) の h'と同様に$u',\ v'$ も$\exp\{i(kx + ly - \sigma t)\}$の形の解を仮定すると、

$$u' = \frac{g}{\sigma^2 - f_0^2}(\sigma k + i f_0 l)h' \tag{7.1.11a}$$

$$v' = \frac{g}{\sigma^2 - f_0^2}(\sigma l - i f_0 k)h' \tag{7.1.11b}$$

が得られ、慣性重力波に伴う速度場が決まる。またこれらから

$$\frac{\partial u'}{\partial x} = \frac{i\sigma k^2 - f_0 kl}{\sigma^2 - f_0^2}gh' \qquad\qquad \frac{\partial u'}{\partial y} = \frac{i\sigma kl - f_0 l^2}{\sigma^2 - f_0^2}gh'$$

$$\frac{\partial v'}{\partial x} = \frac{i\sigma kl + f_0 k^2}{\sigma^2 - f_0^2} gh' \qquad \frac{\partial v'}{\partial y} = \frac{i\sigma l^2 + f_0 kl}{\sigma^2 - f_0^2} gh'$$

となるので、慣性重力波に伴う速度場の相対渦度が

$$\zeta' = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} = \frac{f_0(k^2 + l^2)}{\sigma^2 - f_0^2} gh' = \frac{f_0}{H} h' \tag{7.1.12}$$

と計算される。この式により、慣性重力波に伴う相対渦度 ζ' は、自由表面の高度 h' と同位相で変動することがわかる。つまり、慣性重力波の通過に伴い流体の自由表面は上下するが、その際、自由表面高度の正偏差に対応して相対渦度の正偏差（反時計回りの循環）が現れ、自由表面高度の負偏差に対応して相対渦度の負偏差（時計回りの循環）が現れることになる。このことは、渦位保存則から気柱の伸縮に伴い絶対渦度が増減すること（第 4 章）と同じである。しかし、地衡風平衡における相対渦度と高度場偏差の関係（正渦度で高度場の負偏差、または負渦度で高度場の正偏差）とは逆であることに注意が必要である。これは、慣性重力波に伴う運動は地球自転の影響を受けているものの、地衡風バランスからは大きく外れていることを意味する。

慣性重力波に伴う速度場の発散は、

$$D' = \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = \frac{i\sigma(k^2 + l^2)}{\sigma^2 - f_0^2} gh' = i\frac{\sigma}{H} h' \tag{7.1.13}$$

となる。従って、水平発散は自由表面高度とは位相が $\pi/2$ ずれる。これと相対渦度の大きさの比は

$$\frac{|\zeta'|}{|D'|} = \frac{f_0}{\sigma} < 1$$

となる。この比が小さいほど発散が相対的に大きくなり、慣性重力波に伴う風の場が地衡風平衡から隔たっていることになる。

連続の式 (7.1.4c) は、慣性重力波による自由表面の高度変化が、速度場の水平発散と直結していることを示唆する。従って、流体の運動に水平非発散の拘束を課すと、h'の時間変化率は 0 となり、h'は時間に依存しなくなる。その場合は水平運動の運動方程式 (7.1.4a,b) の右辺の気圧傾度力も時間に依存せず、結果として u', v'も時間に依存しないことになり、運動方程式は定常な地衡風の関係となって、慣性重力波は存在しなくなる。この点に着目して、浅水方程式系において水平非発散もしくはh一定の拘束（すなわち水面に蓋をする: “rigid lid approximation”）を課すと、方程式の解から慣性重力波を閉め出すことができる。このことは第 7.3 節でロスビー波の特徴を調べるときに利用する。

7.2 ケルビン波

前節で見た慣性重力波は、水平境界を持たない、無限に広がった流体表面における波であった。側面境界（壁）が存在する場合は、境界に捕捉された波動が存在しうる。ここではそのような波について調べる。

慣性重力波の場合と同じf面近似（β効果なし）で静止大気の浅水方程式系 (7.1.4a-c)

$$\frac{\partial u'}{\partial t} - f_0 v' = -g\frac{\partial h'}{\partial x} \tag{7.1.4a}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t}+f_0u'=-g\frac{\partial h'}{\partial y} \tag{7.1.4b}$$

$$\frac{\partial h'}{\partial t}+H\left(\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}\right)=0 \tag{7.1.4c}$$

で、$x=0$ にy軸に沿った剛体壁を置いて、$x>0$ での流体の運動を考える。ただし、北半球として $f_0>0$ とする。このときの境界条件は壁（$x=0$）において壁に垂直な速度の成分を 0 と置くことにより与えられる。すなわち次の条件である。

$$x=0 \text{ において } u'=0 \tag{7.2.1}$$

次に、方程式系を慣性重力波の場合と同様に次のように書き替えておく。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f_0^2\right)u'=-g\frac{\partial^2 h'}{\partial t\partial x}-f_0g\frac{\partial h'}{\partial y} \tag{7.1.5a}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f_0^2\right)v'=-g\frac{\partial^2 h'}{\partial t\partial y}+f_0g\frac{\partial h'}{\partial x} \tag{7.1.5b}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f_0^2\right)\frac{\partial h'}{\partial t}-gH\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\frac{\partial h'}{\partial t}=0 \tag{7.1.6}$$

このとき (7.2.1) の境界条件は、(7.1.5a) を用いて、h'に対する条件

$$x=0 \text{ において } \frac{\partial^2 h'}{\partial t\partial x}+f_0\frac{\partial h'}{\partial y}=0 \tag{7.2.2}$$

に変換される。またここでは壁の近傍での波動を考え、壁から十分離れた位置では変動が生じないとして

$$x\to\infty \text{ で } h'\to 0 \tag{7.2.3}$$

も満足させる必要がある。

(7.1.5a,b), (7.1.6) の解として、y方向にのみ伝播する波動解を仮定し、振幅にx依存性を持たせた

$$h'(x,y,t)=\hat{h}(x)\exp\{i(ly-\sigma t)\} \tag{7.2.4}$$

を仮定して（7.1.6）に代入すると、$\hat{h}$ に関する常微分方程式

$$(-\sigma^2+f_0^2)\hat{h}=gH\left(\frac{d^2\hat{h}}{dx^2}-l^2\hat{h}\right) \tag{7.2.5}$$

となる。さらにこの解として $\hat{h}(x)=h_0e^{-\alpha x}$ を仮定する。h_0は定数で、αは境界条件 (7.2.3) により正である。これを (7.2.5) に代入すると、

$$\alpha^2=\frac{f_0^2-\sigma^2}{gH}+l^2 \tag{7.2.6}$$

が得られる。一方、境界条件 (7.2.2) から、

$$f_0l+\alpha\sigma=0 \tag{7.2.7}$$

である。(7.2.6) (7.2.7) からσを消去すると、

$$\alpha^4 - \left(l^2 + \frac{f_0^2}{gH}\right)\alpha^2 + \frac{f_0^2 l^2}{gH} = (\alpha^2 - l^2)\left(\alpha^2 - \frac{f_0^2}{gH}\right) = 0 \tag{7.2.8}$$

が得られるので、$\alpha > 0$ より、

$$\alpha = l, \qquad \alpha = f_0/\sqrt{gH} \tag{7.2.9}$$

が解となる。このうち $\alpha = l$ の解は、(7.2.6) から $\sigma^2 = f_0^2$ となり、慣性振動で、流体粒子が等速円運動するはずなので、境界条件 (7.2.1) を満たさない。よって $\alpha = f_0/\sqrt{gH}$ のみが許される解となる。この場合の振動数と自由表面高度は

$$\sigma = -l\sqrt{gH}\,, \quad h' = h_0 \exp\left\{-\frac{x}{\lambda_d} + il\left(y + \sqrt{gH}t\right)\right\} \tag{7.2.10}$$

である。ここで、$\lambda_d \equiv \sqrt{gH}/f_0$ はロスビーの変形半径である。y軸に沿った位相速度は

$$c_{py} = \frac{\sigma}{l} = -\sqrt{gH} \tag{7.2.11}$$

なので、y軸に沿って負の向きに進む波動である。この位相速度の大きさ$\sqrt{gH}$は、第 2 章で示した浅水重力波の位相速度に等しい。

y方向の速度 v' について、(7.2.10) で表された h' と同じ時間空間依存性を仮定して$v' = v_0\exp\{-x/\lambda_d + il(y + \sqrt{gH}t)\}$ とおくと、(7.1.5b) の左辺は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f_0^2\right)v' = (-l^2 gH + f_0^2)v'$$

であり、一方、(7.1.5b) の右辺は

$$-g\frac{\partial^2 h'}{\partial t \partial y} + f_0 g\frac{\partial h'}{\partial x} = gl^2\sqrt{gH}h' - \frac{f_0 g}{\lambda_d}h' = \left(gl^2\sqrt{gH} - {f_0}^2\frac{\sqrt{gH}}{H}\right)h' = \sqrt{\frac{g}{H}}\left(l^2 gH - {f_0}^2\right)h'$$

と変形できるので、これらから

$$v' = -\sqrt{\frac{g}{H}}h' = -h_0\sqrt{\frac{g}{H}}\exp\left\{-\frac{x}{\lambda_d} + il\left(y + \sqrt{gH}t\right)\right\} \tag{7.2.12}$$

が得られる。さらに、(7.1.4b) に (7.2.10) と (7.2.12) を使い、また u' に関する境界条件 (7.2.1) 式から、$x \geq 0$において

$$u' = 0 \tag{7.2.13}$$

であることがわかる。ここで得られた波動を**ケルビン波**（Kelvin wave）と呼ぶ。特徴をまとめると以下のようになる。

(1)　波の振幅は壁の位置で最大であり、壁から離れるにつれて指数関数的に減少する。振幅が $1/e$ になる距離はロスビーの変形半径で与えられる。このように、ケルビン波は壁に捕捉された波（境界波）の一種である。

(2)　壁に直交する速度成分 u' は、壁の位置だけでなく、いたるところで 0 である。

(3)　波の位相速度は自転の効果が作用しない浅水重力波と同じであり、波数に依存しない（分散性がない）。ただしその位相の進行方向は壁に沿った一方向のみである。

(4)　壁に沿った速度成分 v' に働くコリオリ力は、流体が壁に押し付けられて自由表面が上昇し

た（あるいは流体が壁から引き離されて自由表面が低下した）ことによって生じる圧力傾度力と釣り合う。言い換えると、壁の存在によって生じた自由表面の起伏が、地球自転の効果（コリオリ力）を打ち消す形となっている。

(5)　北半球ではコリオリ力が流体の速度方向に対して右向きに働くことに着目し、ある瞬間における波のリッジの場所で、壁を右手に見る方向を向いている観測者を考える。このとき、観測者のいる波のリッジとその前方のトラフの間の速度場は収束場になっており、その区間の自由表面高度は次の瞬間には上昇する。一方、自分がいるリッジとその後方のトラフとの間は発散場となり、そこでは自由表面高度は次の瞬間には下降する。従って、観測者がいる場所である波のリッジは、次の瞬間には、その位置がわずかに前方に進むことになる。このことは、波の位相が観測者から見て前方に進むことを意味する。すなわち、北半球ではケルビン波は壁を右手に見ながら進むことになる。

なお、南半球では、(7.2.9) において $\alpha = -f_0/\sqrt{gH}$ となるので、$\sigma = l\sqrt{gH}$、$c_{py} = \sqrt{gH}$ となり、ケルビン波は壁を左手に見ながら進む。

赤道をはさんで南北対称な流れが生じることを考えると、赤道で $v' = 0$ が条件となり、赤道を壁と見なすことと等価となる。すると北半球側では赤道を右に、南半球側では赤道を左に見るようにケルビン波が進む。これにより赤道に捕捉されて西から東へと進む波動が説明される。これは**赤道ケルビン波**と呼ばれる。

7.3 ロスビー波

ロスビー波（Rossby wave）については、既に第 4 章で渦位（主に順圧渦位）を用いた簡単な説明により、β効果により西進する波動であることを示した。β効果が重要ということは、波動の水平スケールが数千 km の総観規模から 1 万 km 程度の惑星規模であることと関係する。このうち規模の大きなものは惑星ロスビー波またはプラネタリー波（planetary wave）と呼ばれることもある。

実は、ロスビー波に重要なのは、β効果だけではなく、基本場の渦位の水平傾度である。第 4 章では基本場の風を一様としていたため、渦位の水平傾度がβ効果のみとなって、これがロスビー波の復元力として表されていたのである。基本場の流れが非一様で、ある条件を満たせば、小さいスケールのロスビー波も生じうる。このことは第 8 章で述べる波動の不安定とも関係してくる。

しかしこの節でも簡単のため、第 4 章と同様に基本場は静止または一様な流れとして、その環境下での波動についての説明を行う。この仮定においては第 4 章と同様にβ効果の重要性が強調される。β効果以外の要素の寄与は付録 7B 及び 7C で触れておく。

7.3.1 自由表面がある場合のロスビー波

この第 7.3 節では、第 4 章と同じく浅水方程式系を用いるが、本節では第 7.1 節で用いたf面近似の方程式 (7.1.4a-c) に、地球の自転の効果としてf_0だけでなくその緯度変化（β効果）も含めたものを採用する。

ここではまず、基本場は静止しており（$\bar{u} = 0,\ \bar{h} = H$）、底面地形がない（$h_B = 0$）とする（底面地形がある場合も含め、順圧渦位$Q$を用いた議論は付録 7B を参照)。この場合の微小擾乱の方程式は

$$\frac{\partial u'}{\partial t} - (f_0 + \beta y)v' = -g\frac{\partial h'}{\partial x} \tag{7.3.1a}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + (f_0 + \beta y)u' = -g\frac{\partial h'}{\partial y} \tag{7.3.1b}$$

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + H\left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y}\right) = 0 \tag{7.3.1c}$$

と書ける。しかしこれらは定数係数の微分方程式ではないので、初等関数の範囲では解けない。そこでまず、(7.3.1a,b) の回転を取って、渦度方程式をつくる。

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}\right) + (f_0 + \beta y)\left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y}\right) + \beta v' = 0 \tag{7.3.2}$$

この式の左辺にβ項（$\beta v'$）が独立していることを確認したうえで、(7.3.1a) と (7.3.2) に現れている$f = f_0 + \beta y$ を f_0 で近似する。

$$\frac{\partial u'}{\partial t} - f_0 v' = -g\frac{\partial h'}{\partial x} \tag{7.3.3a}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}\right) + f_0\left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y}\right) + \beta v' = 0 \tag{7.3.3b}$$

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + H\left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y}\right) = 0 \tag{7.3.3c}$$

この方程式系は定数係数であり、かつ (7.3.3b) にβ項が存在することで、β効果を表すことができる。

【注意】ここで行った$f = f_0 + \beta y$ を f_0 とおく近似を (7.3.1a-c) の段階で行うと、慣性重力波を議論した際のf面近似の方程式系と同じになってしまう。ここではβ効果を含めるため、方程式系のうち運動方程式の南北成分 (7.3.1b) を渦度方程式に置き換えてβ項を独立した項としてから近似を行った。

方程式系 (7.3.3a-c) の解として 2 次元の単色平面波解

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ h' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{h} \end{pmatrix} \exp\{i(kx + ly - \sigma t)\} \tag{7.3.4}$$

を代入すると、定数$\hat{u}$、$\hat{v}$、$\hat{h}$に関する代数方程式

$$\begin{cases} -i\sigma\hat{u} - f_0\hat{v} = -igk\hat{h} \\ -i\sigma(ik\hat{v} - il\hat{u}) + f_0(ik\hat{u} + il\hat{v}) + \beta\hat{v} = 0 \\ -i\sigma\hat{h} + H(ik\hat{u} + il\hat{v}) = 0 \end{cases} \tag{7.3.5}$$

が得られる。この連立一次方程式が非自明解を持つ条件は、

$$\begin{vmatrix} -i\sigma & -f_0 & igk \\ -l\sigma + if_0k & k\sigma + if_0l + \beta & 0 \\ iHk & iHl & -i\sigma \end{vmatrix} = 0 \tag{7.3.6}$$

で与えられる。行列式は、

$$k\sigma^3 + \beta\sigma^2 - [f_0^2 + gH(k^2 + l^2)]k\sigma - \beta gHk^2 = 0 \tag{7.3.7}$$

となる。これをσに関する方程式とみれば 3 つの根が存在する。それらを厳密に求めることも可能であ

るが、ここでは近似解を求めることを考える。まず (7.3.7) 式を以下のように書き換える。

$$(\sigma k+\beta)(\sigma^2-k^2gH)-\sigma kgl^2H-k\sigma f_0^2=0 \tag{7.3.8}$$

3 個の根のうち、1 個は重力波の振動数よりはるかに小さいとする（$|\sigma|\ll|k|\sqrt{gH}$）と、(7.3.8) は

$$-(\sigma k+\beta)k^2gH-\sigma kgl^2H-k\sigma f_0^2=0 \tag{7.3.9}$$

となるので、σの一次式となり、

$$\sigma=-\frac{\beta k}{k^2+l^2+f_0^2/gH}=-\frac{\beta k}{k^2+l^2+1/\lambda_d^2} \tag{7.3.10}$$

が得られる。ここで λ_d はロスビーの変形半径

$$\lambda_d\equiv\frac{\sqrt{gH}}{f_0} \tag{7.3.11}$$

である。(7.3.10) で表されるσの波動が、ロスビー波である。$\beta>0$ であることからσとkの符号は逆である。$l=0$ の場合、 (7.3.10) は、$|k|\ll1/\lambda_d$（長波長）では $|\sigma|\sim\beta\lambda_d^2|k|$、$|k|\gg1/\lambda_d$（短波長）では$|\sigma|\sim\beta/|k|$となる。そしてこの波動の東向き位相速度 c_{px} は、

$$c_{px}=\frac{\sigma}{k}=-\frac{\beta}{k^2+l^2+1/\lambda_d^2} \tag{7.3.12}$$

で、$c_{px}<0$ であり、位相は常に西進することがわかる。その速さは波数 $\sqrt{k^2+l^2}$ が小さいほど（波長が長いほど）大きい。

(7.3.8) の残りの 2 つの根は、$|\sigma|\gg\beta/|k|$ と仮定すると、

$$\sigma k(\sigma^2-k^2gH)-\sigma kgl^2H-k\sigma f_0^2=0$$

から

$$\sigma^2=f_0^2+gH(k^2+l^2)=f_0^2[1+\lambda_d^2(k^2+l^2)] \tag{7.3.13}$$

となる。これは慣性重力波の分散関係 (7.1.9) に他ならない。実際にはβ効果の影響も受けて変形された慣性重力波となる。導出の際の $|\sigma|\gg\beta/|k|$ の仮定は、比較的波長が短い場合にロスビー波より高周波と想定したことに対応する。

【ロスビー波と慣性重力波の比較】

ここで、仮想的であるが具体的な事例として、緯度 45 度における深さ 8 km の等密度大気（大気に上端があり、自由表面となっている）における波動を考えてみよう。そこでは f_0 =10^{-4} s^{-1}、λ_dは約 2800 km で、β =1.6×10^{-11} m^{-1} s^{-1} である。

このような大気の中で起こる運動として、簡単のために、y方向の波数 $l=0$ とし、x方向の波数 k =10^{-6} m^{-1} （波長約 6300km）であるロスビー波を考えると、その西進位相速度は約 14 m s^{-1} であり、振動数約 1.4×10^{-5} s^{-1}（～$0.1f_0$)、周期は約 5 日である。

同じ波長の慣性重力波は、位相速度約 300 m s^{-1}、振動数約 3×10^{-4} s^{-1}（～$3f_0$)、周期約 5.8 時間である。同じ条件での浅水重力波の位相速度 $\sqrt{gH}$ は波長にかかわらず 283 m s^{-1} である。

このようにロスビー波の位相速度は同じスケールの慣性重力波や浅水重力波と比較して 1 桁小さい。

以上により、(7.3.8) の 3 つの根は、位相速度の速い東進慣性重力波・西進慣性重力波と、位相速度の遅い西進ロスビー波であることがわかった。図 7.4 にこれらの波動の波数kと振動数σ（ただし $\sigma > 0$ の場合）の関係を示している。慣性重力波の振動数σは (7.1.9) で示されたように必ずf_0より大きく（$\sigma/f_0 > 1$）、波数kが大きくなると振動数や位相速度は浅水重力波（$\sigma = \pm k\sqrt{gH}$）に漸近する。ロスビー波は振動数σは小さく、$k < 0$で、西進波のみが存在することを示す。またロスビー波の振動数の導出の際に (7.3.9) の前で用いた仮定 $|\sigma| \ll |k|\sqrt{gH}$ が満たされていることもこの図からわかる。

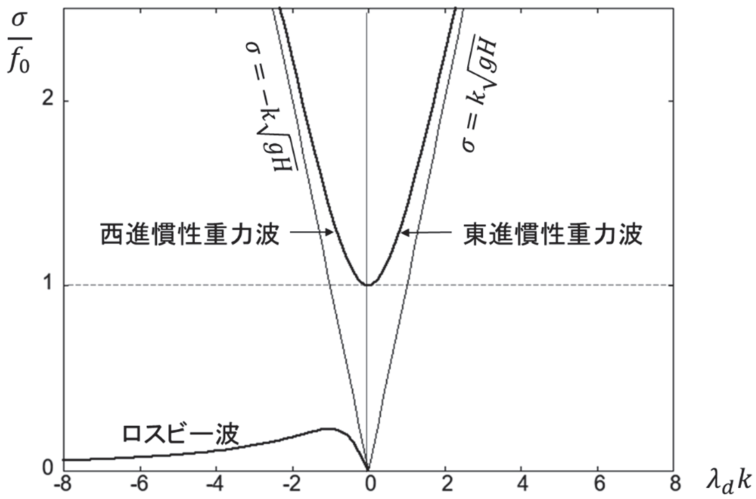


図 7.4　浅水方程式系における波動の、東西波数k（横軸）と振動数σ（縦軸）の関係。
f_0 =10^{-4} s^{-1}、β =1.6×10^{-11} m^{-1} s^{-1}、$\sqrt{gH}$ =283 m s^{-1} としている。

※　慣性重力波とロスビー波の位相速度の違いは数値予報モデルにおいても重要な意味を持つ。ロスビー波の方に関心がある場合でも、予報方程式に位相速度の大きい慣性重力波が含まれている場合、計算不安定を起こさないためには、CFL 条件（付録 6A）によりタイムステップを十分小さく取る必要がある。これを避けるための方法の一つとして、準地衡風方程式系が用いられることがある。準地衡風方程式系では基本場に静力学平衡と地衡風平衡（非発散）を仮定することにより、慣性重力波が含まれない。

※　赤道付近ではf_0→0 となり、慣性重力波とロスビー波の両方に類似した性質を持つ混合ロスビー重力波（mixed Rossby-gravity wave）と呼ばれる波が現れる。（例えば北畠（2019b）第 5 章を参照。）

【分散関係と群速度に関する考察】

ここで、ロスビー波の分散関係式 (7.3.10) を変形すると、

$$\left(k + \frac{\beta}{2\sigma}\right)^2 + l^2 = \left(\frac{\beta}{2\sigma}\right)^2 - \frac{1}{\lambda_d^2} \tag{7.3.14}$$

が得られる。この方程式は、波数空間 (k, l) における各振動数σの等値線を与えており、点 $(-\beta/2\sigma, 0)$ を中心とする半径 $\sqrt{(\beta/2\sigma)^2 - 1/\lambda_d^2}$ の円である。

図 7.5 はある固定されたσ（> 0）に対して (7.3.14) 式を満足する (k, l) の集合を波数空間上に描いたもので、図中の点 C を中心とする円となる。$\sigma > 0$ であることと、円の半径が $\beta/2\sigma$ より小さいこ

とから、円はk軸の負の側に現れることがわかる。この円周上に点 W を取ると、$k-l$平面の原点 O から点 W に向かうベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OW}}$が波数ベクトル $\boldsymbol{k}=(k,l)$ で、波の位相の進む方向を表し、$k<0$であることから波の位相が西進することがわかる。

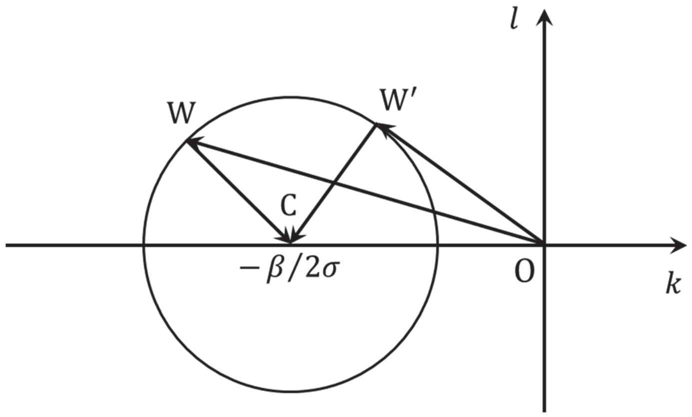


図 7.5　ロスビー波のエネルギー伝播ダイヤグラム。波数空間における振動数の等値線（$(-\beta/2\sigma,0)$ を中心とする半径 $\sqrt{(\beta/2\sigma)^2-1/\lambda_d^2}$の円周）と、波数ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OW}}$、$\overrightarrow{\mathrm{OW'}}$、及びそれぞれに対応する群速度の方向$\overrightarrow{\mathrm{WC}}$、$\overrightarrow{\mathrm{W'C}}$の関係。

一方、波のエネルギー伝播の方向を示す群速度 $\boldsymbol{c_g}=(\partial\sigma/\partial k,\partial\sigma/\partial l)$ は、今の場合、円周上の点 W から円の中心に向かうベクトル$\overrightarrow{\mathrm{WC}}$に平行になることが、以下の考察によりわかる。

ロスビー波の群速度を (7.3.10) の分散関係から求めると、

$$c_{gx}=\frac{\partial\sigma}{\partial k}=\frac{\beta(k^2-l^2-1/\lambda_d^2)}{(k^2+l^2+1/\lambda_d^2)^2} \tag{7.3.15a}$$

$$c_{gy}=\frac{\partial\sigma}{\partial l}=\frac{2\beta kl}{(k^2+l^2+1/\lambda_d^2)^2} \tag{7.3.15b}$$

これらを (7.3.10) も使って書き換えると、

$$c_{gx}=-\frac{2\sigma}{k^2+l^2+1/\lambda_d^2}\left(k+\frac{\beta}{2\sigma}\right)$$

$$c_{gy}=-\frac{2\sigma l}{k^2+l^2+1/\lambda_d^2}$$

となるので、

$$\boldsymbol{c}_g=\left(c_{gx},c_{gy}\right)=-\frac{2\sigma}{k^2+l^2+1/\lambda_d^2}\left(k-\frac{\beta}{-2\sigma},l\right)=-\frac{2\sigma}{k^2+l^2+1/\lambda_d^2}\overrightarrow{\mathrm{CW}}$$

の関係式が得られる。今の場合、$\sigma>0$ なので、上の関係式における$\overrightarrow{\mathrm{CW}}$の係数は負であり、$\boldsymbol{c}_g$は$\overrightarrow{\mathrm{CW}}$の向きを逆転させた$\overrightarrow{\mathrm{WC}}$と平行になることがわかる。

ロスビー波の群速度と位相速度に関する性質をまとめると、以下のようになる。

（1）β効果によるロスビー波の位相速度は必ず西向きであり、波長が長いほうが西進速度は大きい。

（2）群速度と位相の進む方向は、一般に平行でも直交でもない。

（3）群速度は、一般に東西波長が長い場合は西向き、東西波長が短い場合は東向きとなる。

（4）南北方向の位相速度 $c_{py} = \sigma / l$ と群速度の南北成分 c_{gy} は向きが逆である。

【問題】上記（4）を証明せよ。

7.3.2 非発散ロスビー波とそれに伴うエネルギー伝播

第 7.1 節の慣性重力波の説明において、浅水方程式系において水平非発散もしくはh一定（すなわち水面に蓋をする）の拘束を課すと、方程式の解から慣性重力波を閉め出すことができることを指摘した。浅水方程式系において蓋をして自由表面の上下運動がない（$h = H$）として慣性重力波を除去し、さらに底面地形もないとする（$h_B = 0$）と、これは第 4 章でみた基本的なロスビー波と同じで、渦位保存則は絶対渦度保存則

$$\frac{d}{dt}(\zeta + f) = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u\frac{\partial \zeta}{\partial x} + v\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \beta v = 0 \tag{7.3.16}$$

に帰着する。一方、このときは非発散で

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

なので、水平風速 u, v と相対渦度ζは、流線関数ψを導入することによって、

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \zeta = \nabla_H^2 \psi \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi \tag{7.3.17}$$

と表すことができる。これを (7.3.16) に代入すれば、非発散渦度方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla_H^2\psi + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\nabla_H^2\psi - \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\nabla_H^2\psi + \beta\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \tag{7.3.18}$$

が得られる。

この方程式を用いて、ロスビー波の基本的な性質を調べる。基本場が静止している（$\bar{\psi}$が一定）とすれば、微小擾乱の流線関数 ψ' の方程式は、微小量の 2 次の項を無視して

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla_H^2\psi' + \beta\frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0 \tag{7.3.19}$$

となり、これだけで方程式が閉じて、解を完全に決定できる。第 4 章では南北方向に一様として考えたが、ここではこの方程式の解として、2 次元伝播する単色平面波解

$$\psi' = \hat{\psi}\exp\{i(kx + ly - \sigma t)\} \tag{7.3.20}$$

を仮定すれば（$\hat{\psi}$は実数)、分散関係式

$$\sigma = -\frac{\beta k}{k^2 + l^2} \tag{7.3.21}$$

が得られる。これを水平発散がある場合のロスビー波の分散関係式 (7.3.10) と比較すると、分母に $1/\lambda_d^2$ がない分だけ振動数が大きくなっていることがわかる。別の見方をすると、(7.3.21) は水平発散

がある場合の (7.3.10) で $\lambda_d \to \infty$ とした場合に相当する。また図 7.5 と同様の方法で波数空間における(7.3.21) の振動数の等値線を描くと、半径が $\beta/2\sigma$ で原点を通る円となる。群速度は

$$\boldsymbol{c}_g = \left(\frac{\beta(k^2 - l^2)}{(k^2 + l^2)^2},\ \frac{2\beta kl}{(k^2 + l^2)^2}\right) = -\frac{2\sigma}{k^2 + l^2}\left(k - \frac{\beta}{-2\sigma}, l\right) \tag{7.3.22}$$

となる。これらから、波数ベクトルと群速度の間にも図 7.5 と同様の関係が成り立つ。これが非発散ロスビー波の特徴である。

なお、ここで行っている非発散・絶対渦度保存の扱いは、第 5 章の準地衡風渦位の鉛直傾度に関する項がない場合（$q \equiv f_0 + \beta y + \nabla_H^2 \psi$）の渦位保存に対応する（付録 7C を参照）。

ここで、非発散ロスビー波に伴うエネルギー伝播について考えておく。そのために (7.3.19) 式にψ'をかけて

$$\psi' \frac{\partial}{\partial t} \nabla_H^2 \psi' + \beta \psi' \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0 \tag{7.3.23}$$

としておく。この式の第 1 項の一部（x微分の項）に関して

$$\psi' \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi' = \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi' \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi'}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \psi'}{\partial x}\right)^2\right\}$$

が成り立ち、同じ第 1 項中のy微分に関する項も同様に変形できるので、結局 (7.3.23) 式の第 1 項は

$$\psi' \frac{\partial}{\partial t} \nabla_H^2 \psi' = \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi' \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi'}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\psi' \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi'}{\partial y}\right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(\frac{\partial \psi'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi'}{\partial y}\right)^2\right\} = \nabla_H \cdot \left(\psi' \frac{\partial}{\partial t} \nabla_H \psi'\right) - \frac{\partial E}{\partial t}$$

と変形できる。ただし

$$E \equiv \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial \psi'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi'}{\partial y}\right)^2\right\} = \frac{1}{2}(u'^2 + v'^2) \tag{7.3.24}$$

は波動に伴う単位質量当たりの運動エネルギー密度である。以上により、(7.3.23) を次のように書き換えることができる。

$$\nabla_H \cdot \left(\psi' \frac{\partial}{\partial t} \nabla_H \psi'\right) - \frac{\partial E}{\partial t} + \beta \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\psi'^2\right) = 0$$

さらに書き換えると

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla_H \cdot \left(-\psi' \frac{\partial}{\partial t} \nabla_H \psi' - \frac{\beta}{2}\psi'^2 \boldsymbol{i}\right) = 0 \tag{7.3.25}$$

が得られる。これはロスビー波のエネルギー保存則を表す。ただし、$\boldsymbol{i}$ はx方向の単位ベクトルである。

擾乱の流線関数として単色平面波解 (7.3.20) を仮定し、波動を 1 周期分で時間平均 したものを $\overline{(\ )}$ のように書くと、平均した運動エネルギー$\bar{E}$は、複素共役 $(\ )^*$ も用いて

$$\bar{E} = \frac{1}{2}\left\{\overline{\left(\frac{\partial \psi'}{\partial x}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial \psi'}{\partial y}\right)^2}\right\} = \frac{1}{4}\left\{\mathrm{Re}\left[ik\hat{\psi}\left(ik\hat{\psi}\right)^*\right] + \mathrm{Re}\left[il\hat{\psi}\left(il\hat{\psi}\right)^*\right]\right\} = \frac{1}{4}(k^2 + l^2)\hat{\psi}^2 \tag{7.3.26}$$

となる。ただし、AとBを任意の複素数として、$X = \mathrm{Re}[A\exp\{i(kx + ly - \sigma t)\}]$、$Y = \mathrm{Re}[B\exp\{i(kx + ly - \sigma t)\}]$ ならば

$$\overline{XY} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[AB^*] \tag{7.3.27}$$

が成り立つことを利用している。一方、(7.3.25) の左辺第 2 項の括弧内の各項についても同様に、

$$\overline{\psi' \frac{\partial}{\partial t} \nabla_H \psi'} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\hat{\psi}\left\{-i\sigma\left(ik\hat{\psi}\boldsymbol{i} + il\hat{\psi}\boldsymbol{j}\right)\right\}^*\right] = \frac{1}{2}\sigma\hat{\psi}^2(k\boldsymbol{i} + l\boldsymbol{j}) = -\frac{1}{2}\hat{\psi}^2\left(\frac{\beta k^2}{k^2+l^2}, \frac{\beta kl}{k^2+l^2}\right)$$

$$\frac{\beta}{2}\overline{\psi'^2} = \frac{\beta}{4}\hat{\psi}^2$$

と書ける。ただし、$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$はそれぞれx、y方向の単位ベクトルである。従って、(7.3.25) 式の左辺第 2 項の発散演算子の内部を$\boldsymbol{F}$とおくと (7.3.26) と (7.3.22) より

$$\overline{\boldsymbol{F}} = \frac{1}{4}(k^2+l^2)\hat{\psi}^2\left(\frac{\beta(k^2-l^2)}{(k^2+l^2)^2}, \frac{2\beta kl}{(k^2+l^2)^2}\right) = \bar{E}\boldsymbol{c}_g \tag{7.3.28}$$

が成立する。この式は、波の運動エネルギーEが群速度 $\boldsymbol{c}_g$で運ばれていることを示している。非発散ロスビー波では運動は完全に水平面内で起こっていると考えられるので、波に伴う位置エネルギーはなく、運動エネルギー密度Eが波の全エネルギーに等しい。

7.3.3 基本場の流れがある場合のロスビー波の伝播

ここまで、基本場として静止大気を仮定していたが、中緯度の対流圏では偏西風が卓越している。そこで、東西方向に一様な風が吹いている場合のロスビー波の伝播を調べる。前項に引き続き非発散で、基本場の東西風と南北風がそれぞれ $\bar{u} \neq 0$ かつ一定、 $\bar{v} = 0$ とすると、基本場の流線関数は

$$\bar{\psi} = -\bar{u}y \tag{7.3.29}$$

と表されるので、(7.3.18) で微小量の 2 次以上の項を無視した微小擾乱の方程式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla_H^2\psi' + \beta\frac{\partial\psi'}{\partial x} = 0 \tag{7.3.30}$$

となる。これに単色平面波解 (7.3.20) を代入すれば、分散関係式と東西方向の位相速度として

$$\sigma = k\bar{u} - \frac{\beta k}{k^2+l^2} \tag{7.3.31}$$

$$c_{px} = \bar{u} - \frac{\beta}{k^2+l^2} \tag{7.3.32}$$

が得られる。このロスビー波の位相が地面に対して進む方向は、

・$\bar{u} > \beta/(k^2+l^2)$　→　ロスビー波は東進する。

・$\bar{u} = \beta/(k^2+l^2)$　→　ロスビー波は停滞する。（定常ロスビー波）

・$\bar{u} < \beta/(k^2+l^2)$　→　ロスビー波は西進する。

となることがわかる。一方、群速度は、

$$\boldsymbol{c}_g = \left(\bar{u} + \frac{\beta(k^2 - l^2)}{(k^2 + l^2)^2},\ \frac{2\beta kl}{(k^2 + l^2)^2}\right) = \left(c_{px} + \frac{2\beta k^2}{(k^2 + l^2)^2},\ \frac{2\beta kl}{(k^2 + l^2)^2}\right)$$
$$= (c_{px},\ 0) + \frac{2\beta k}{(k^2 + l^2)^2}(k, l) \tag{7.3.33}$$

となる。群速度の東向き成分c_{gx}と東向きの位相速度c_{px}を比較すると、 c_{gx} のほうが大きくなることがわかる。このため、偏西風帯ではロスビー波の位相よりもエネルギーの方が速く東に伝播する（付録 7A も参照)。$k > 0$ とすると南北方向の伝播は l の符号により決まり、$l > 0$ の場合には群速度は北へ向く。このときトラフ・リッジは北西－南東走向を持つ（Hoskins and James 2014, p.168)。逆にトラフ・リッジが北東－南西走向を持つときは、$l < 0$ で群速度は南へ向く。さらに、(7.3.33) に (7.3.32) を使ってβを消去し、また $\cos\alpha = k/(k^2 + l^2)^{1/2}$、$\sin\alpha = l/(k^2 + l^2)^{1/2}$ とすると、

$$\boldsymbol{c}_g = \left[\bar{u} + (\bar{u} - c_{px})\cos 2\alpha,\qquad (\bar{u} - c_{px})\sin 2\alpha\right]$$

となり、$\boldsymbol{c}_g$の終点は $(\bar{u},\ 0)$ を中心とする半径 $(\bar{u} - c_{px})$ の円上に位置する。

7.3.4 定常ロスビー波

前項の結果から、基本場が西風（$\bar{u} > 0$）の場合にのみ定常ロスビー波が発生しうる。このことは第 4 章でも示されていた。定常ロスビー波は $c_{px} = 0$ なので、波数は (7.3.32) より

$$|\boldsymbol{k}| = \sqrt{k^2 + l^2} = \sqrt{\beta/\bar{u}} \tag{7.3.34}$$

である。このため波長は基本場の風速だけで決まり、偏西風の風速が強い方が定常ロスビー波の波長が大きくなる。次に群速度は (7.3.33) において $c_{px} = 0$ とすると

$$\boldsymbol{c}_g = \frac{2\beta k}{(k^2 + l^2)^2}(k, l) \tag{7.3.35}$$

となる。ここから、定常ロスビー波では、群速度の方向は波数ベクトルと平行になることがわかる。また、群速度の東西成分は常に正（東向き）なので、位相が伝播しないにもかかわらず定常ロスビー波の波動が波源域の東側（下流側）に伝播することもわかる（図 7.6)。現実大気中の（定常）ロスビー波の波源としては、第 4 章の例のように大規模山岳や、海洋からの加熱がしばしば指摘される。

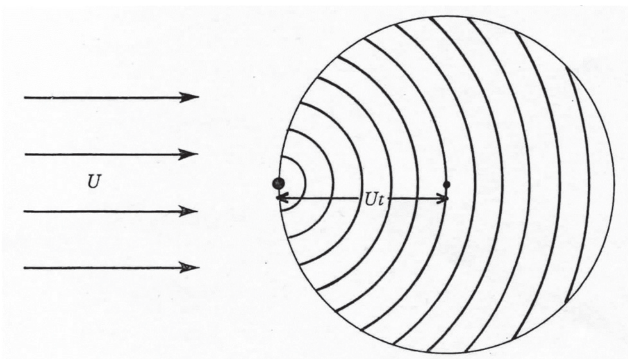


図 7.6　定常ロスビー波の水平伝播の模式図。一様な西風Uのもとで波源（図中●）から波動が発生してt時間後の等位相線の分布を表す。（Lighthill 1966）

【問題】東向きにx軸、北向きにy軸を取り、一様な西風 $\bar{u}$ のもとで、原点 O を波源として非発散定常ロスビー波が発生したとする。x軸の正の向きに対する群速度ベクトルのなす角をαとしたとき、群速度ベクトル $\boldsymbol{c}_g$を $\bar{u}$、α、及び $\boldsymbol{c}_g$ 方向の単位ベクトル $\hat{\boldsymbol{e}}$ を用いて表せ。またその結果を用いて、群速度ベクトル $\boldsymbol{c}_g$を、その始点を原点にとってx-y平面上にプロットすると、αの値にかかわらずベクトルの終点がある円の円周上に乗ることを示せ。

【例】図 7.7 は 500 hPa ジオポテンシャル高度の 3 か月平均で、冬には波数 3 程度の波動が卓越し、夏には波数 5〜6 程度の波動が卓越している。このように季節平均すると一般に、冬季には波数の小さい波（波長の大きい波）が卓越し、夏季には冬季より波数の大きい波（波長の小さい波）が卓越しているように見える。時間平均の操作により、移動する波は消え、停滞性の波のみが残ると考えられるので、冬季は低波数の波、夏季には高波数の波が停滞していることになる。このことは (7.3.34) より、冬季と夏季の偏西風の強さの違いによると解釈することができる。

【例】ロスビー波の波源として地形が寄与することについては、既に第 4 章において順圧渦位の保存を説明した際に、西風（東向きの流れ）が山岳を乗り越えるときはその下流（東側）に波が生成され伝播するが、東風（西向きの流れ）が山岳を乗り越えるときはその下流（西側）には波が伝播しないことを示していた。そのことをここで改めて説明したことになる。なお、第 6 章の内部重力波の関連でも山岳の下流での波動の伝播について説明したが、それとロスビー波とは空間・時間スケールが異なる。水平スケールが数千 km 以上になるロスビー波の励起に関係する大規模地形としては、北半球ではチベット高原やロッキー山脈が代表的である。（図 7.7 も参照）

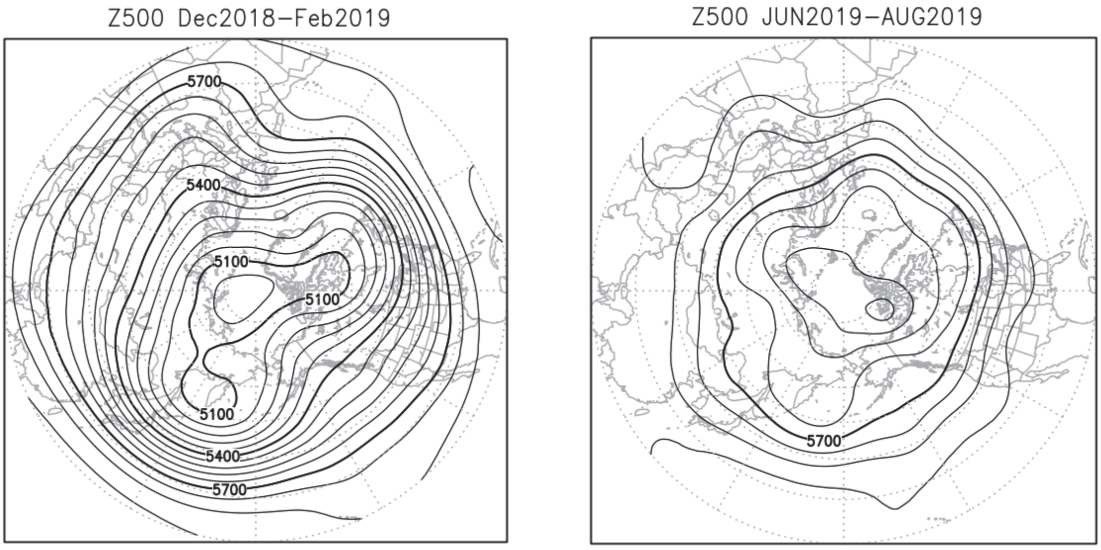


図 7.7　500hPa ジオポテンシャル高度の 3 か月平均（60m ごと）。
（左）2018 年 12 月〜2019 年 2 月、（右）2019 年 6 月〜8 月。

【例】通常、熱帯西部太平洋は海水温が特に高いので、その上空では対流雲が活発に発生し、それが波源となったロスビー波列（Rossby wave train）が日本の南から北太平洋中部を経て北米まで伝播することがしばしばあり、テレコネクションのパターンの一つとしてよく知られている（図 7.8）。この熱帯西部太平洋の海水温はいわゆるエルニーニョ・南方振動に伴って変化し、そこから大気中の大規模な

ロスビー波が高緯度側に伝播して、地球規模の天候に大きな影響をもたらす。

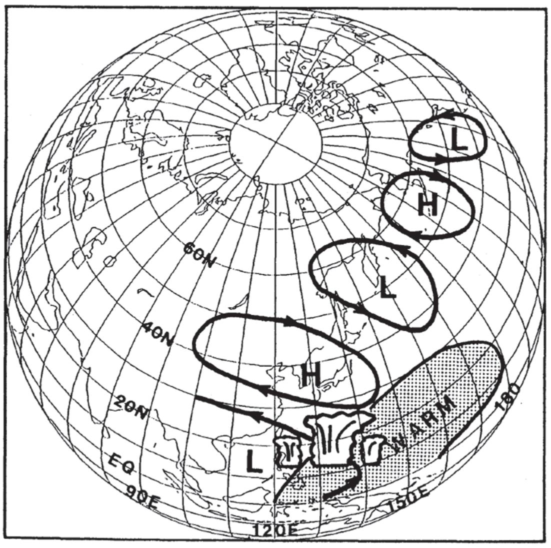


図 7.8　熱帯西部太平洋の海水温が高温になった場合に生じるロスビー波の模式図。（Nitta 1987）

7.4 鉛直方向に伝播するロスビー波

これまで浅水方程式系でロスビー波の性質を調べたが、この方法では鉛直伝播はわからない。現実の大気中ではロスビー波も鉛直伝播する。これを**内部ロスビー波**（internal Rossby wave）という。ここでは第 5 章の準地衡風方程式系を用いて内部ロスビー波について調べることにする。準地衡風方程式系では基本場に静力学平衡と地衡風平衡を仮定しており非発散なので、慣性重力波は含まれない。

第 5 章の準地衡風渦位は、気圧座標系・β平面近似で

$$q \equiv f_0 + \beta y + \zeta_g + \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0}{S(p)}\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right) \tag{7.4.1}$$

と定義されていた。ここで$S(p)$は気圧だけに依存する静的安定度で、次のように定義される。

$$S(p) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial p}\ln\bar{\theta} \tag{7.4.2}$$

ただし、ρと$\bar{\theta}$は基準となる場の密度と温位で、共に気圧（高度）だけの関数である。地衡風は水平非発散で、流線関数 ψ を用いて

$$\psi \equiv \frac{1}{f_0}\Phi, \quad u_g = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_g = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \zeta_g = \nabla_p^2 \psi \tag{7.4.3}$$

のように表せる。これにより (7.4.1) は

$$q \equiv f_0 + \beta y + \nabla_p^2 \psi + \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0^2}{S(p)}\frac{\partial \psi}{\partial p}\right) \tag{7.4.4}$$

と書き換えることができる。

このような気圧座標系で表された準地衡風方程式系によってロスビー波の鉛直伝播を調べるうえでは、静的安定度$S(p)$がpに強く依存することが問題となる。この$S(p)$は、第 5 章での準地衡風オメガ方

程式などの解釈の際には定数σとおいていたが、ここではもう少しきちんと考えよう。$S(p)$は基準となる場のブラント・バイサラ振動数N（$N^2 \equiv g\, d \ln\bar{\theta}/dz$）と密度$\rho$ を用いて

$$S(p) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial p}\ln\bar{\theta} = \left(\frac{N}{\rho g}\right)^2 \tag{7.4.5}$$

とも表される。第 6.4 節で行ったように等温大気を仮定すればNは一定とできるが、その場合でも$S(p)$は、大気の密度ρ、従って気圧に強く依存する。その対策として、ここでは、p_0を基準気圧（定数）、$H = RT_0/g$ を大気の平均的温度T_0（定数）に対応するスケールハイトとして

$$Z \equiv -H\ln\left(\frac{p}{p_0}\right), \quad p = p_0 \exp\left(-\frac{Z}{H}\right) \tag{7.4.6}$$

によって定義される**対数気圧座標**Zを導入する（第 2 章の付録 2B を参照）。

またこの座標系における密度（付録 2B の擬密度$\tilde{\rho}$）を

$$\rho_Z = \frac{p}{gH} = \rho_0 e^{-Z/H}, \qquad \rho_0 = \frac{p_0}{RT_0} \tag{7.4.7}$$

として、これを使うと

$$\frac{\partial}{\partial p} = \frac{dZ}{dp}\frac{\partial}{\partial Z} = -\frac{H}{p}\frac{\partial}{\partial Z} = -\frac{1}{\rho_Z g}\frac{\partial}{\partial Z} \tag{7.4.8}$$

と書ける。一方、$S(p)$ の置き換えに関しては、対数気圧座標系で表したブラント・バイサラ振動数

$$N_Z^2 \equiv \frac{p^2 S(p)}{H^2} = (\rho_Z g)^2 S(p) \tag{7.4.9}$$

を定義する。これはさらに (7.4.5) を用いると次のように書き替えられる。

$$N_Z^2 = \left(\frac{\rho_Z}{\rho}\right)^2 N^2 = \left(\frac{T}{T_0}\right)^2 N^2 \tag{7.4.10}$$

これを用いて (7.4.4) の鉛直微分の項を書き換えると、対数気圧座標系における準地衡風渦位

$$q = f_0 + \beta y + \nabla_Z^2 \psi + \frac{f_0^2}{\rho_Z}\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{\rho_Z}{N_Z^2}\frac{\partial \psi}{\partial Z}\right) \tag{7.4.11}$$

が得られる（等Z面は等p面と同等であることにも注意）。ここで、N_Z は、(7.4.5) の$S(p)$のような気圧（高度）に対する強い依存性がなく、対流圏ではほぼ一定と考えて良い（例えば Holton and Hakim 2012, p.237）。このことにより、以下では N_Z を定数とする。(7.4.11) の右辺第 4 項の括弧内には気圧・高度に依存するρ_Zがまだ残っているが、p座標系の準地衡風渦位 (7.4.4) の右辺第 4 項の括弧内の係数$S(p)^{-1}$ がρ^2に比例していたことと比較すると、気圧依存性は小さくなっており、また (7.4.7) により気圧・高度依存の形が明示的になり、扱いやすくなっている。

準地衡風渦位方程式は、第 5 章で

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_g\frac{\partial}{\partial x} + v_g\frac{\partial}{\partial y}\right) q = 0$$

であったので、ここに (7.4.11) と (7.4.3) を使って

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left\{f_0+\beta y+\nabla_Z^2\psi+\frac{f_0^2}{\rho_Z}\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{\rho_Z}{N_Z^2}\frac{\partial\psi}{\partial Z}\right)\right\}=0 \tag{7.4.12}$$

が得られる。これが対数気圧座標系で表現された準地衡風渦位方程式である。さらに (7.4.7) を使うと

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left\{f_0+\beta y+\nabla_Z^2\psi+\frac{f_0^2}{N_Z^2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial Z^2}-\frac{1}{H}\frac{\partial\psi}{\partial Z}\right)\right\}=0 \tag{7.4.13}$$

となる。

これらに基づき、微小運動を仮定して内部ロスビー波の分散関係式を求める。基本場に一様な東西風が吹いている場合を考える。$\bar{u}$を定数として

$$\psi=-\bar{u}y+\psi' \tag{7.4.14}$$

を (7.4.13) に代入し、ψ'の 2 次の項を無視すると、微小擾乱の方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{\nabla_Z^2\psi'+\frac{f_0^2}{N_Z^2}\left(\frac{\partial^2\psi'}{\partial Z^2}-\frac{1}{H}\frac{\partial\psi'}{\partial Z}\right)\right\}+\beta\frac{\partial\psi'}{\partial x}=0 \tag{7.4.15}$$

が得られる。この式から Z による 1 階微分の項（$\partial\psi'/\partial Z$）を消去するための変数変換として、

$$\tilde{\psi}\equiv\psi'\exp\left(-\frac{Z}{2H}\right) \tag{7.4.16}$$

を与える。これはこの座標系での大気密度の鉛直分布 (7.4.7) を考慮したものでもある。すると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{\nabla_Z^2\tilde{\psi}+\frac{f_0^2}{N_Z^2}\left(\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial Z^2}-\frac{\tilde{\psi}}{4H^2}\right)\right\}+\beta\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}=0 \tag{7.4.17}$$

となる。これに 3 次元の単色平面波解

$$\tilde{\psi}=\hat{\psi}\exp\{i(kx+ly+mZ-\sigma t)\} \tag{7.4.18}$$

を代入すると、次の分散関係式が得られる。

$$\sigma=k\bar{u}-\frac{\beta k}{k^2+l^2+\frac{f_0^2}{N_Z^2}\left(m^2+\frac{1}{4H^2}\right)} \tag{7.4.19}$$

鉛直方向の波長を $\lambda_z=2\pi/m$ とすると、$\lambda_d=N_z/\left(f_0\sqrt{m^2+1/4H^2}\right)=N_z\lambda_z/\left(2\pi f_0\sqrt{1+\lambda_z^2/16\pi^2H^2}\right)$ をロスビーの（内部）変形半径と考えれば、(7.4.19) は第 7.3 節の浅水方程式におけるロスビー波の分散関係と似ていることがわかる。

またこの波動のx方向の位相速度は、

$$c_{px}=\frac{\sigma}{k}=\bar{u}-\frac{\beta}{k^2+l^2+\frac{f_0^2}{N_Z^2}\left(m^2+\frac{1}{4H^2}\right)} \tag{7.4.20}$$

であり、これまで見てきたものと同様、位相速度は基本場の流れに対して西向きに進む。

この (7.4.20) をmについて解くと、

$$m^2=\frac{N_Z^2}{f_0^2}\left[\frac{\beta}{\bar{u}-c_{px}}-(k^2+l^2)\right]-\frac{1}{4H^2} \tag{7.4.21}$$

である。波動が減衰せずに鉛直に伝播するには $m^2 > 0$ である必要があり、そのためには $k^2 + l^2$ がある程度小さいこと、すなわち水平波長がある程度大きい必要がある。このことは第 6 章の図 6.11 で示される。また $\bar{u} - c_{px} > 0$、すなわち波の位相が流れに対して西進する必要がある。しかし位相速度の西進が速すぎるなどで $\bar{u} - c_{px}$が大きすぎる場合も鉛直伝播不可能である。

対流圏の傾圧不安定擾乱（第 8 章）は対流圏では激しい波動ではあるが、基本場の西風$\bar{u}$が大きく、(7.4.21) 式で右辺第 1 項が小さくなるので、mが虚数になり波動は対流圏から成層圏へと鉛直伝播できない。対流圏から成層圏へ鉛直伝播して成層圏の流れを変えるのは、波長が長い（$k^2 + l^2$が小さい）惑星規模のプラネタリー波である。

西風のもとで内部ロスビー波が定常になる条件（$c_{px} = 0$）は、(7.4.20) より

$$\bar{u} = \frac{\beta}{k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{N_Z^2}\left(m^2 + \frac{1}{4H^2}\right)} \tag{7.4.22}$$

となり、この波が鉛直方向に伝播するためには、東西風速 $\bar{u}$ は、$m = 0$ の場合の値を$\overline{u_c}$として

$$0 < \bar{u} < \overline{u_c} \equiv \frac{\beta}{k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{4N_Z^2 H^2}} \tag{7.4.23}$$

という条件を満たさなければならない。これにより、波動が鉛直に伝播するのはある一定の西風の下であり、水平波長が小さい（波数が大きい）波動は鉛直方向には伝播しない。また基本場の風が東風（$\bar{u} < 0$）の場合は伝播しない。夏半球では成層圏では東風となるので、定常波は対流圏にトラップされ、成層圏へ鉛直方向に伝播しない。

定常内部ロスビー波の群速度は、(7.4.19) を微分し、$\bar{u}$ に (7.4.22) を与えると、

$$\boldsymbol{c}_g = \left(\frac{\partial\sigma}{\partial k}, \frac{\partial\sigma}{\partial l}, \frac{\partial\sigma}{\partial m}\right) = \frac{2\beta k}{\left[k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{N_Z^2}\left(m^2 + \frac{1}{4H^2}\right)\right]^2}\left(k, l, \frac{f_0^2}{N_Z^2}m\right) \tag{7.4.24}$$

が得られる。従って、波のエネルギーが伝播する方向は、水平面内では波数ベクトルの方向と一致または逆になるが、$f_0^2 \ll N_Z^2$ なので、鉛直面内では波数ベクトルよりもかなり水平に近くなる。また上向きに伝播するためには $km > 0$ でなければならない。

第 7 章の参考文献

Lighthill, M. J., 1966: Dynamics of rotating fluids: a survey, J. Fluid Mech., 26, 411-431.

松野太郎、島崎達夫、1981: 成層圏と中間圏の大気（大気科学講座 3）。東京大学出版会、279pp。

付録 7A ロスビー波の波束の伝播

図 7 A.1 の上段ではある日の 250hPa のジオポテンシャル高度を示している。そこでは 50°N 沿いに経度方向に約 50 度間隔でトラフが並んでいる（波列：wave train）。この日の前後の 250 hPa 南北風（40〜60°N の平均）の変化を、同じ図の下段に示している。東側に $v > 0$、西側に $v < 0$ となっている

ところはトラフであり、図中に A〜E で示したトラフは、個々には細矢印で示したようにゆっくり東進している。トラフ A は日本の北で発生し東進してあまり発達しないまま衰弱したが、その東側で新たにトラフ B が発生し東進し、さらにその東でトラフ C が発生して…と、個々のトラフの位相が東進するより速く波動が東に伝播している。これは第 6 章のはじめに述べた波束（wave packet）の群速度による伝播、すなわち波動のエネルギーの伝播を示している。トラフ C、D、E は特に強まっており、傾圧不安定（第 8 章）による波の成長もあったことが示唆される。

なお、この図のように横軸を何らかの空間座標、縦軸を時間軸として時間・空間変化を示す図を、ホフメラー図（Hovmöller diagram）と呼ぶ。

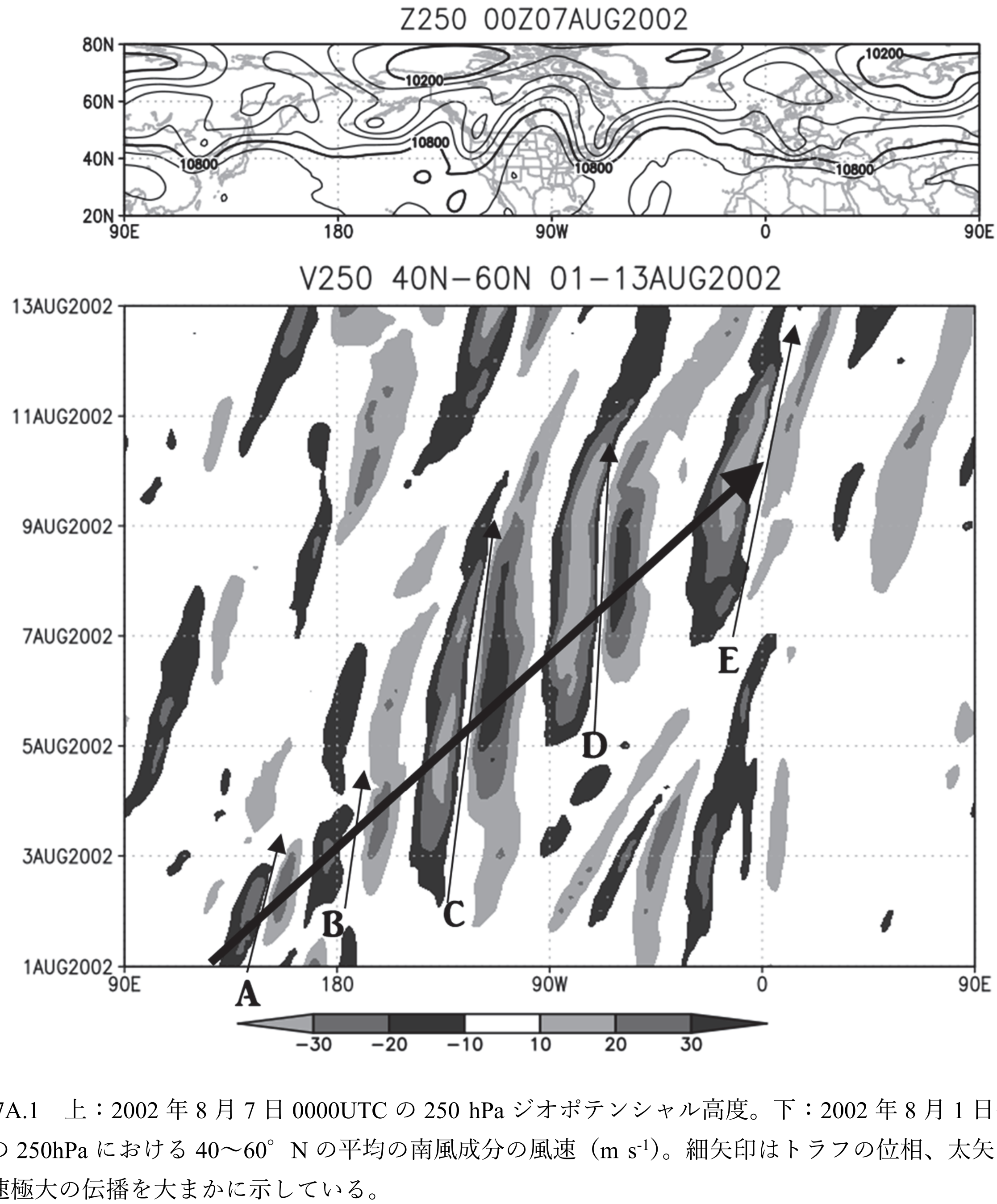


図 7A.1　上：2002 年 8 月 7 日 0000UTC の 250 hPa ジオポテンシャル高度。下：2002 年 8 月 1 日〜13 日の 250hPa における 40〜60° N の平均の南風成分の風速（m s^{-1}）。細矢印はトラフの位相、太矢印は風速極大の伝播を大まかに示している。

付録 7A の参考文献

Wirth, V., M. Riemer, E. K. M. Chang, and O. Martius, 2018: Rossby wave packets on the midlatitude waveguide—A review. Mon. Wea. Rev., 146, 1965–2001.

付録 7B　順圧渦位を用いたロスビー波の統一的理解

第 7.3.1 項では自由表面がある場合のロスビー波について浅水方程式系で説明していた。一方、第 4 章で、基本的なロスビー波を、浅水方程式系の順圧渦位保存則を用いて説明していた。渦位を

$$Q = \frac{f+\zeta}{h-h_B} \qquad (f = f_0 + \beta y) \tag{7B.1}$$

とすると、渦位保存則は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)Q = 0 \tag{7B.2}$$

である。これを用いて地形性ロスビー波も含めてロスビー波を統一的に理解することを目指す。

まず、基本場は静止状態で、$\bar{u} = \bar{v} = 0$、$\bar{h} = H$（定数）とすると、基本場の渦位は

$$\bar{Q} = \frac{f}{H-h_B} \tag{7B.3}$$

となる。以後、簡単のために、南北に傾斜のある底面 $h_B = h_B(y)$ とする。fもyのみの関数なので、$\bar{Q}$もyのみの関数である。

次に、微小擾乱の方程式を導く。

$$u = u',\ v = v',\ h = H + h',\ Q = \bar{Q}(y) + Q' \tag{7B.4}$$

を (7B.2) に代入して微小量の 2 次の項を無視すると、

$$\frac{\partial Q'}{\partial t} + v'\frac{d\bar{Q}}{dy} = 0 \tag{7B.5}$$

が得られる。擾乱の渦位 Q' は、(7B.1) (7B.3) (7B.4) を用い、$h' \ll H - h_B$ とすると

$$Q' = \frac{f+\zeta'}{(H-h_B)+h'} - \bar{Q} \approx \frac{1}{H-h_B}\left(\zeta' - \frac{f}{H-h_B}h'\right) \tag{7B.6}$$

と表せる。ここで、$\zeta' = \partial v'/\partial x - \partial u'/\partial y$ である。さらに、$|\beta y| \ll f_0$, $|h_B| \ll H$ と仮定すれば、

$$Q' \approx \frac{1}{H}\left(\zeta' - \frac{f_0}{H}h'\right) \tag{7B.7}$$

のように近似できるので、これを (7B.5) に代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\zeta' - \frac{f_0}{H}h'\right) + H\frac{d\bar{Q}}{dy}v' = 0 \tag{7B.8}$$

となる。さらに地衡風平衡を仮定すると、

$$v' = \frac{g}{f_0}\frac{\partial h'}{\partial x}, \qquad \zeta' = \frac{g}{f_0}\nabla_H^2 h' \tag{7B.9}$$

と表されるので、これらを (7B.8) に代入すれば、次のh'に関する方程式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla_H^2 h' - \frac{f_0^2}{gH}h'\right) + H\frac{d\bar{Q}}{dy}\frac{\partial h'}{\partial x} = 0 \tag{7B.10}$$

ここでは簡単のため基本場の渦位の南北傾度 $d\bar{Q}/dy$ が一定とすれば、単色平面波解

$$h' = \hat{h}\exp\{i(kx + ly - \sigma t)\} \tag{7B.11}$$

を代入することによって、次のような分散関係式が得られる。

$$\sigma = -\frac{H(d\bar{Q}/dy)k}{k^2 + l^2 + (f_0^2/gH)} \tag{7B.12}$$

この式から、基本場の渦位の南北傾度がこの種の波動に関係することがわかる。(7B.3) から

$$H\frac{d\bar{Q}}{dy} = \frac{\beta H}{H - h_B} + \frac{fH}{(H - h_B)^2}\frac{dh_B}{dy} \approx \beta + \frac{f_0}{H}\frac{dh_B}{dy} \tag{7B.13}$$

を得てこれを (7B.12) に代入すると、第 7.3.1 項で求めたのと同じ分散関係式が得られる。ここから、コリオリパラメータの緯度依存性βと、底面地形の南北傾度が共にロスビー波の発生に関係すること、すなわち、底面地形が北ほど高い領域ではβ効果と同様に西進ロスビー波が生じうることがわかる。

なお、底面地形に関しては、南北方向に限定されず、底面地形に傾斜があるときは、底面地形の高いほうを右手に見るようにロスビー波が進行する　と一般化できる。同じメカニズムによる波が、海洋においては陸棚波（continental shelf wave）として知られ、異常潮位の要因の一つとされている。

付録 7C　準地衡風渦位を用いたロスビー波の一般化

第 7.3 節と付録 7B では、浅水方程式系で、β効果によるロスビー波と、底面地形によるロスビー波について論じ、基本場の渦位の勾配が波動の伝播にかかわることが示唆された。ここでは鉛直成層のない場合に準地衡風渦位を用いて、基本場の流れの水平シアーによる渦位勾配がある場合について検討する。鉛直方向には一様として、地衡風（非発散）を流線関数ψで表した場合の準地衡風渦位（β平面近似）と準地衡風渦位方程式（第 5 章参照）を、

$$q \equiv f_0 + \beta y + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \tag{7C.1}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)q = 0 \tag{7C.2}$$

のように書く（地衡風の添え字gは省略）。基本場として、時間変化せず、東西方向には一様で南北にシアーのある東西風 $\bar{u}(y)$ を仮定し、その中を伝播する波動を考える。流線関数を

$$\psi(x, y, t) = \bar{\psi}(y) + \psi'(x, y, t)$$

とすれば、まず基本場$\bar{\psi}$については

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} = -\bar{u}(y), \qquad \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} = \bar{v} = 0 \tag{7C.3}$$

が成り立つ。また基本場の渦位に関しては

$$\bar{q} = f_0 + \beta y - \frac{d\bar{u}}{dy} \tag{7C.4}$$

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial x} = 0 \tag{7C.5}$$

$$\frac{d\bar{q}}{dy} = \beta - \frac{d^2\bar{u}}{dy^2} \tag{7C.6}$$

が成り立つ。このとき基本場の渦位$\bar{q}$は時間変化せず、次の形の渦位方程式を満たす。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial}{\partial y}\right)\bar{q} = 0$$

一方、擾乱の渦位は

$$q' = \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2} \tag{7C.7}$$

で与えられる。準地衡風渦位方程式における線形化された擾乱の方程式の一般形は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial}{\partial y}\right)q' + u'\frac{\partial \bar{q}}{\partial x} + v'\frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = 0 \tag{7C.8}$$

だが、今の場合、$\bar{v} = 0,\ \partial\bar{q}/\partial x = 0$ なので、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)q' + v'\frac{d\bar{q}}{dy} = 0$$

すなわち

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2}\right] + \frac{d\bar{q}}{dy}\frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0 \tag{7C.9}$$

である。この方程式の解として、2 次元伝播する単色平面波解

$$\psi' = \hat{\psi}\exp\{i(kx + ly - \sigma t)\} \tag{7C.10}$$

を仮定すれば、分散関係とx方向の位相速度として

$$\sigma = k\bar{u} - \left(\frac{k}{k^2 + l^2}\right)\frac{d\bar{q}}{dy} \tag{7C.11}$$

$$c_{px} = \bar{u} - (k^2 + l^2)^{-1}\frac{d\bar{q}}{dy} \tag{7C.12}$$

が得られる。第 7 章ではβ効果を復元力としてロスビー波を説明していたが、基本場の準地衡風渦位の勾配 $d\bar{q}/dy$ (7C.6) に関連する波動として一般化できることがわかる。この基本場の渦位の水平勾配は第 8 章の傾圧不安定や順圧不安定にも関係する。

【問題】　基本場の西風が、 $y = 0$ に風速極大のある y の 2 次式

$$\bar{u}(y) = U\left(1 - \frac{y^2}{2\Delta y^2}\right)\ ,\ \ \bar{v} = 0$$

で表されるとき（UとΔyは定数)、そこで生じる微小擾乱の分散関係と位相速度を求めよ。

【問題】この付録 7C で行っている非発散の場合の扱いは、準地衡風渦位を

$$q \equiv f_0 + \beta y + \nabla_H^2 \psi - \frac{\psi}{\lambda_d^2}$$

と定義し（これは浅水方程式系の準地衡風渦位である。Vallis (2006), p.209 参照)、準地衡風渦位保存則 (7C.2) に代入して $\lambda_d \to \infty$ とした場合に対応する。静止基本場において、λ_dが有限の値を取る場合に、発散がある場合の分散関係 (7.3.10) と同様の関係が得られることを確かめよ。

付録 7D　密度成層のある大気中の波動と浅水方程式系の波動の関係

第 6 章では密度成層のある大気中の波動を扱い、第 7 章の第 7.3 節までは簡単化して浅水方程式系で等密度大気における波動を扱い、さらに第 7.4 節で再び密度成層のある大気中の波動を扱っていた。浅水方程式における波動と密度成層のある大気中の波動の関係について、ここでは第 7.4 節でも用いた対数気圧座標系でプリミティブ方程式系を用いて考察しておく。

対数気圧座標系の鉛直座標は

$$Z \equiv -H \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) \ , \qquad H = \frac{RT_0}{g} \tag{7D.1}$$

で表され、断熱で摩擦のない場合の運動方程式、連続の式、熱力学方程式は以下のように表される（付録 2B)。

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} + f\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{V} = -\nabla_Z \Phi \tag{7D.2a}$$

$$\nabla_Z \cdot \boldsymbol{V} + \frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial Z}(pW) = 0 \tag{7D.2b}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{V} \cdot \nabla_Z\right)\frac{\partial \Phi}{\partial Z} + N_Z^2 W = 0 \tag{7D.2c}$$

ただし、鉛直速度

$$W \equiv \frac{dZ}{dt} = -H\left(\frac{1}{p}\frac{dp}{dt}\right) = -\frac{H}{p}\omega \tag{7D.3}$$

及び対数気圧座標系のブラント・バイサラ振動数

$$N_Z^2 = \frac{R}{H}\left(\frac{\partial T}{\partial Z} + \frac{R}{C_p H}T\right) = \frac{R}{H}\left(\frac{\partial T}{\partial Z} + \frac{g}{C_p}\frac{T}{T_0}\right) = \left(\frac{T}{T_0}\right)^2 g\frac{\Gamma_d - \Gamma}{T} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^2 N^2 \tag{7D.4}$$

を用いている。Nは通常のz座標系のブラント・バイサラ振動数である。

ここでは基本場として、水平・鉛直方向にシアーのない一様な東西風$\bar{u}$を持つ大気を仮定して、線形化した微小擾乱の方程式を導く。水平風ベクトル $\boldsymbol{V}$と鉛直風Wをそれぞれ基本場と微小擾乱成分に分けて、$\boldsymbol{V} = \overline{\boldsymbol{V}} + \boldsymbol{V}'$、$W = \overline{W} + W'$と書く。ただし $\overline{\boldsymbol{V}} = (\bar{u}, 0, 0)$、$\boldsymbol{V}' = (u', v', 0)$、$\overline{W} = 0$ とする。またZ面

上の平均的な温度をZのみの関数$\tilde{T}$と表し、それに対応するジオポテンシャルの成分を $\partial\tilde{\Phi}(Z)/\partial Z = R\tilde{T}/H$ とすれば、$\Phi = \tilde{\Phi}(Z) - f\bar{u}y + \Phi'$ と書ける。すると、(7D.2a-c) は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overline{\boldsymbol{V}}\cdot\nabla_Z\right)\boldsymbol{V}' + f\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{V}' = -\nabla_Z\Phi' \tag{7D.5a}$$

$$\nabla_Z\cdot\boldsymbol{V}' + \frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial Z}(pW') = 0 \tag{7D.5b}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overline{\boldsymbol{V}}\cdot\nabla_Z\right)\frac{\partial\Phi'}{\partial Z} + N_Z^2 W' = 0 \tag{7D.5c}$$

ここではN_Z^2も$\tilde{T}$に対応するブラント・バイサラ振動数で、Zのみの関数である。

これらの方程式系から、水平方向と鉛直方向の変数分離を試みる。まず (7D.5c) をW'について解き

$$W' = -\frac{1}{N_Z^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overline{\boldsymbol{V}}\cdot\nabla_Z\right)\frac{\partial\Phi'}{\partial Z} \tag{7D.6}$$

これを (7D.5b) に代入すると、

$$\nabla_Z\cdot\boldsymbol{V}' + \frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial Z}\left[-\frac{p}{N_Z^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overline{\boldsymbol{V}}\cdot\nabla_Z\right)\frac{\partial\Phi'}{\partial Z}\right] = 0 \tag{7D.7}$$

が得られる。ここで、

$$\boldsymbol{V}'(x,y,Z,t) = \widehat{\boldsymbol{V}}(x,y,t)\chi(Z)\,, \qquad \Phi'(x,y,Z,t) = \widehat{\Phi}(x,y,t)\chi(Z) \tag{7D.8}$$

とおくと、(7D.7) は

$$\chi(Z)\nabla_Z\cdot\widehat{\boldsymbol{V}} + \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overline{\boldsymbol{V}}\cdot\nabla_Z\right)\widehat{\Phi}\right]\left[\frac{1}{p}\frac{d}{dZ}\left(-\frac{p}{N_Z^2}\frac{d\chi(Z)}{dZ}\right)\right] = 0 \tag{7D.9}$$

を経て

$$\frac{\nabla_Z\cdot\widehat{\boldsymbol{V}}}{\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overline{\boldsymbol{V}}\cdot\nabla_Z\right)\widehat{\Phi}} = \frac{\frac{1}{p}\frac{d}{dZ}\left(\frac{p}{N_Z^2}\frac{d\chi(Z)}{dZ}\right)}{\chi(Z)} = -\frac{1}{gh} \tag{7D.10}$$

と変形できる。ここでhは長さの次元を持つ定数で、このように置いた理由は後述する。ここから、Zに依存する部分

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dZ}\left(\frac{p}{N_Z^2}\frac{d\chi(Z)}{dZ}\right) = -\frac{\chi(Z)}{gh} \tag{7D.11}$$

と、Zに依存しない部分（水平方向）

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overline{\boldsymbol{V}}\cdot\nabla_Z\right)\widehat{\Phi} + gh\nabla_Z\cdot\widehat{\boldsymbol{V}} = 0 \tag{7D.12}$$

とに分離できる。同様に (7D.5a) を分離すると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overline{\boldsymbol{V}}\cdot\nabla_Z\right)\widehat{\boldsymbol{V}} + f\boldsymbol{k}\times\widehat{\boldsymbol{V}} = -\nabla_Z\widehat{\Phi} \tag{7D.13}$$

が得られる。ただし、このように変数分離できたのは基本場の風がZに依存しない定数であったからで、一般に風速に鉛直シアーがあればこのような分離はできないことに注意が必要である。なお、このと

き鉛直速度は (7D.6) により

$$W' = \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{\boldsymbol{V}} \cdot \nabla_Z\right)\hat{\Phi}\right]\left[-\frac{1}{N_Z^2}\frac{d\chi(Z)}{dZ}\right] \tag{7D.14}$$

のように、x, y, t だけの関数とZだけの関数の積の形に分離できる。

従って、密度成層大気中の長波長の波動の構造は、基本場の風$\bar{u}$に鉛直シアーがなく、安定度が高度だけに依存する場合には、鉛直方向については(7D.11)、水平方向については (7D.12) (7D.13) で決定できることがわかる。前者を**鉛直構造方程式**（vertical structure equation）、後者を**水平構造方程式**（horizontal structure equations）という。

ここで得られた水平構造方程式は、深さhの浅水方程式と同じ形なので、鉛直構造方程式と水平構造方程式を分離する際に導入した分離定数 h を**等価深度**（equivalent depth）と呼ぶ。鉛直構造方程式から等価深度hが決まれば、密度成層大気における長波長の波動の水平構造については、既に示した浅水方程式系の線形波動の解がそのまま適用できることになる。

以下では簡単のため、N_Zが一定の場合について、鉛直構造方程式を解いてみる。この場合の鉛直構造方程式は

$$\frac{d^2\chi}{dZ^2} - \frac{1}{H_0}\frac{d\chi}{dZ} + \frac{N_Z^2}{gh}\chi = 0 \tag{7D.15}$$

となる。ただしあとの便宜のために、スケールハイトHをH_0としている。ここで、

$$\chi(Z) = \exp\left(\frac{Z}{2H_0}\right)\tilde{\chi}(Z) \tag{7D.16}$$

とおくと、Z の 1 階微分がなくなり、

$$\left(\frac{d^2}{dZ^2} + \frac{N_Z^2}{gh} - \frac{1}{4H_0^2}\right)\tilde{\chi}(Z) = 0 \tag{7D.17}$$

となる。この解として、振動型の$\tilde{\chi}(Z) = \hat{\chi}e^{imZ}$ を仮定すると、鉛直波数mは、

$$m^2 = \frac{N_Z^2}{gh} - \frac{1}{4H_0^2} \tag{7D.18}$$

を満たさなければならない。この式より、等価深度hの値によって、以下のように場合分けされる。

- $0 < h < 4H_0^2N_Z^2/g$ のとき、m は実数で、波動は鉛直伝播可能（すなわち内部波）
- $h < 0$ または $h > 4H_0^2N_Z^2/g$ のとき、m は虚数で、鉛直方向には指数関数的に減衰（外部波）

等価深度 h は (7D.18) により鉛直波数 m を使って

$$gh = \frac{N_Z^2}{m^2 + \frac{1}{4H_0^2}} \tag{7D.19}$$

と表せるから、これを浅水方程式系の慣性重力波の分散関係式の gH に代入すると、

$$\sigma^2 = f_0^2 + gH(k^2 + l^2) = f_0^2 + \frac{N_Z^2(k^2 + l^2)}{m^2 + \frac{1}{4H_0^2}} \tag{7D.20}$$

となる。これが**密度成層を考慮した場合の内部波としての慣性重力波の分散関係（振動数）**である。これで $l = 0$ とした式を、付録 6A.1 の等温静止大気で静力学近似した場合の内部重力波の振動数

$$\sigma^2 = \frac{N^2k^2 + f^2(m^2 + \sigma_a^2/c_s^2)}{m^2 + \sigma_a^2/c_s^2}\ , \qquad \sigma_a^2 \equiv \frac{c_s^2}{4H_0^2}$$

と比較すると、同じ式であることがわかる。

同様に、β効果によるロスビー波の分散関係式 (7.3.10) の λ_d に含まれる gH に (7D.19) を代入すると、内部ロスビー波の振動数として

$$\sigma = -\frac{\beta k}{k^2 + l^2 + f_0^2/gH} = -\frac{\beta k}{k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{N_Z^2}\left(m^2 + \frac{1}{4H_0^2}\right)} \tag{7D.21}$$

が得られる。

第 7.3.1 項で挙げた例では、深さ 8 km の等密度大気（自由表面あり）において波長 6300 km の慣性重力波とロスビー波の周期がそれぞれ 5.8 時間と 5 日であった。一方、密度成層のある例として、第 6.4 節で議論した T =256 K の等温大気を考えよう（現実大気と比較して安定度が大きい点には留意すること）。そこではスケールハイトは$H_0 = RT/g$〜7.5 km で、z座標系のブラント・バイサラ振動数が $N^2 = (2/7)(g/H_0)$ であった（第 6.4 節の【問題】参照）。また等温大気では $N_z = N$ である。この等温大気の条件を使うと、鉛直波数 $m = 0$ （鉛直伝播しない）のときの等価深度 h は (7D.18) より $h = 4H_0^2N^2/g = 8H_0/7$〜8.6 km である。$m > 0$ の内部波に対しては等価深度はさらに小さくなり、(7D.20) (7D.21) より慣性重力波や内部ロスビー波の振動数も小さくなる（周期が長くなる）はずである。これらのことから、密度成層のある場合の波動は、鉛直方向の波数mが大きい（波長が小さい）ものほど、等密度大気中の波動と比較して振動数が小さくなる（周期が長くなる）と考えられる。

第 8 章　流れの力学的不安定

第 6 章と第 7 章で、大気中に存在する様々な波動について、いろいろな仮定の下で調べてきたが、それらの波動はすべて中立的なものであった。すなわち、それらの波動の振幅は、摩擦等の影響を無視すると、時間的に減衰も増大もしないものであった。例えば現実大気中の総観規模〜惑星規模のトラフ・リッジは第 7 章のロスビー波の考え方でよく説明できる側面があるが、水平に伝播する波動の振幅増大は説明されていない。波動を $\exp\{i(kx+ly+mz-\sigma t)\}$ のように複素表示した場合に、その振動数が複素数 $\sigma=\sigma_r+i\sigma_i$ をとると、

$$\exp\{i(kx+ly+mz-\sigma t)\}=\exp(\sigma_i t)\times\exp\{i(kx+ly+mz-\sigma_r t)\}$$

となり、$\sigma_i>0$ であれば波動の振幅は時間とともに指数関数的に増大する。このような状況が起こるとき、その波動は（力学的に）不安定であるといわれる。どのような基本場の状態で微小擾乱の振幅が増大するかの観点で大気の不安定性を調べることを、**ノーマルモード法**（normal modes method）という。

本章では最初に、流体力学的不安定問題への導入として、密度の異なる 2 層の流体の境界に生じる波の不安定性（ケルビン・ヘルムホルツ不安定）の問題を扱う。次に、準地衡風方程式系の 2 層モデルを用いて、傾圧不安定の問題を具体的に解くことで不安定波動の構造を求め、さらにエネルギー収支について考察する。傾圧不安定の必要条件に関しては、一般の流体力学において不安定の起こる必要条件として良く知られているレイリーの変曲点定理を拡張したものを交えながら紹介する。そこでは順圧不安定の議論も行う。最後に、鉛直方向を連続的に扱って傾圧不安定波の構造を議論する Eady 問題を取り上げる。なお、この章では擾乱は微小振幅であることを仮定して線形化しているが、有限振幅の場合、すなわち不安定により擾乱の振幅が増大する場合は、非線形効果によりこの章での説明は適用できなくなることには、留意が必要である。

8.1　ケルビン・ヘルムホルツ不安定（力学的不安定への導入として）

ある流れの安定性を調べるとき、その流れを基本場として、それに微小な任意の擾乱を加えた時に、擾乱の振幅が時間とともに増大する場合に、その流れは不安定であると言う。ここでは、流体力学的な流れの不安定の一つの例として、密度と流速の異なる 2 層の非圧縮流体の安定性について考える。

図 8.1 のように 2 つの非圧縮流体が $z=0$ を境にして存在する場合を考える。それぞれの流体の密度は ρ_1,ρ_2 で一定であり、それぞれが一定の速さ $\bar{u}_1,\bar{u}_2$ でx軸の正の向きに流れているものとする。地球の自転を無視し、運動はy方向に一様とすれば、$j=1,2$ に対して流体の方程式系は次のようになる。ただしここでは、総観規模より小さい現象が想定されていることにより、プリミティブ方程式系ではなく、コリオリ項もないことに注意していただきたい。（第 6 章で内部重力波を扱った際の方程式系と比較すること。）

$$\frac{\partial u_j}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_j}{\partial x}+w_j\frac{\partial u_j}{\partial z}=-\frac{1}{\rho_j}\frac{\partial p_j}{\partial x} \tag{8.1.1a}$$

$$\frac{\partial w_j}{\partial t}+u_j\frac{\partial w_j}{\partial x}+w_j\frac{\partial w_j}{\partial z}=-\left(\frac{1}{\rho_j}\frac{\partial p_j}{\partial z}+g\right) \tag{8.1.1b}$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x}+\frac{\partial w_j}{\partial z}=0 \tag{8.1.1c}$$

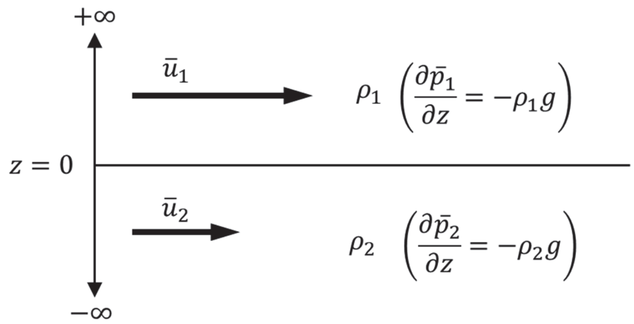


図 8.1　$z=0$ を境界として接する、密度と流速の異なる 2 層の流体。（栗原 1979 に基づき作成）

第 6 章・第 7 章の波動の場合と同様に、流れを基本場と微小擾乱に分解する。

$$u_j=\bar{u}_j+u_j',\quad w_j=w_j',\quad p_j=\bar{p}_j+p_j' \tag{8.1.2}$$

このとき (8.1.1b) から

$$\bar{p}_j(z)=p_0-\rho_j g z \tag{8.1.3}$$

が成り立つ。ここで p_0 は $z=0$ における基本場の気圧であり、気圧はzの連続関数になっている。一方、それぞれの層における微小振幅擾乱の方程式は

$$\frac{\partial u_j'}{\partial t}+\bar{u}_j\frac{\partial u_j'}{\partial x}=-\frac{1}{\rho_j}\frac{\partial p_j'}{\partial x} \tag{8.1.4a}$$

$$\frac{\partial w_j'}{\partial t}+\bar{u}_j\frac{\partial w_j'}{\partial x}=-\frac{1}{\rho_j}\frac{\partial p_j'}{\partial z} \tag{8.1.4b}$$

$$\frac{\partial u_j'}{\partial x}+\frac{\partial w_j'}{\partial z}=0 \tag{8.1.4c}$$

で与えられる。それぞれの層の微小擾乱がx軸方向に伝播する波動であるとして、$j=1,2$ に対して

$$\begin{pmatrix} u_j' \\ w_j' \\ p_j'/\rho_j \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} U_j(z) \\ W_j(z) \\ P_j(z) \end{pmatrix}\exp\{ik(x-ct)\} \tag{8.1.5}$$

と表されるものとする。位相速度cに虚部があれば、$c=c_r+ic_i$ として

$$\exp\{ik(x-ct)\}=\exp(kc_i t)\times\exp\{ik(x-c_r t)\} \tag{8.1.6}$$

となる。$kc_i>0$ なら微小擾乱の振幅が時間とともに指数関数的に増幅するので、流れは不安定であると言える。以下では波動の分散関係式を求めた際と同様に、非自明解が存在する条件からcを求める。

まず、(8.1.5) を (8.1.4a-c) に代入すると

$$ik\left(\bar{u}_j-c\right)U_j=-ikP_j \tag{8.1.7a}$$

$$ik(\bar{u}_j - c)W_j = -\frac{dP_j}{dz} \tag{8.1.7b}$$

$$ikU_j + \frac{dW_j}{dz} = 0 \tag{8.1.7c}$$

となる。これらからU_jとP_jを消去すると

$$\frac{d^2W_j}{dz^2} = k^2W_j \tag{8.1.8}$$

が得られる。この微分方程式を、$z \to \infty$ でW_1が、$z \to -\infty$ でW_2が、それぞれ発散しないという境界条件の下で解く（この場合の$\pm\infty$は、大気上端等ではなく、シアーのある高度から十分離れた高度であることを意味する）。すると

$$W_1(z) = A_1 e^{-kz}, \qquad W_2(z) = A_2 e^{kz} \tag{8.1.9}$$

となる。ただし、$k > 0$ としている。この解を用いれば、U_jとP_jは

$$U_1(z) = -iA_1 e^{-kz}, \qquad U_2(z) = iA_2 e^{kz} \tag{8.1.10a}$$

$$P_1(z) = -i(c - \bar{u}_1)A_1 e^{-kz}, \qquad P_2(z) = i(c - \bar{u}_2)A_2 e^{kz} \tag{8.1.10b}$$

と表される。

2 つの流体層の境界面は初期には $z = 0$ だが、微小擾乱が生じるとこの境界面も波動となる。その鉛直座標を $z = h'$ とすると、そこでは気圧が連続でなければならない。すなわち

$$\bar{p}_1(h') + p'_1(x, h', t) = \bar{p}_2(h') + p'_2(x, h', t) \tag{8.1.11}$$

が成り立つ。これの左辺・右辺第 1 項それぞれに (8.1.3) を代入し、また左辺・右辺第 2 項に関してはp'_jとh'が微小であることを用いると、(8.1.11) 式は次のように書き替えられる。

$$-\rho_1 g h' + p'_1(x, 0, t) = -\rho_2 g h' + p'_2(x, 0, t) \tag{8.1.12}$$

そこで、(8.1.5) と同様に

$$h' = H\exp\{ik(x - ct)\} \tag{8.1.13}$$

と表し、(8.1.5) (8.1.10b) (8.1.13) を (8.1.12) に代入すれば

$$-\rho_1 gH - i\rho_1(c - \bar{u}_1)A_1 = -\rho_2 gH + i\rho_2(c - \bar{u}_2)A_2 \tag{8.1.14}$$

が得られる。一方、$w'_j(h')$ は h' の時間微分であることを考慮すると、

$$w'_j(h') = \frac{dh'}{dt} = \frac{\partial h'}{\partial t} + \bar{u}_j\frac{\partial h'}{\partial x} \tag{8.1.15}$$

が成り立つので、(8.1.5) と (8.1.13) を代入し、またw'_j、h'が微小であることを用いると

$$W_j(0) = ik(\bar{u}_j - c)H \tag{8.1.16}$$

さらに (8.1.9) を代入すれば

$$A_1 = ik(\bar{u}_1 - c)H, \quad A_2 = ik(\bar{u}_2 - c)H \tag{8.1.17a, b}$$

が得られる。

A_1, A_2, Hに関する代数方程式 (8.1.14) と (8.1.17a, b) が非自明解を持つ条件は

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -ik(\bar{u}_1 - c) \\ 0 & 1 & -ik(\bar{u}_2 - c) \\ i\rho_1(c - \bar{u}_1) & i\rho_2(c - \bar{u}_2) & (\rho_1 - \rho_2)g \end{vmatrix} = 0 \tag{8.1.18}$$

で与えられる。行列式を計算すると

$$(\rho_1 + \rho_2)c^2 - 2(\rho_1\bar{u}_1 + \rho_2\bar{u}_2)c + (\rho_1 - \rho_2)\frac{g}{k} + (\rho_1\bar{u}_1^2 + \rho_2\bar{u}_2^2) = 0 \tag{8.1.19}$$

となるので、これを解くと

$$c = \frac{\rho_1\bar{u}_1 + \rho_2\bar{u}_2}{\rho_1 + \rho_2} \pm \sqrt{-\left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}\right)\frac{g}{k} - \frac{\rho_1\rho_2(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2}} \tag{8.1.20}$$

が得られる。

(8.1.20) 式の右辺の根号の中が負になると、位相速度cは虚部を持つ。虚部の符号が正の場合には振幅が時間とともに増大し、流れが不安定になる。

(8.1.20) の右辺の根号の中が負になる場合について、$k > 0$ に注意して考察すると、以下のようになる。

（1）$\rho_1 > \rho_2$ の場合（上層が密度大）

波数によらずすべての波が不安定である。$\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = 0$ の場合をレイリー・テイラー不安定（Rayleigh-Taylor instability）という。

（2）$\rho_1 = \rho_2,\ \bar{u}_1 \neq \bar{u}_2$　の場合（密度一様で鉛直シアーあり）

波数によらずすべての波が不安定である。シアー不安定。

（3）$\rho_1 < \rho_2,\ \bar{u}_1 \neq \bar{u}_2$　の場合（下層の密度が大きく安定成層だが鉛直シアーあり）

波数$k > k_c$ の波だけが不安定である。これを**ケルビン・ヘルムホルツ不安定**（Kelvin-Helmholtz instability）という。

臨界波数　$k_c \equiv [(\rho_2 - \rho_1)(\rho_1 + \rho_2)g]/[\rho_1\rho_2(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)^2]$　(8.1.21)

【事例】ケルビン・ヘルムホルツ不安定によると思われる波状雲はしばしば観測される（例えば Takayabu 1992）。これは総観規模現象よりはるかに小さい不安定波動である。

8.2 2 層モデルにおける傾圧不安定

第 4 章では渦度方程式において傾圧性により渦度が増大すること、また第 5 章では温度移流により鉛直運動や高度場の変化が生じることを説明した。これらから、傾圧大気において不安定波動が生じることが示唆される。ここでは簡単なモデルとして、大気を鉛直方向に 2 層に分け、それぞれの層について基本場を設定することにより、鉛直シアーのある基本流の中の線形波動として表現し、それが不安定となる条件と、その際の波動の構造について考察する。

8.2.1　2 層モデル

傾圧大気中の運動を表すため、ここでは中緯度のβ平面上における準地衡風方程式系を用いる。準地衡風渦度方程式と熱力学方程式は、第 5 章で

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)\zeta+\beta v-f_0\frac{\partial\omega}{\partial p}=0 \tag{8.2.1a}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial p}+S(p)\omega=0 \tag{8.2.1b}$$

であった。ここでは地衡風を表す添え字gは省略している。地衡風は非発散であるから、流線関数 $\psi=\Phi/f_0$ を用いて

$$u=-\frac{\partial\psi}{\partial y},\qquad v=\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad \zeta=\nabla_p^2\psi \tag{8.2.2}$$

と書けるので、これを用いて (8.2.1a,b) を書き直すと、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla_p^2\psi+\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}=f_0\frac{\partial\omega}{\partial p} \tag{8.2.3a}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial\psi}{\partial p}+\frac{S(p)}{f_0}\omega=0 \tag{8.2.3b}$$

となる。これらにはωとψの鉛直微分が含まれている。ここでは単純化として、大気を$\Delta p=$ 500 hPa ごとの 2 層に分けたモデル（図 8.2）を考え、方程式の鉛直微分を差分で表す。

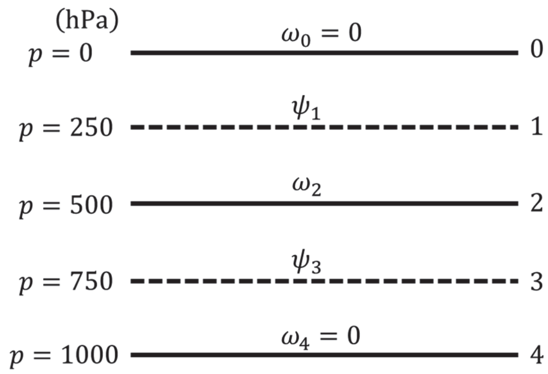


図 8.2　大気の 2 層モデルと、各レベルに割り振られた変数。

図のように、2 つの層のうち、上側の層の中心 $p=$ 250 hPa をレベル 1、下側の層の中心 $p=$750 hPa をレベル 3 とし、2 つの層の境界 $p=0$、500、1000 hPa をそれぞれレベル 0、2、4 としておく。ここで、準地衡風渦度方程式 (8.2.3a) をレベル 1, 3 で考え、熱力学方程式 (8.2.3b) をレベル 2 で考えることにする。そのためには変数ψとωを図 8.2 のように割り振り、レベル 1, 3 での $\partial\omega/\partial p$ は

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial p}\right)_1\cong\frac{\omega_2-\omega_0}{\Delta p}=\frac{\omega_2}{\Delta p},\qquad\left(\frac{\partial\omega}{\partial p}\right)_3\cong\frac{\omega_4-\omega_2}{\Delta p}=-\frac{\omega_2}{\Delta p}$$

で置き換え、レベル 2 での $\partial\psi/\partial p$ は

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)_2 \cong \frac{\psi_3-\psi_1}{\Delta p}$$

で置き換えることで、鉛直微分を鉛直差分で表現する。ただし、レベル 0、4 において、境界条件 $\omega_0 = \omega_4 = 0$ を与えている。また流線関数ψはレベル 2 では定義されていないので、$\psi_2 = (\psi_1+\psi_3)/2$ により近似的に表現する。こうすると上の方程式系は、レベル 1，3 のψとレベル 2 のωのみを用いて、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla_p^2\psi_1+\beta\frac{\partial\psi_1}{\partial x}=\frac{f_0}{\Delta p}\omega_2 \tag{8.2.4a}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial\psi_3}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial\psi_3}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla_p^2\psi_3+\beta\frac{\partial\psi_3}{\partial x}=-\frac{f_0}{\Delta p}\omega_2 \tag{8.2.4b}$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+\frac{\partial\psi_3}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial y}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial y}+\frac{\partial\psi_3}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial x}\right\}\frac{\psi_1-\psi_3}{\Delta p}=\frac{S}{f_0}\omega_2 \tag{8.2.4c}$$

と表すことができる。これらはψ_1、ψ_3、ω_2に関する閉じた方程式系を構成する。(8.2.3b) 式中の$S(p)$は気圧依存性を持った静的安定度で、(8.2.4c) ではそのレベル 2 の値として改めてSと置いている。

8.2.2 線形化された擾乱の方程式

基本場として、レベル 1，3 のそれぞれにおいて、時間に依存しない一様な東西風U_1、U_3がある場を考える。そのためには基本場の流線関数として

$$\overline{\psi_1}(y) = -U_1 y、\overline{\psi_3}(y) = -U_3 y$$

を与えれば良い。このとき、

$$\frac{\partial\overline{\psi_1}}{\partial x}=\frac{\partial\overline{\psi_3}}{\partial x}=0,\quad \nabla_p^2\overline{\psi_1}=\frac{\partial^2\overline{\psi_1}}{\partial y^2}=0,\quad \nabla_p^2\overline{\psi_3}=\frac{\partial^2\overline{\psi_3}}{\partial y^2}=0$$

なので、方程式系 (8.2.4a-c) を満たす基本場の条件から、$\overline{\omega_2}=0$ となる。この基本場の下で、$\psi=\bar\psi+\psi'$ 等のように基本場と擾乱に分割する。簡単のため、ψ' としてはyに依存しない解（すなわち $u' = -\partial\psi'/\partial y = 0$ である解。擾乱の水平風としては南北成分のみ生じる）を求めることにし、(8.2.4a-c) を線形化すると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_1\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^2{\psi'}_1}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial{\psi'}_1}{\partial x}=\frac{f_0}{\Delta p}{\omega'}_2 \tag{8.2.5a}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_3\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^2{\psi'}_3}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial{\psi'}_3}{\partial x}=-\frac{f_0}{\Delta p}{\omega'}_2 \tag{8.2.5b}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{U_1+U_3}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{{\psi'}_1-{\psi'}_3}{\Delta p}-\frac{U_1-U_3}{2\Delta p}\frac{\partial({\psi'}_1+{\psi'}_3)}{\partial x}=\frac{S}{f_0}{\omega'}_2 \tag{8.2.5c}$$

が得られる。ここでさらに、

$$U_m=\frac{U_1+U_3}{2},\quad U_T=\frac{U_1-U_3}{2},\quad \psi_m=\frac{{\psi'}_1+{\psi'}_3}{2},\quad \psi_T=\frac{{\psi'}_1-{\psi'}_3}{2} \tag{8.2.6}$$

と置く。U_mは鉛直平均した基本場の東西風、U_Tは温度風（鉛直シアー）の 1/2、ψ_mは順圧モード（上下で位相のそろった振動モード）、ψ_Tは傾圧モード（上下で位相の反転する振動モード）の波動擾乱を

表す。このとき、

$$U_1 = U_m + U_T\,,\ U_3 = U_m - U_T\,,\ \psi'_1 = \psi_m + \psi_T\,,\ \ \psi'_3 = \psi_m - \psi_T \tag{8.2.7}$$

であるから、(8.2.5a-c) は

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + (U_m + U_T)\frac{\partial}{\partial x}\right\}\frac{\partial^2(\psi_m + \psi_T)}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial(\psi_m + \psi_T)}{\partial x} = \frac{f_0}{\Delta p}\omega'_2 \tag{8.2.8a}$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + (U_m - U_T)\frac{\partial}{\partial x}\right\}\frac{\partial^2(\psi_m - \psi_T)}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial(\psi_m - \psi_T)}{\partial x} = -\frac{f_0}{\Delta p}\omega'_2 \tag{8.2.8b}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_m\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi_T - U_T\frac{\partial\psi_m}{\partial x} = \frac{S\Delta p}{2f_0}\omega'_2 \tag{8.2.8c}$$

と書ける。ここで、{ (8.2.8a)+(8.2.8b) }/2、及び、{ (8.2.8a)－(8.2.8b) }/2 を計算し、さらに (8.2.8c) を用いてω'_2を消去すると、ψ_m, ψ_T に関する方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_m\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^2\psi_m}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial\psi_m}{\partial x} + U_T\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\psi_T}{\partial x^2}\right) = 0 \tag{8.2.9a}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_m\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2\psi_T}{\partial x^2} - 2\lambda^2\psi_T\right) + \beta\frac{\partial\psi_T}{\partial x} + U_T\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\psi_m}{\partial x^2} + 2\lambda^2\psi_m\right) = 0 \tag{8.2.9b}$$

が得られる。ただし、$\lambda^2 = f_0^2/[S(\Delta p)^2]$ である。ここで、(8.2.9b) 式とその変形前の (8.2.8c) のΔpはレベル 1 とレベル 3 の気圧差なので、レベル 1 とレベル 3 の高度差を$|\Delta z|$とすると、静力学平衡により$|\Delta p|/|\Delta z| = \rho g$である（$\rho$は密度）。また第 7 章でも見たように $S = (N/\rho g)^2$ と書けることから、

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\sqrt{S}}{f_0}\Delta p = \frac{N|\Delta z|}{f_0}$$

と書ける。つまりこのλは**ロスビーの内部変形半径**の逆数に相当する。

8.2.3 分散関係

方程式 (8.2.9a,b) の解として、x方向に伝播する波動

$$\psi_m = Ae^{ik(x-ct)}\,,\ \ \psi_T = Be^{ik(x-ct)} \tag{8.2.10}$$

の形を考える。これらを方程式 (8.2.9a,b) に代入して整理すると、係数A、Bに関する方程式

$$[(c - U_m)k^2 + \beta]A - k^2U_TB = 0 \tag{8.2.11a}$$

$$(2\lambda^2 - k^2)U_TA + [(c - U_m)(2\lambda^2 + k^2) + \beta]B = 0 \tag{8.2.11b}$$

が得られる。これが非自明解を持つための条件は、

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix}(c - U_m)k^2 + \beta & -k^2U_T \\ (2\lambda^2 - k^2)U_T & (c - U_m)(2\lambda^2 + k^2) + \beta\end{vmatrix} \\ &\quad = k^2(2\lambda^2 + k^2)(c - U_m)^2 + 2\beta(\lambda^2 + k^2)(c - U_m) + \beta^2 + k^2(2\lambda^2 - k^2){U_T}^2 \\ &\quad = 0\end{aligned} \tag{8.2.12}$$

である。これをcに関して解くと

$$c = U_m - \frac{\beta(\lambda^2 + k^2)}{k^2(2\lambda^2 + k^2)} \pm \sqrt{\delta}\,,\qquad \delta = \left\{\frac{\beta\lambda^2}{k^2(2\lambda^2 + k^2)}\right\}^2 - \frac{2\lambda^2 - k^2}{2\lambda^2 + k^2}{U_T}^2 \tag{8.2.13}$$

が得られる。これより、$\delta < 0$ であれば、cは虚数部分を持ち、波動擾乱の振幅は指数関数的に増大する。すなわち、この場合に傾圧不安定波動が発達することになる。

以下ではどのような場合に $\delta < 0$ の条件が満たされるかを考察する。ただし、(8.2.13) は複雑な形をしているので、最初にδの右辺第 1 項または第 2 項のいずれかが 0 になる特殊な場合についてそれぞれ考え、そのあとに一般的な場合を考察することにしよう。

a. $U_T = 0$、$\beta \neq 0$ のとき（基本場の東西風に鉛直シアーがない場合）

このときは (8.2.13) のδにおける第 2 項は 0 となり、第 1 項は負にならないのでδも負にならず、波動は不安定にはならない中立波である。これは本章で目的としている不安定波動ではないが、どのような波動になるのかを考察しておこう。この場合、cは 2 個の実数解、すなわち 2 種類の位相速度

$$c_1 = U_m - \frac{\beta}{k^2},\ \ c_2 = U_m - \frac{\beta}{k^2 + 2\lambda^2} \tag{8.2.14}$$

を持つ中立的な波動が解として得られる。つまり、基本場の東西風に鉛直シアーがなければ、傾圧不安定は起こらない。そしてこれらの解は第 7 章で見たロスビー波の位相速度の形である。2 つの位相速度のうち、基本場から見て西向きの位相速度で速い方であるc_1を (8.2.11a, b) に代入すると、係数Aは任意、$B = 0$となるので、$\psi_T = 0$ となり、波動解はψ_m のみから構成される。つまりこの解は上下の層で位相のそろった順圧ロスビー波である。一方、遅い方の位相速度c_2に対しては、$A = 0$、Bは任意となり、これは上下の層で位相が逆転する（1/2 波長ずれる）傾圧ロスビー波である。

b. $\beta = 0$、$U_T \neq 0$ の場合（鉛直シアーはあるがβ効果がない場合）

このときは (8.2.13) のδにおける第 1 項が 0 となり、

$$c = U_m \pm |U_T| \sqrt{\frac{k^2 - 2\lambda^2}{k^2 + 2\lambda^2}} \tag{8.2.15}$$

となるので、東西波数kが $k^2 < k_c^2 \equiv 2\lambda^2$ の条件を満たすと、位相速度cは虚数部分を持つ。従って、この場合（$\beta = 0$）、臨界波長

$$L_c = \frac{2\pi}{k_c} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}\lambda} = \frac{\pi \Delta p \sqrt{2S}}{f_0} \tag{8.2.16}$$

よりも長い波はすべて傾圧不安定波となる。ちなみに、典型的な条件

$\sqrt{2S} = \sqrt{2}N/\rho g$ $= (1.4\times10^{-2})/(0.7\times9.8) \approx 2\times10^{-3}$ m^2 s kg^{-1}、 $\Delta p = 500$ hPa、 $f_0 = 10^{-4}$ s^{-1}

における臨界波長L_cは約 3000 km であり、これより波長が長いと波動は不安定により成長する。逆に、短波長の波動は不安定にならない。

β効果がない場合の傾圧不安定について、上式から読み取れることは、

（1）傾圧不安定に対する臨界波長は、静的安定度の増加とともに増大する。つまり静的安定度は短波長の波を安定化させるように働く。

（2）臨界波長は、基本場の東西風の鉛直シアーU_Tには依存しない。

（3）不安定波の成長率（発達率）は、

$$kc_i = |U_T|\sqrt{\frac{(2\lambda^2 - k^2)k^2}{2\lambda^2 + k^2}} \tag{8.2.17}$$

であり、鉛直シアーに比例して増大する。成長率が最大になる波数k_mは、

$$k_m = \sqrt{2\left(\sqrt{2} - 1\right)}\lambda = \sqrt{\sqrt{2} - 1}k_c \approx 0.644k_c \tag{8.2.18}$$

である。上述の典型的な条件では、成長率が最大となる波長L_mは約 5000 km である。

c. 一般の場合（$U_T \neq 0$、$\beta \neq 0$）

(8.2.13) 式で$\delta = 0$（中立）となるのは、東西波数kが関係式

$$\frac{\beta^2\lambda^4}{k^4(2\lambda^2 + k^2)} = (2\lambda^2 - k^2){U_T}^2 \tag{8.2.19}$$

を満たす場合である。これを、無次元数

$$X \equiv \frac{k^2}{2\lambda^2}\,, \quad Y \equiv \frac{2\lambda^2 U_T}{\beta}$$

を用いて整理すると、

$$Y^2 = \frac{1}{4X^2(1 + X)(1 - X)} \quad \text{あるいは} \quad Y = \frac{1}{2X\sqrt{1 - X^2}} \tag{8.2.20}$$

が得られる。この曲線（中立曲線）をX-Y平面に描き、系が不安定になる領域と安定な領域を示したのが図 8.3 である。この図の横軸 X は $\sqrt{2}\lambda$ で規格化した東西波数の 2 乗であり、縦軸 Y は$\beta/(2\lambda^2)$ で規格化した基本場の東西風の鉛直シアーであるから、与えられた東西波数（k）と東西風の鉛直シアー（U_T）から、この図によって、波が不安定になるかどうかを判別することができる。この図と関係式 (8.2.19) 等から読み取れる重要な点を挙げておく。

1. $\beta = 0$、$\beta \neq 0$ の場合とも、臨界波長 $L_c = \sqrt{2}\pi/\lambda$ （これは $k_c/\sqrt{2}\lambda = 1$ なので図 8.3 の右端に相当する）より短波長の波は不安定にならない。これは中立で（不安定でない）比較的短波長のロスビー波と考えることができる。現実の中緯度偏西風帯でも、短波長のトラフが発達せずに（長波長のトラフと比較して）速い速度で東進するのはしばしば見られる。ただし波動として発達しなくても渦度移流により上昇流を励起して悪天をもたらすことはありうる。

2. $\beta = 0$ の場合は臨界波長より波長の長い波（$k^2 < k_c^2 \equiv 2\lambda^2$）はすべて不安定であったが、$\beta \neq 0$ の場合は不安定波は図 8.3 の $X = k^2/2\lambda^2 < 1$の領域のうち、中立曲線より上側にのみ存在する。すなわち、$k^2/2\lambda^2 < 1$の長波長の傾圧性波動に対してはβによる安定化の効果がある。

3. 図 8.3 で不安定波の存在する領域のY座標の下限は 1 である。つまり、$Y = (2\lambda^2/\beta)U_T > 1$、すなわち $U_T > U_{T\_us} \equiv \beta/(2\lambda^2)$ の場合にのみ不安定が生じうる。この U_{T_us} はβが大きくなれば増大し、また静的安定度Sが大きくなった場合も増大する。このことからも、β効果と大気の静的安定度は、共に不安定波動の安定化の働きを持つことが示唆される。

4. 傾圧不安定が起こるために必要な鉛直シアー U_T（$> U_{T\_us}$、図 8.3 で $Y > 1$）を固定して考えるとき、不安定となる東西波数kには上限と下限が存在する。$\beta = 0$ の場合には波数の上限（波長の下

限）のみが存在していたことを考えると、β効果による安定化作用は、図 8.3 で $X = k^2/2\lambda^2 \lesssim 0.5$ の特に長波長の波（超長波、プラネタリー波）に対して特に効果的に働くと言える。

5. 傾圧不安定波動について、鉛直シアーと東西波数を固定して考えると、$\lambda^2 = f_0^2/[S(\Delta p)^2]$ であることにより、静的安定度Sが増大すれば、図 8.3 において不安定を表す領域の縦座標 $Y = (2\lambda^2/\beta)U_T$ は小さくなり、横座標 $X = k^2/2\lambda^2$ は大きくなる。この時の点（X, Y）の動きを中立線の近傍で考えると、不安定点は中立曲線の内側（不安定領域）から外側（安定領域）に出るような動きをする【練習問題】。つまり、静的安定度の増大は、傾圧不安定波を安定化させるように働く。

6. 不安定の発現する鉛直シアーの下限は $U_{T\_us} = \beta/(2\lambda^2)$ であった。このU_Tの下限に対応する波数を求めると、$k^2 = \sqrt{2}\lambda^2$ である（図 8.3 の横座標$X = \sqrt{2}/2$）。この波数 $k_{us} \equiv 2^{1/4}\lambda$ はいわば不安定発現波数と呼ぶべきもので、鉛直シアー U_T が 0 から徐々に大きくなっていくとき、波数k_{us}の波動が最初に増幅し始める。この波数k_{us}は、(8.2.19) 式をkについて微分して $dU_T/dk = 0$ とおくことで求められる【練習問題】。

7. 典型的な大気の状態に対して、不安定発現波数 $k_{us} = 2^{1/4}\lambda$ に対応する波長を求めると、約 4000 km である。これは中緯度総観規模擾乱の平均波長とほぼ同じである。$k_{us} = 2^{1/4}\lambda$ を (8.2.19) 式に代入してこれに対応する鉛直シアーを求めると、$U_T = \beta/2\lambda^2$で、これに前に示した典型的な条件と $\beta = 1.6\times10^{-11}$ m^{-1} s^{-1} を使うと、$U_T \simeq 4$ m s^{-1} であることがわかる。これは 750〜250 hPa 間の鉛直シアーが 8 m s^{-1} であることに相当するが、現実の中緯度における鉛直シアーはこの値より一般に大きく、その点では不安定が生じる条件を満たしていると言える。

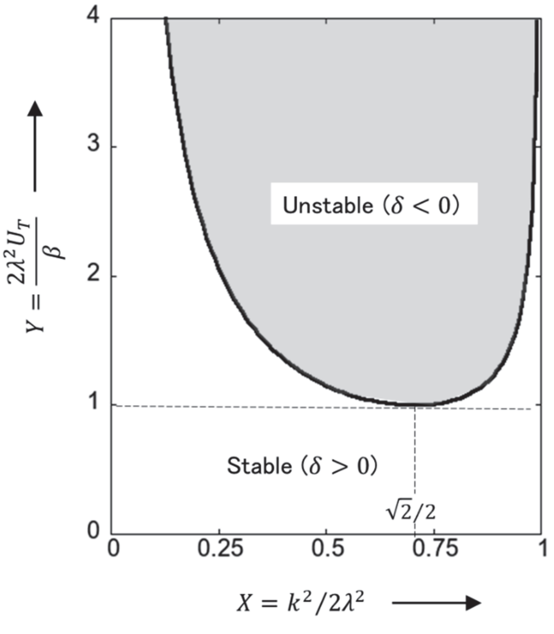


図 8.3　2 層傾圧モデルにおける安定度の分布。陰影が不安定領域。横軸は無次元化した東西波数の 2 乗、縦軸は無次元化した東西風の鉛直シアー。

8.2.4　傾圧不安定波動の構造と鉛直運動

ここまでで、2 層モデルで傾圧不安定が生じる条件を調べた。ここでは、傾圧不安定による不安定波の構造を、$\beta = 0$ の場合について調べる。波長は前項の L_c より大きい（すなわち $k \le k_c$）とする。

まず、複素位相速度 c を実数 c_r、c_i を用いて $c = c_r + ic_i$ と表すと、前項の (8.2.15) 式から $c_r = U_m$ である。すると (8.2.11a) より

$$B = i\frac{c_i}{U_T}A \tag{8.2.21}$$

が得られるので、さらに遡ってこれを (8.2.10) に代入すると

$$\psi_m = Ae^{ik(x-ct)} = Ae^{kc_i t}e^{ik(x-c_r t)} \tag{8.2.22a}$$

$$\psi_T = i\frac{c_i}{U_T}Ae^{ik(x-ct)} = \frac{c_i}{U_T}Ae^{kc_i t}e^{i[k(x-c_r t)+\pi/2]} \tag{8.2.22b}$$

が得られる。不安定波動では $c_i > 0$ である。これらから、$U_T > 0$ であれば ψ_T が ψ_m と比較して位相が $\pi/2$ 遅れることがわかる。ここで、ψ_m は ψ'_1 と ψ'_3 の平均なので中間の高度である 500 hPa におけるジオポテンシャルの擾乱成分と考えることができ（すなわち$\psi_m = \psi'_2$)、一方、ψ_T は ψ'_1 と ψ'_3 の差なので、上層 250 hPa と下層 750 hPa の間の層厚の擾乱成分、すなわち 500 hPa を中心とした層の温度偏差と考えることができる（すなわち$\psi_T \propto T'_2$)。これらから、500 hPa ジオポテンシャルに対して 500 hPa 気温は位相が $\pi/2$（1/4 波長）遅れると解釈することができる。

次に、(8.2.22a,b) を (8.2.7) に代入すると、

$$\psi'_1 = \psi_m + \psi_T = \sqrt{1+\left(\frac{c_i}{U_T}\right)^2}Ae^{kc_i t}e^{ik(x-c_r t)+i\gamma} \tag{8.2.23a}$$

$$\psi'_3 = \psi_m - \psi_T = \sqrt{1+\left(\frac{c_i}{U_T}\right)^2}Ae^{kc_i t}e^{ik(x-c_r t)-i\gamma} \tag{8.2.23b}$$

$$\tan\gamma \equiv \frac{c_i}{U_T} = \sqrt{\frac{2\lambda^2-k^2}{2\lambda^2+k^2}} \qquad \left(k \le k_c \equiv \sqrt{2}\lambda\right) \tag{8.2.23c}$$

である。従って、$U_T > 0$ であれば ψ'_1 が ψ'_3 と比較して位相が 2γ 遅れることがわかる。

以上をまとめると、$U_T > 0$ の場合は次のようになる。

1. 上層 250 hPa と下層 750 hPa の間の層厚（平均気温）場の位相は、中層 500 hPa 高度場の位相より $\pi/2$ 遅れる。
2. 中層 500 hPa 高度場の位相と比較すると、上層 250 hPa における ψ' の位相は遅れ、また下層 750 hPa のψ'の位相は先行している。すなわち、高度場の等位相線が上層ほど西に傾く構造が見られる。擾乱の成長率 kc_i を最大にするkの値 (8.2.18) $k_m = \sqrt{2\left(\sqrt{2}-1\right)}\lambda$ を (8.2.23c) に代入すると、ψ'_1 と ψ'_3 の位相差は約 66° となる。

次に、傾圧不安定波動に伴う鉛直流について考える。鉛直流ω'_2は既に計算した ψ_T や ψ_m を用いて (8.2.8c) 等で計算することができるが、第 5 章のオメガ方程式を鉛直差分化することによってもその定性的特徴を知ることができる。Q ベクトルを用いたオメガ方程式（第 5.5 節）を、β項を省略して

書き下すと、

$$S\nabla_p^2\omega + f_0^2\frac{\partial^2\omega}{\partial p^2} = -2\nabla_p\cdot\boldsymbol{Q}\ ,\qquad \boldsymbol{Q} = -\frac{R}{p}\left(\frac{\partial\boldsymbol{V}_g}{\partial x}\cdot\nabla_p T,\qquad \frac{\partial\boldsymbol{V}_g}{\partial y}\cdot\nabla_p T\right)$$

であった（第 5 章のオメガ方程式の $S(p)$ はSに置き換えている）。ここで鉛直微分を差分で表すことを考えると、レベル 2 において

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial p^2} \cong \frac{1}{\Delta p}\left\{\frac{\omega_4-\omega_2}{\Delta p} - \frac{\omega_2-\omega_0}{\Delta p}\right\} = -\frac{2\omega_2}{(\Delta p)^2}$$

及び、静力学平衡の式から

$$\frac{RT}{p} = -\frac{\partial\Phi}{\partial p} \cong -\frac{f_0}{\Delta p}(\psi_3-\psi_1)$$

となることにより、レベル 2 におけるオメガ方程式を

$$S\left(\nabla_p^2 - \frac{2f_0^2}{S(\Delta p)^2}\right)\omega_2 = -2\nabla_p\cdot\boldsymbol{Q}$$
$$\boldsymbol{Q} = -\frac{f_0}{\Delta p}\left(\frac{\partial\boldsymbol{V}_2}{\partial x}\cdot\nabla_p(\psi_1-\psi_3),\qquad \frac{\partial\boldsymbol{V}_2}{\partial y}\cdot\nabla_p(\psi_1-\psi_3)\right) \tag{8.2.24}$$

と表すことができる。ただし、レベル 2 における地衡風を$\boldsymbol{V}_2$と書いている。変数を基本場と擾乱成分に分けると、今の場合、$\bar{u}=$一定、$\bar{v}=0$で、ψ'はyに依存しないことから、

$$\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}+u',\bar{v}+v') = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\psi'}{\partial y},\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right) = \left(0,\frac{\partial^2\psi'}{\partial x^2}\right)$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\bar{u}+u',\bar{v}+v') = (0,0)$$

$$\nabla_p(\psi_1-\psi_3) = \nabla_p(\bar{\psi}_1-\bar{\psi}_3+\psi'_1-\psi'_3) = (0,-U_1+U_3) + \nabla_p(\psi'_1-\psi'_3) = (0,-2U_T) + \left(2\frac{\partial\psi_T}{\partial x},0\right)$$

となり、レベル 2 における Q ベクトルは

$$\boldsymbol{Q} = -\frac{f_0}{\Delta p}\left(-2U_T\frac{\partial^2\psi'}{\partial x^2},0\right) = \frac{2f_0}{\Delta p}(U_T\zeta_2,0) \tag{8.2.25}$$

と書ける。従って今の場合、Q ベクトルはx成分のみを持ち、その正負は、$U_T>0$ の場合、相対渦度 $\zeta_2 = \partial^2\psi'_2/\partial x^2 = \partial^2\psi_m/\partial x^2$ の正負によって決定される。x依存性が三角関数で表される波動擾乱では、高度場 ψ'_2 の位相と $\partial^2\psi'_2/\partial x^2$ の位相は反転するので、500 hPa のトラフの位置において Q ベクトルのx成分は正偏差となり東向きであり、逆にリッジの位置では西向きとなる（第 5.5 節の図における Q ベクトルのパターンと同じであることを確認すること）。この Q ベクトルの発散をとって 2 倍することで、オメガ方程式右辺の強制項が計算されるので、オメガ方程式は

$$\left(\nabla_p^2 - 2\lambda^2\right)\omega_2 = -4\frac{f_0}{S\Delta p}U_T\frac{\partial\zeta_2}{\partial x} \tag{8.2.26}$$

となる（$\lambda^2 = f_0^2/[S\cdot(\Delta p)^2]$）。$\omega'_2=\omega_2$ であることも注意しておこう。ψ'が三角関数で表される場合、(8.2.26) 式の左辺は 2 階微分のため$-\omega_2$（$\propto w_2$）に比例し、また　$\zeta_2 \propto -\psi'_2$ と考えることができるので $\partial\zeta_2/\partial x \propto -\partial\psi'_2/\partial x = -v'_2$ が言える。さらに、$\overline{\psi_1}-\overline{\psi_3}$ が基本場の層厚であることも使うと

$$U_T = \frac{U_1 - U_3}{2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(\overline{\psi_1} - \overline{\psi_3}) \propto -\frac{\partial \overline{T}_2}{\partial y}$$

である（これは基本場の温度風バランスを表す）。これらを用いて、(8.2.26) 式から

$$w_2 \propto -\omega_2 \propto -U_T \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} \propto U_T \frac{\partial \psi'_2}{\partial x} \propto -v'_2 \frac{\partial \overline{T}_2}{\partial y} \tag{8.2.27}$$

の関係式が得られる。すなわち中層（500 hPa）の上昇流は、擾乱に関連した基本場の温度風による正渦度移流、見方を変えると擾乱の南北風による基本場の正の温度移流によって引き起こされる。下降流は基本場の温度風による負渦度移流、または擾乱の南北風による基本場の負の温度移流によりもたらされる。

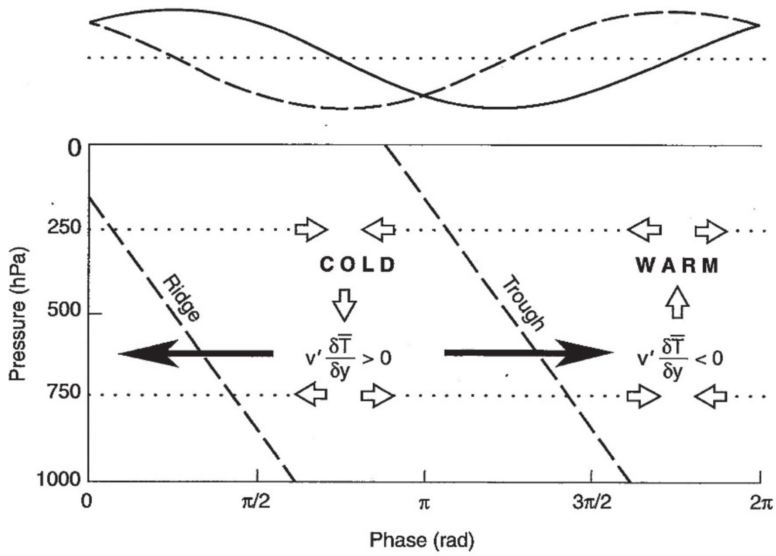


図 8.4　2 層モデルにおける傾圧不安定波の構造。上段：500 hPa のジオポテンシャル（実線）と温度（破線）の偏差の相対的な位相。下段：ジオポテンシャル・南北温度移流・非地衡風循環（白抜き矢印）・Q ベクトル（黒矢印）・温度場の位相を示した鉛直断面図。（Holton 2004）

以上の結果に基づいて、$\beta = 0$ での傾圧不安定波動の構造とそれに伴う鉛直流を模式的に図 8.4 に示した。これまでの議論で、中間層（レベル 2、500 hPa）においては ψ_T が ψ_m と比較して位相が$\pi/2$ 遅れることを示したが、そのことは、図の上段で高度場（実線）より温度場（破線）が 1/4 波長遅れ、トラフ（$\psi'_2 < 0$）の前面は暖気（$T' > 0$）、後面は寒気（$T' < 0$）となることを表している（図下段も参照）。また上層の高度場 ψ'_1 は中間層の ψ'_2 より位相が遅れ、逆に下層の ψ'_3 は位相が進んでいるため、図の下段に示したように、高度場の等位相線（トラフ・リッジを上下方向に結ぶ線）は上方ほど西に傾く構造を持つ。この等位相線の傾きは $\beta = 0$ の条件だけからは決まらないが、先に見たように、最大成長率を与える東西波数 k_mに対しては、上層と下層の位相差が約 66° になるので、ここではその場合が図示されている。

次に、傾圧不安定波に伴う南北風を考えると、$v'_2 = \partial\psi'_2/\partial x$のため、これもまた高度場 ψ'_2 に対して位相が 1/4 波長遅れ、温度場（破線）と同位相になる。すなわち、500 hPa のトラフ（$\psi'_2 < 0$）の前

面で南風（$v'_2 > 0$）、後面で北風（$v'_2 < 0$）となり、これらの南北風はトラフの前面で暖気移流、後面で寒気移流をもたらす。すると上述の (8.2.27) 式に関する議論から、トラフの前面は上昇流、後面は下降流となる（図の鉛直方向の白抜き矢印）。このことは図中に黒矢印で示された 500 hPa における Q ベクトルのパターンとその収束・発散から推定される鉛直流の分布とも一致する。また、ωに対する境界条件 $\omega_0 = \omega_4 = 0$ より、鉛直流は上昇流域の下層（750 hPa）で非地衡風の水平収束、上層（250 hPa）で水平発散を伴い、下降流域ではその逆になる（図中の水平方向の白抜き矢印）。

こうして得られた傾圧不安定波動の構造は、第 5 章で扱った温帯低気圧の準地衡風的な解析結果を再現しており、発達期の温帯低気圧に伴う物理場の特徴を定性的によくとらえている。

8.3 傾圧不安定のエネルギー論

ここでは、前節で導入した傾圧不安定の 2 層モデルを用いて、傾圧不安定に伴って系のエネルギーがどのように変わっていくかを調べておく。結論を先に述べると、傾圧不安定波のエネルギーの源は、基本場の南北温度勾配に由来する有効位置エネルギー（第 2.2 節）であり、それが波動擾乱のエネルギー（運動エネルギー＋位置エネルギー）に変換されるにあたっては、擾乱の高度場の位相が上空ほど西に傾くという構造が本質的に重要な役割を担うことになる。

8.3.1 擾乱の運動エネルギー

まず、レベル 1 の線形化した擾乱の渦度方程式 (8.2.5a) は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_1 \frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 \psi'_1}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial \psi'_1}{\partial x} = \frac{f_0}{\Delta p}\omega'_2$$

であった。この式の両辺に $-\psi'_1$ をかけて、xについて 1 波長Lにわたって平均する。すなわち、

$$\overline{(\quad)} = \frac{1}{L}\int_0^L (\quad)\,dx$$

の計算を行う。すると、左辺のそれぞれの項は、

$$\overline{-\psi'_1 \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2 \psi'_1}{\partial x^2}} = -\overline{\frac{\partial}{\partial x}\left[\psi'_1 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \psi'_1}{\partial x}\right)\right]} + \overline{\frac{\partial \psi'_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \psi'_1}{\partial x}\right)} = 0 + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\overline{\left(\frac{\partial \psi'_1}{\partial x}\right)^2}$$

$$\overline{-\psi'_1 U_1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \psi'_1}{\partial x^2}\right)} = -U_1 \overline{\frac{\partial}{\partial x}\left[\psi'_1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi'_1}{\partial x}\right)\right]} + U_1 \overline{\frac{\partial \psi'_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi'_1}{\partial x}\right)} = \frac{U_1}{2}\overline{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi'_1}{\partial x}\right)^2} = 0$$

$$\overline{-\psi'_1 \beta \frac{\partial \psi'_1}{\partial x}} = -\beta \overline{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\psi'^2_1}{2}\right)} = 0$$

となる。以上をまとめると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2}\overline{\left(\frac{\partial \psi'_1}{\partial x}\right)^2}\right\} = -\frac{f_0}{\Delta p}\overline{\psi'_1 \omega'_2} \tag{8.3.1}$$

である。今の場合、$u'_1 = -\partial \psi'_1/\partial y = 0$ なので、$(1/2)(\partial \psi'_1/\partial x)^2 = (1/2)v'^2_1$ はレベル 1 における擾乱の運動エネルギーに等しい。同様に、レベル 3 について

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2}\overline{\left(\frac{\partial \psi_3'}{\partial x}\right)^2}\right\} = +\frac{f_0}{\Delta p}\overline{\psi_3'\omega_2'} \tag{8.3.2}$$

が言える。2 層モデルにおける擾乱の運動エネルギーK'を、レベル 1 とレベル 3 の和を取って

$$K' = \frac{1}{2}\left\{\overline{\left(\frac{\partial \psi_1'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_3'}{\partial x}\right)^2}\right\} \tag{8.3.3}$$

で定義すれば、(8.3.1) と (8.3.2) の和から、

$$\frac{\partial}{\partial t}K' = -\frac{f_0}{\Delta p}\overline{(\psi_1' - \psi_3')\omega_2'} = -2\frac{f_0}{\Delta p}\overline{\psi_T\omega_2'} \tag{8.3.4}$$

の関係が得られる。すなわち擾乱のエネルギーの時間変化率は、擾乱の層厚（温度場）ψ_Tと鉛直速度場ω_2'の相関で決まり、暖気（$\psi_T > 0$）が上昇（$\omega_2' < 0$）または寒気（$\psi_T < 0$）が下降（$\omega_2' > 0$）するなら運動エネルギーが増大することがわかる。特に第 8.2.4 項で見たように、$\beta = 0$ の場合の不安定波動では ψ_T と ω_2' は逆位相であり、その相関は負である。従って、$\beta = 0$ の場合の傾圧不安定波動では運動エネルギーは必ず増加することになる。

8.3.2 擾乱の有効位置エネルギー

次に、擾乱の持つ位置エネルギーについて考える。レベル 2 における線形化した擾乱の熱力学方程式 (8.2.5c) は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{U_1 + U_3}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\psi_1' - \psi_3'}{\Delta p} - \frac{U_1 - U_3}{2\Delta p}\frac{\partial(\psi_1' + \psi_3')}{\partial x} = \frac{S}{f_0}\omega_2'$$

であった。この式の両辺に層厚 $\psi_1' - \psi_3'$ をかけて、xについて 1 波長分平均すると、運動エネルギーの場合と同様に

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2}\overline{(\psi_1' - \psi_3')^2}\right\} = U_T\overline{(\psi_1' - \psi_3')\frac{\partial}{\partial x}(\psi_1' + \psi_3')} + \frac{S\Delta p}{f_0}\overline{\omega_2'(\psi_1' - \psi_3')} \tag{8.3.5}$$

が得られる。2 層モデルにおける擾乱の有効位置エネルギーを

$$P' \equiv \frac{\lambda^2}{2}\overline{(\psi_1' - \psi_3')^2}, \quad \lambda^2 = \frac{f_0^2}{S(\Delta p)^2} \tag{8.3.6}$$

で定義すると、(8.3.5) にλ^2をかけて

$$\frac{\partial}{\partial t}P' = 4\lambda^2 U_T\overline{\psi_T\frac{\partial \psi_m}{\partial x}} + 2\frac{f_0}{\Delta p}\overline{\psi_T\omega_2'} \tag{8.3.7}$$

となる。この式の左辺は擾乱の有効位置エネルギーの時間変化率を表す。一方、右辺第 1 項は、擾乱の有効位置エネルギーの生成率であり、基本場の西風が上空ほど強い場合（$U_T > 0$）には、擾乱の暖気（$\psi_T > 0$）が北上（$\partial\psi_m/\partial x > 0$）するか寒気（$\psi_T < 0$）が南下（$\partial\psi_m/\partial x < 0$）すれば擾乱の位置エネルギーが増加することを示している。これは基本場の南北温度傾度を減少させて西風の鉛直シアーを小さくする、すなわち、基本場の有効位置エネルギーを擾乱の有効位置エネルギーに変換することに対応する。右辺第 2 項は、(8.3.4) の右辺と同じで、ただし符号が逆である。これは擾乱の有効位置エネルギーから擾乱の運動エネルギーへの変換項である。

8.3.3 擾乱の全エネルギー

前項までの (8.3.4) と (8.3.7) の和を取ると、擾乱の全エネルギーの時間変化率を表す関係式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t}(K' + P') = 4\lambda^2 U_T \overline{\psi_T \frac{\partial \psi_m}{\partial x}} \tag{8.3.8}$$

この式では (8.3.4) と (8.3.7) にあった有効位置エネルギーから運動エネルギーへの変換項がキャンセルし、右辺には基本場の有効位置エネルギーから擾乱の有効位置エネルギーの生成項のみが現れる。

擾乱位置エネルギー生成項は、前項でも考察したように、ψ_m が 500 hPa 高度場、ψ_T が 500 hPa の温度場の分布に対応するので、500 hPa の風の南北成分 $\partial\psi_m/\partial x = v_2'$ と、500 hPa の温度場の相関で決まることになる。北半球中緯度における通常の条件 $U_T > 0$ では、擾乱による北向き熱輸送があるときに擾乱位置エネルギーの生成が行われることになる。

図 8.5 に準地衡風擾乱のエネルギーの流れをブロックダイヤグラムで示した。基本場の有効位置エネルギー $\bar{P}$ から (8.3.7) の右辺第 1 項の $\psi_T(\partial\psi_m/\partial x)$ により擾乱の有効位置エネルギー P' への変換が生じ、さらにそこから (8.3.7) の右辺第 2 項及び (8.3.4) の右辺の $-\psi_T\omega_2'$ によって擾乱の運動エネルギー K' に変換されることが示されている。

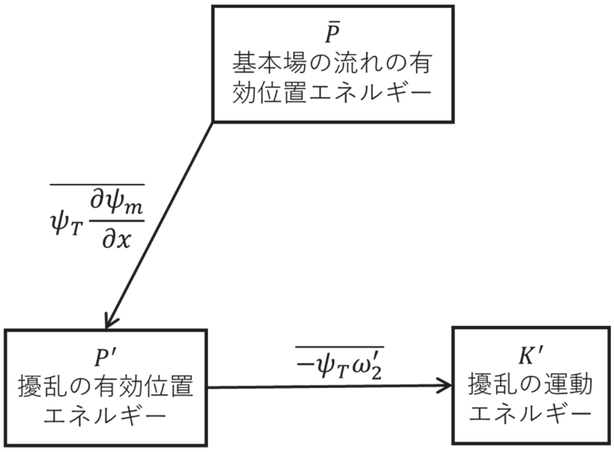


図 8.5　発達する傾圧性波動のエネルギーの流れ。（Holton (2004) に基づき作成）

擾乱位置エネルギー生成項の役割をより良く理解するために、

$$\psi_m = A_m \cos k(x - ct) \ ,\quad \psi_T = A_T \cos k(x - ct + x_0) \tag{8.3.9}$$

と表される場合を考える。すなわち 500 hPa の高度場と温度場の間に kx_0 の位相差がある場合である。このとき、

$$\begin{aligned}
\overline{\psi_T \frac{\partial \psi_m}{\partial x}} &= -\frac{kA_TA_m}{L}\int_0^L \cos k(x - ct + x_0)\sin k(x - ct)\,dx \\
&= -\frac{kA_TA_m}{L}\left[\cos kx_0 \int_0^L \cos k(x - ct)\sin k(x - ct)\,dx - \sin kx_0 \int_0^L \sin^2 k(x - ct)\,dx\right] \\
&= \frac{kA_TA_m \sin kx_0}{2}
\end{aligned}$$

となるので、$U_T > 0$ の条件下では、擾乱のエネルギーが増大するためには $\sin kx_0 > 0$、すなわち $0 < kx_0 < \pi$ （すなわちサーマルトラフがトラフに対して遅れる）でなければならない。特に $kx_0 = \pi/2$ の場合、すなわち温度場の位相が高度場の位相に 1/4 波長遅れている場合に、擾乱位置エネルギーの生成率は最大になる。図 8.4 に示した状況ではこの条件が満たされており、最も効率的な状況と言える。

ここで再び、図 8.4 をエネルギー論の観点から見てみる。既に述べたように、トラフの前面では南風による暖気移流と上昇流、後面では北風による寒気移流と下降流が生じている。これらの温度移流はトラフの前後における温度差を増大させ、それに伴い擾乱の有効位置エネルギーも増大する。すなわち擾乱の有効位置エネルギーが生成される。またトラフの前後における暖気の上昇と寒気の下降は、共に擾乱の有効位置エネルギーを擾乱の運動エネルギーへと変換することになる。さらに、トラフの前面・後面における水平温度移流は、基本場の南北間の温度差を解消する形に働くので、擾乱の有効位置エネルギーが増加した分、基本場の有効位置エネルギーは減少することになる。ただし、ここで扱っている線形不安定論では基本場は時間的に変化しないことを仮定しているので、擾乱の発達が平均場に与える影響を数学的に議論することはできない。

8.3.4 傾斜対流としての傾圧不安定とエネルギー論

ここでは、傾圧不安定擾乱に関連するエネルギー変換を、図を用いて考えてみよう。図 8.6 は傾圧大気の南北鉛直断面を示している。細線は東西平均した等温位線（基本場の温位分布）で、南北の温度差のため一般に高緯度側から低緯度側に向かって高度が低下するように傾斜しており、この傾斜は南北温度傾度が大きいほど急になる。すなわち、(a) は (b)より南北温度傾度が大きい状態を表す。擾乱に伴う温位θ_0の空気塊の運動について、この断面図上における流跡線を破線で示した。(a) (b) の破線は同じ傾斜を持つ。

断熱では空気塊は温位θ_0を保って運動するので、図 8.6a のように空気塊の流跡線（破線）が平均等温位面（実線）より小さな傾きを持つ場合は、空気塊が擾乱に伴って上昇（$-\omega' > 0$）しながら高緯度方向へ運動（$v' > 0$）すると周囲の空気より相対的に高温になる（$\psi_T > 0$）。逆に同じ図中で下降（$-\omega' < 0$）しながら低緯度方向へ運動（$v' < 0$）する場合は、運動に伴って周囲の空気より相対的に低温になる（$\psi_T < 0$）。このような空気塊に対しては、風の南北成分（$v' = \partial\psi_m/\partial x$）と温度場（$\psi_T$）の相関、及び鉛直速度（$-\omega'$）と温度場（$\psi_T$）の相関は、第 8.3.1 項と第 8.3.2 項で見たように共に正となり、擾乱の発達条件がそろって、擾乱のエネルギーは増大する。

一方、図 8.6b のように、空気塊の流跡線（破線）が平均等温位面（実線）より大きく傾いている場合は、温位θ_0を保って運動する空気塊は北上・上昇運動（$-\omega' > 0$、$v' > 0$）に伴って周囲の空気より低温になり（$\psi_T < 0$）、逆に南下・下降運動（$-\omega' < 0$、$v' < 0$）では周囲の空気より高温になる（$\psi_T > 0$）。これらのため、上記の相関はどちらも負となり、擾乱の運動エネルギーは擾乱の有効位置エネルギーに変換され、それはさらに基本場（平均場）の有効位置エネルギーに変換される。この過程により擾乱のエネルギーは減少する。

従って、擾乱が平均場からエネルギーを受け取るためには、南北鉛直断面内の空気塊の流跡線の傾きが、平均場の等温位面の傾きより小さいことが必要である。そのためには、平均等温位面の傾きが大きければ大きいほど、（すなわち、水平温度傾度が大きいほど、）擾乱が発生した場合に傾圧不安定擾乱となる可能性が大きくなり、生じた擾乱もより発達するようになる。

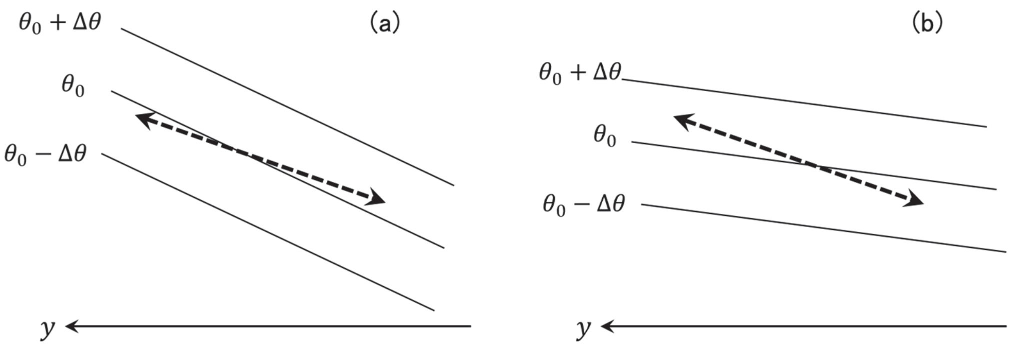


図 8.6　南北断面（左が極側）における東西平均温位場（細線）と、そこにおける空気塊の流跡線（破線）。(a) 傾圧不安定な場合、(b) 傾圧安定な場合。

8.4 傾圧不安定の必要条件と順圧不安定

8.4.1 傾圧不安定の必要条件

第 8.2 節では大気の鉛直構造を 2 層モデルで簡単化していわゆる傾圧不安定を表現し、鉛直シアーがある環境下で波動が不安定になることを示した。ここではそのように鉛直構造を簡単化することなく、不安定となる条件を準地衡風近似の枠組みで解析的に示す。前と同様に地衡風を流線関数ψで表した場合の準地衡風渦位（β平面近似）と準地衡風渦位方程式（第 5 章参照）は、

$$q=f_0+\beta y+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0^2}{S(p)}\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) \tag{8.4.1}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)q=0 \tag{8.4.2}$$

である。ここでは安定度 $S(p)$ は一定でなく気圧に依存するものを採用する。基本場として東西方向には一様で南北及び鉛直方向にシアーのある東西風 $\bar{u}(y,p)$ を仮定し、その中を東西方向に伝播する波動を考える。流線関数を

$$\psi(x,y,p,t)=\bar{\psi}(y,p)+\psi'(x,y,p,t)$$

とすれば、まず基本場$\bar{\psi}$については

$$\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial y}=-\bar{u}(y,p),\qquad \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x}=\bar{v}=0 \tag{8.4.3}$$

が成り立つ。基本場の渦位は

$$\bar{q}=f_0+\beta y-\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0^2}{S(p)}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial p}\right) \tag{8.4.4}$$

であり、これにより

$$\frac{\partial\bar{q}}{\partial x}=0 \tag{8.4.5}$$

$$\frac{\partial\bar{q}}{\partial y}=\beta-\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}-\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0^2}{S(p)}\frac{\partial\bar{u}}{\partial p}\right) \tag{8.4.6}$$

が成り立つ。このとき基本場は、次の形で渦位方程式を満たす。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial}{\partial y}\right)\bar{q}=0$$

　一方、擾乱の渦位は

$$q'=\frac{\partial^2\psi'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi'}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0^2}{S(p)}\frac{\partial\psi'}{\partial p}\right) \tag{8.4.7}$$

で与えられる。準地衡風渦位方程式において、基本場のまわりで線形化された擾乱の方程式の一般形は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial}{\partial y}\right)q'+u'\frac{\partial\bar{q}}{\partial x}+v'\frac{\partial\bar{q}}{\partial y}=0 \tag{8.4.8}$$

だが、今の場合、$\bar{v}=0,\ \partial\bar{q}/\partial x=0$ なので、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)q'+v'\frac{\partial\bar{q}}{\partial y}=0$$

であり、q' と v' を ψ' で表すと

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\frac{\partial^2\psi'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi'}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0^2}{S(p)}\frac{\partial\psi'}{\partial p}\right)\right]+\frac{\partial\bar{q}}{\partial y}\frac{\partial\psi'}{\partial x}=0 \tag{8.4.9}$$

が得られる。

　ここでは、偏西風帯の運動として、東西には無限に長いが南北に幅を持ったチャネル（水路）のような環境での運動を考える。そのため、この方程式に、次の境界条件を与える。

　（1）南北境界に剛体壁を設ける。すなわち、$y=y_1,y_2$ において $v'=\partial\psi'/\partial x=0$ とする。

　（2）地表面 $p=p_s$ 及び大気上端 $p=p_t$ において $\omega=0$ とする。

（1）の条件は、$y=y_1,y_2$ においてψ'をxによらず一定とすれば良いが、ここでは $\psi'=0$ とする。一方、（2）の条件は、準地衡風の熱力学方程式 (8.2.3b) において$p=p_s,\ p_t$ で $\omega=0$と置くことで

$$p=p_s,p_t\ \text{で}\qquad \left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial\psi}{\partial p}=0$$

が成立することと同等であるが、この方程式を線形化した擾乱の方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial\psi'}{\partial p}+v'\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial p}=0$$

を考えれば、$v'=\partial\psi'/\partial x$、$\bar{u}=-\partial\bar{\psi}/\partial y$ であることを用いて

$$p=p_s,p_t\ \text{で}\qquad \left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial\psi'}{\partial p}-\frac{\partial\bar{u}}{\partial p}\frac{\partial\psi'}{\partial x}=0 \tag{8.4.10}$$

のように、ψ'に関する条件に変換することができる。

　こうして得られた方程式 (8.4.9) (8.4.10) に、東西方向（x方向）に伝播する波動解

$$\psi'(x,y,p,t)=\hat{\psi}(y,p)\exp\{ik(x-ct)\} \tag{8.4.11}$$

を代入して整理すると、$\hat{\psi}$に関する微分方程式

$$\frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0^2}{S(p)}\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial p}\right) - k^2\hat{\psi} + \frac{1}{\bar{u}-c}\frac{\partial \bar{q}}{\partial y}\hat{\psi} = 0 \tag{8.4.12}$$

及び境界条件

$$y = y_1, y_2 \text{ で} \quad \hat{\psi} = 0 \tag{8.4.13}$$

$$p = p_s, p_t \text{ で} \quad \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial p} = \frac{1}{\bar{u}-c}\frac{\partial \bar{u}}{\partial p}\hat{\psi} \tag{8.4.14}$$

が得られる。ここで、cは複素位相速度（$= c_r + ic_i$）なので、

$$\frac{1}{\bar{u}-c} = \frac{\bar{u}-c^*}{(\bar{u}-c)(\bar{u}-c^*)} = \frac{\bar{u}-c^*}{|\bar{u}-c|^2}$$

のように分母が実数になり複素数が分子に来るように、微分方程式 (8.4.12) を変形し、またその複素共役もとって、

$$\frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0^2}{S(p)}\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial p}\right) - \left(k^2 - \frac{\bar{u}-c^*}{|\bar{u}-c|^2}\frac{\partial \bar{q}}{\partial y}\right)\hat{\psi} = 0 \tag{8.4.15a}$$

$$\frac{\partial^2 \hat{\psi}^*}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0^2}{S(p)}\frac{\partial \hat{\psi}^*}{\partial p}\right) - \left(k^2 - \frac{\bar{u}-c}{|\bar{u}-c|^2}\frac{\partial \bar{q}}{\partial y}\right)\hat{\psi}^* = 0 \tag{8.4.15b}$$

が得られる。さらに、$\hat{\psi}^* \times$(8.4.15a) $- \hat{\psi} \times$(8.4.15b) より

$$\left(\hat{\psi}^*\frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial y^2} - \hat{\psi}\frac{\partial^2 \hat{\psi}^*}{\partial y^2}\right) + \left[\hat{\psi}^*\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0^2}{S(p)}\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial p}\right) - \hat{\psi}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0^2}{S(p)}\frac{\partial \hat{\psi}^*}{\partial p}\right)\right] + i\frac{2c_i}{|\bar{u}-c|^2}\frac{\partial \bar{q}}{\partial y}\left|\hat{\psi}\right|^2 = 0 \tag{8.4.16}$$

が得られる。また (8.4.14) から$p = p_s, p_t$ における境界条件

$$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial p} - \frac{\bar{u}-c^*}{|\bar{u}-c|^2}\frac{\partial \bar{u}}{\partial p}\hat{\psi} = 0 \tag{8.4.17a}$$

$$\frac{\partial \hat{\psi}^*}{\partial p} - \frac{\bar{u}-c}{|\bar{u}-c|^2}\frac{\partial \bar{u}}{\partial p}\hat{\psi}^* = 0 \tag{8.4.17b}$$

が得られ、$\hat{\psi}^* \times$(8.4.17a) $- \hat{\psi} \times$(8.4.17b)によって新たな境界条件

$$p = p_s, p_t \text{ で} \quad \left(\hat{\psi}^*\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial p} - \hat{\psi}\frac{\partial \hat{\psi}^*}{\partial p}\right) - i\frac{2c_i}{|\bar{u}-c|^2}\frac{\partial \bar{u}}{\partial p}\left|\hat{\psi}\right|^2 = 0 \tag{8.4.18}$$

を得る。

ここで、(8.4.16) 式をyとpについてそれぞれ区間 $[y_1, y_2]$ 及び $[p_t, p_s]$ で積分する。(8.4.16) の第 1 項は $\partial/\partial y\left(\hat{\psi}^*\partial\hat{\psi}/\partial y - \hat{\psi}\partial\hat{\psi}^*/\partial y\right)$ に等しいので、yでy_1からy_2まで積分すると境界条件 (8.4.13) より 0 となる。また (8.4.16) の第 2 項は

$$\frac{\partial}{\partial p}\left[\hat{\psi}^*\frac{f_0^2}{S(p)}\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial p} - \hat{\psi}\frac{f_0^2}{S(p)}\frac{\partial \hat{\psi}^*}{\partial p}\right]$$

と変形でき、これをpでp_tからp_sまで積分すると境界条件 (8.4.18) が適用できる。これらを用いることで、(8.4.16)をyとpについて積分した結果から、最終的に方程式

$$c_i\left\{\int_{y_1}^{y_2}\left[\frac{f_0^2}{S(p)}\frac{\left|\hat{\psi}\right|^2}{|\bar{u}-c|^2}\frac{\partial\bar{u}}{\partial p}\right]_{p=p_s}dy-\int_{y_1}^{y_2}\left[\frac{f_0^2}{S(p)}\frac{\left|\hat{\psi}\right|^2}{|\bar{u}-c|^2}\frac{\partial\bar{u}}{\partial p}\right]_{p=p_t}dy\right.$$
$$\left.+\int_{y_1}^{y_2}\int_{p_t}^{p_s}\frac{\partial\bar{q}}{\partial y}\frac{\left|\hat{\psi}\right|^2}{|\bar{u}-c|^2}dp\,dy\right\}=0 \tag{8.4.19}$$

が得られる。不安定波動の場合は$c_i \neq 0$ なので、(8.4.19) 式の中括弧内が 0 となることが不安定の必要条件である。この条件の解釈について以下に述べる。

(8.4.19) の積分の各項における $\left|\hat{\psi}\right|^2/|\bar{u}-c|^2$ の部分は負ではないので、それぞれの項の積分の正負は、括弧内第 1 項と第 2 項では東西風の鉛直シアー $\partial\bar{u}/\partial p$、第 3 項では基本場の渦位の南北勾配 $\partial\bar{q}/\partial y$ の値によって決まる。これらは共に基本場の関数なので、不安定な波動解が存在するかどうかは基本場の状況に依存する。不安定解が可能な基本場の特徴を、次の 2 つの状況について述べる。

（1）地上と大気上端で $\partial\bar{u}/\partial p=0$の場合

温度風の関係を考慮すれば、この条件は、地上付近と大気上端付近では南北温度傾度がないことを意味する。このとき (8.4.19) 式の括弧内第 1 項と第 2 項は 0 なので、(8.4.19) 左辺の値が 0 になるには第 3 項の積分値が 0 でなければならない。したがって、$\partial\bar{q}/\partial y$が領域内で常に 0 であるか、または領域内で符号を変えなければならない。後者について考えると、不安定が起こるためには、基本場の準地衡風渦位の南北勾配が領域内で符号を変える必要がある。この基本場の南北渦位勾配は

$$\frac{\partial\bar{q}}{\partial y}=\beta-\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}-\frac{\partial}{\partial p}\left\{\frac{f_0^2}{S(p)}\frac{\partial\bar{u}}{\partial p}\right\}=\beta-\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}-\frac{f_0^2}{S(p)}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial p^2}-\frac{\partial\bar{u}}{\partial p}\frac{\partial}{\partial p}\left\{\frac{f_0^2}{S(p)}\right\} \tag{8.4.20}$$

と表されるので、これは $\partial^2\bar{u}/\partial y^2$ だけでなく、$\partial^2\bar{u}/\partial p^2$ 及び $\partial\bar{u}/\partial p$、さらに安定度の鉛直方向の変化率$\partial/\partial p\{f_0^2/S(p)\}$ にも依存することに注意する必要がある。なお、地上付近と大気上端付近以外でも $\partial\bar{u}/\partial p=0$ である場合には、上述の条件は**順圧不安定**の条件となる。これについてはさらに第 8.4.2 項で述べる。

（2）領域内で常に$\partial\bar{q}/\partial y>0$ の場合

この場合、(8.4.19) 式の括弧内第 3 項の積分は正なので、左辺が 0 になるためには第 1 項の積分が負、または第 2 項の積分が正でなければならない。簡単のために大気上端付近では常に $\partial\bar{u}/\partial p=0$ とすれば、第 2 項は 0 となるので、第 1 項だけを考えれば良い。$\partial\bar{u}/\partial p$ が地上付近で常に正の値をとると、第 1 項の積分は負にはならないので、条件が満足されるには $\partial\bar{u}/\partial p$ が地表のどこかで負の値を取らねばならない。温度風の関係を考えれば、これは地表面における南北温度傾度がどこかで負（北ほど気温が下がる分布）になる必要があることを意味する。中緯度における地表付近の気温は基本的にこの条件を満たしており、不安定波動が起こる可能性があると言える。このような傾圧場で生じる不安定を**傾圧不安定**（baroclinic instability）と呼ぶ。すなわち、領域内で常に $\partial\bar{q}/\partial y>0$ であり、かつ $\partial\bar{u}/\partial p<0$ となる領域がある場合（鉛直シアーがある場合）が傾圧不安定の条件となる。第 8.2 節の 2 層モデルで鉛直シアーを想定したのはこの条件に対応している。ただし、これはあくまでも流れの場が不安定になるための必要条件を与えるものであり、この条件が満たされたからと言って流れが不安

定になることを保証するものではない（十分条件ではない）。

8.4.2 順圧不安定の必要条件

ここでは前項の不安定の条件の一例として、順圧不安定の必要条件について述べる。順圧大気は等圧面上で密度も一定となり（つまり等圧面天気図に等温線が引けない）、温度風の関係により地衡風には鉛直シアーがない状態となる。するとその不安定の必要条件は、前項の (8.4.19) 式において $\partial u/\partial p = 0$ としたものに対応し、

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} \frac{|\hat{\psi}|^2}{|\bar{u}-c|^2} dy = 0 \tag{8.4.21}$$

さらに書き換えると

$$\int_{y_1}^{y_2} \left(\beta - \frac{d^2\bar{u}}{dy^2}\right) \frac{|\hat{\psi}|^2}{|\bar{u}-c|^2} dy = 0 \tag{8.4.22}$$

となる（鉛直方向に変化がないので、(8.4.19) で行っていたpによる積分もここでは必要がない）。これらの式においては、$|\hat{\psi}|^2/|\bar{u}-c|^2 > 0$ なので、この積分が 0 となるためには、$\partial\bar{q}/\partial y$ すなわち $\beta - d^2\bar{u}/dy^2$が区間 $[y_1, y_2]$ のどこかでその値の符号を変えねばならない。従って、もとの微分方程式が不安定な波動解を持つためには、基本場の絶対渦度の南北勾配 $\beta - d^2\bar{u}/dy^2$ が領域内で符号を変えることが必要であると言える。

この場合の力学的不安定を**順圧不安定**（barotropic instability）という。非回転系すなわち $\beta = 0$ の場合を考えると、この「$d^2\bar{u}/dy^2$が符号を変える」という条件は基本場の流速 $\bar{u}$ のy方向の分布が変曲点を持つと言い換えても良く、一般の流体力学で**レイリーの変曲点定理**（Rayleigh's inflexion point theorem）として知られている結果と一致する。これも前項と同様に、不安定になるための必要条件であり、十分条件ではない。

図 8.7 に、模式的な西風ジェットの風速 $\bar{u}$ の分布とその 2 階微分 $d^2\bar{u}/dy^2$ の分布を示している。図の上段は $\bar{u}(y) = 1 - y^2$ で、その 2 階微分は負の定数となり、$\beta - d^2\bar{u}/dy^2$の符号は変化しないので、不安定は起こらない。しかしジェット極大から南北に離れると西風風速が 0 になり、さらに離れると東風が強まることになって非現実的である。下段はガウス分布 $\bar{u}(y) = e^{-ay^2}$ で、ジェット極大の位置では 2 階微分は負だがその近傍では正になる領域があるため、$\beta - d^2\bar{u}/dy^2$はジェットの近傍で符号を変える可能性が生じる。これにより、西風ジェットの近傍では順圧不安定が起こる場合があることが示される。ただし、現実大気の総観規模の偏西風ジェットの場合は、温度風の関係により、水平温度傾度の大きい層を伴うので、順圧不安定よりも傾圧不安定の方が起こりやすいと考えられる。

基本場の絶対渦度の南北勾配 $\beta - d^2\bar{u}/dy^2$ において、βは正であるから、不安定の必要条件が満たされるには $d^2\bar{u}/dy^2 > \beta > 0$ となるところが存在しなければならない。南北方向の空間スケールをLとすると、$d^2\bar{u}/dy^2 > \beta$ が成り立つためには $L \lesssim \sqrt{U/\beta}$ でなければならず、地球大気の場合、U～20 m s^{-1} とするとL ≲1000km となる。

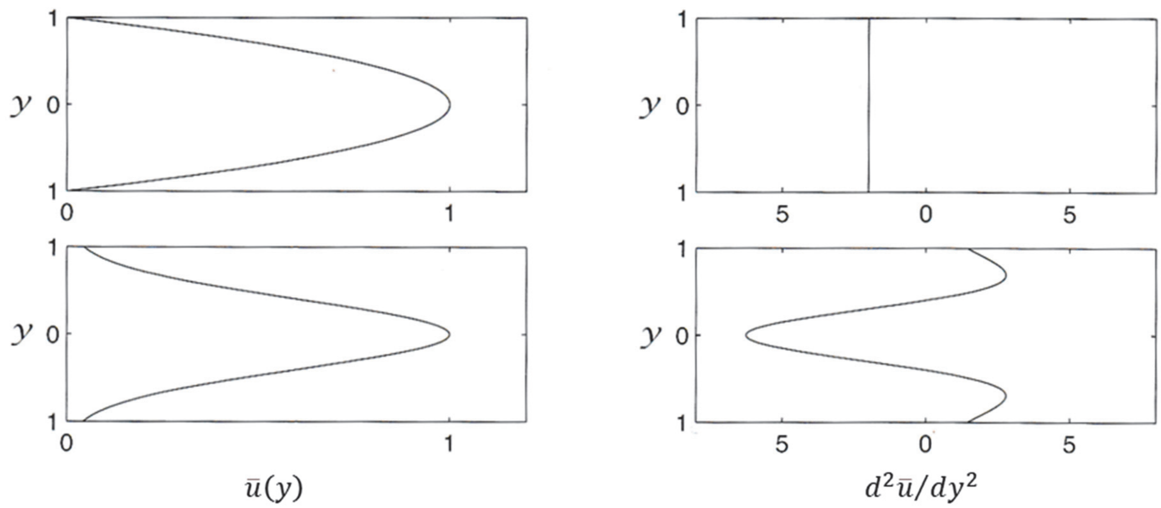


図 8.7　東西風速の南北分布（左）とその 2 階微分（右）。
上図は $\bar{u}(y) = 1 - y^2$、下図は $\bar{u}(y) = e^{-ay^2}$。（Vallis 2006）

8.4.3 ロスビー波の考え方を用いた不安定波動の解釈

ここまでで、不安定の必要条件として 「$\partial\bar{q}/\partial y$ が符号を変えること」すなわち「$\bar{u}$ が変曲点を持つこと」が示された。このような条件下でどのような運動が考えられるか、ロスビー波（第 7 章）を例に考えてみる。なお、第 7 章でロスビー波の説明をした際には基本場の渦位勾配が 0 でないことが必要であると指摘されたことに留意していただきたい。

図 8.8 は、x方向の風速がy方向に変化している状態を示している。風速分布がz方向に一様であれば、順圧的な流れである。図でy軸の中央が$y = 0$で、そこは$\bar{u}$が符号を変え、$y > 0$ では$\bar{u} < 0$、$y < 0$ では$\bar{u} > 0$となっている。$y = 0$は$\bar{u}$の変曲点でもある。

このとき、f平面（$\beta = 0$）とすると、$\bar{q} = -\partial\bar{u}/\partial y$ であり、$\bar{q}$は$y = 0$で極大となる。そして$y > 0$ では$\partial\bar{q}/\partial y < 0$、$y < 0$ では$\partial\bar{q}/\partial y > 0$ である。$y = 0$で$\partial\bar{q}/\partial y$が符号を変えている。

いま、このような流れの中でx軸に沿って伝播するロスビー波を考える。波数kのロスビー波の位相速度は、

$$c_r = \bar{u} - k^{-2}\frac{\partial\bar{q}}{\partial y} \tag{8.4.23}$$

である（付録 7C 参照）。通常の中緯度大気中の総観規模以上のロスビー波であれば、$\partial\bar{q}/\partial y \cong \beta$ であり、(8.4.23) の右辺第 2 項は常に正なので、ロスビー波は常に流れに相対的に西向きに進むが、今はβ効果の代わりに$\partial\bar{q}/\partial y$の環境場の中の波動を考えるので、$\partial\bar{q}/\partial y$すなわち$-\partial^2\bar{u}/\partial y^2$の符号によって波動の進む方向が決まる。$y < 0$ においては $\bar{u} > 0$で基本場は西風であり、またそこでは $\partial\bar{q}/\partial y > 0$ なのでロスビー波は流れに相対的に西向きに進む（$c_r - \bar{u} < 0$）。波数kが適切な値であれば $c_r = 0$ の定常波となりうる。$y > 0$ においては $\bar{u} < 0$ で基本場は東風であり、$\partial\bar{q}/\partial y < 0$ なのでロスビー波は流れに相対的に東向きに進む（$c_r - \bar{u} > 0$）。ここでも波数kが適切な値であれば定常波となりうる。

図 8.9 は上述の環境で $y = 0$ をはさんで 2 組の波列が生じた状態を示している。$y > 0$ の領域では負渦度 A と正渦度 B により、A と B の間の E では南向きの流れが生じる（白抜き矢印）。その流れは

$y < 0$ の領域にある正渦度 D に影響するだろう。ところで、基本場は、$y = 0$（x軸沿い）が$\bar{q}$の極大であり（図 8.8 右）、すなわち相対渦度の極大である。すると、負渦度 A と正渦度 B により励起された E の南向きの流れは、$y = 0$より南では正渦度移流を生じる。すると、D の正渦度は増大する。同様に、負渦度 C と正渦度 D との間の F でも南向きの流れが励起され、その流れと、基本場の流れによる$\bar{q}$分布により、A の位置では負の渦度移流が生じて、もともと負渦度であった A ではさらに負渦度が強まる。このように、基本場の流れが不安定の必要条件を満たしている中で、波列 AB と波列 CD が適当な位相でロックされると、それぞれの波動が成長しつつ他方の波動の成長に正のフィードバックをして、負渦度擾乱 A+C と正渦度擾乱 B+D が不安定成長する可能性が生じる。また位相の位置関係によっては弱めあうこともある。これが順圧不安定の一つの考え方である。

現実大気中の現象としては、Nagata (1993) が日本海寒帯気団収束帯（JPCZ）を順圧不安定と関連付けて論じている。

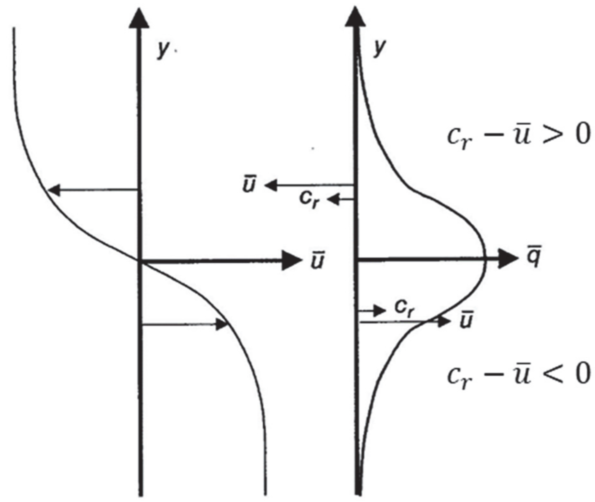


図 8.8　基本場の東西流$\bar{u}$と、それによる渦位$\bar{q}$の南北分布。c_r は$\bar{u}$と$\bar{q}$の分布に対応して生じるロスビー波の位相速度。（Hoskins and James　2014）

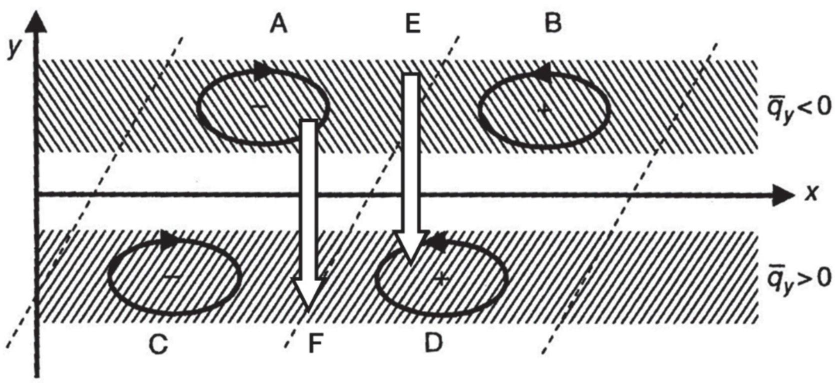


図 8.9　図 8.8 の基本場の流れにおいて生じる波動の模式図。（Hoskins and James 2014 に加筆）

ここでは順圧不安定は $y=0$ をはさんで北側と南側に生じた 2 つの波列の相互作用によって生じると考えることができた。すなわち、この項のはじめに書いた「$\partial\bar{q}/\partial y$ が符号を変えること」という条件は、基本流に対して互いに逆方向に進むロスビー波が生じ、それらが相互作用することを意味する。このことの応用として、台風の眼に関連した擾乱として説明される渦ロスビー波について付録 8A に記しておく。

これに対して第 8.4.1 項の最後に指摘された傾圧不安定の条件「領域内で常に $\partial\bar{q}/\partial y>0$ であり、かつ $\partial\bar{u}/\partial p<0$ となる領域がある場合（鉛直シアーがある場合）」は、全層で基本場の流れに対して西進するロスビー波が発生する可能性があり、ただしその波動の地面に対する位相速度は（$\bar{u}$の差異により）下層と上層で異なる」と言える。そのように考えれば、傾圧不安定とは、対流圏中層をはさんで上側と下側に位相速度の異なる波列が生じ、それらが相互作用すると考えることができる。これは第 5 章と第 8.2 節でも示唆されており、後の第 8.5 節で改めて論じる。

8.4.4 順圧不安定のエネルギー論

この項では、順圧不安定擾乱のエネルギー源が、水平シアーを伴う基本場の平均東西流が持つ運動エネルギーであることを説明する。気圧座標系で書いたβ平面上におけるプリミティブ方程式は、順圧大気では非発散のため $\omega=0$ として良いので、

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}-fv=-\frac{\partial\Phi}{\partial x} \tag{8.4.24a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+fu=-\frac{\partial\Phi}{\partial y} \tag{8.4.24b}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{8.4.24c}$$

と書ける（Φはジオポテンシャル）。いま考える領域は東西方向には周期的で、南北方向には $y=y_1$ と $y=y_2$ に剛体壁があるものとする。従って、境界条件は $y=y_1,\ y_2$ において$v=0$ とする。

水平シアーのある東西流 $\bar{u}(y)$を基本場とする微小振幅擾乱のプリミティブ方程式は、(8.4.24a-c) より、

$$\frac{\partial u'}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial u'}{\partial x}+v'\frac{d\bar{u}}{dy}-fv'=-\frac{\partial\Phi'}{\partial x} \tag{8.4.25a}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial v'}{\partial x}+fu'=-\frac{\partial\Phi'}{\partial y} \tag{8.4.25b}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}=0 \tag{8.4.25c}$$

となる。境界条件は $y=y_1,\ y_2$ において$v'=0$ である。これから次のような擾乱のエネルギー方程式が得られる。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\frac{1}{2}(u'^2+v'^2)\right]+\frac{d\bar{u}}{dy}u'v'=-\frac{\partial}{\partial x}(\Phi'u')-\frac{\partial}{\partial y}(\Phi'v') \tag{8.4.26}$$

この式を東西平均（¯で表す）してx微分の項を消去し、さらにyについて積分して境界条件を用いる

ことで右辺第 2 項を消去することにより、

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{y_1}^{y_2}\frac{1}{2}\left(\overline{u'^2}+\overline{v'^2}\right)dy=-\int_{y_1}^{y_2}\frac{d\bar{u}}{dy}\overline{u'v'}dy \tag{8.4.27}$$

が得られる。

擾乱の不安定成長が起こる場では、微小振幅擾乱の運動エネルギーは時間とともに指数関数的に増大するので、(8.4.27) の右辺は正の値でなければならない。このことは、不安定な場合には $d\bar{u}/dy>0$ の領域で $\overline{u'v'}<0$、$d\bar{u}/dy<0$ の領域で $\overline{u'v'}>0$ となる傾向があることを意味している。$\overline{u'v'}$ は、擾乱の東向き運動量の北向き輸送量（フラックス）であり、$u'v'>0$ の場合は東向きの風と北向きの風が同じ場所で強い（または同じ場所で弱い）状態であることを表す。

図 8.9 の状態について考えてみよう。基本場の東西流の分布は $d\bar{u}/dy<0$ である。その中で 2 つの波列が位相ロックしたことにより、負渦度擾乱 A＋C と正渦度擾乱 B＋D が生じ、共に、北東－南西に傾斜した軸を持っている。このため、全体として $u'v'>0$ である。これらの擾乱により、基本場の東西流 $\bar{u}$ の大きい領域（$y<0$ で $\bar{u}>0$）から小さい領域（$y>0$ で $\bar{u}<0$）へと、東向き運動量が輸送される（図 8.9 の白矢印の領域では西向き運動量が $\bar{u}>0$ の領域へ輸送されている）。これによって基本場の水平シアーが小さくなり、基本場の運動エネルギーが減少することになる。一方、基本場の東西流の運動量$\bar{u}$を擾乱の南北運動v'で輸送することにより擾乱の東西運動u'が生成される。基本場と擾乱の運動エネルギーの和は保存するので、擾乱は基本場の水平シアーのある流れの運動エネルギーをエネルギー源として発達することがわかる。

このように順圧不安定では、西風が南ほど大きい（$d\bar{u}/dy<0$）領域では$\overline{u'v'}>0$ となり、擾乱は北東から南西の方向へ傾く形になり、逆に、西風が北ほど大きい（$d\bar{u}/dy>0$）領域では、$\overline{u'v'}<0$ となり、擾乱は北西から南東へ傾く。つまり、順圧不安定擾乱は基本場の平均東西流のシアーとは逆向きに傾く構造を持つことになる。

8.5 傾圧不安定における Eady（イーディ）問題

第 8 章の最後のこの節では、鉛直方向を連続的に取り扱った場合の傾圧大気の流体力学的不安定を Eady (1949) に基づき議論する。この問題を最初に解いたのは Charney (1947) であるが、それよりやや遅れて Eady (1949) が少し異なる設定でこの問題を解いた。特に Eady の問題設定では不安定問題のノーマルモード解が初等関数で表され、不安定波動の構造を表す固有関数とその成長率を表す固有値が比較的容易に解析できるので、多くの教科書で紹介されている。しかしその反面、$\beta=0$ を仮定していることや、大気上端に剛体壁を置くのと同等の境界条件を採用していることなど、現実大気との相違点があることには留意が必要である。

8.5.1 問題設定

中緯度対流圏の大気を想定し、地表付近で一定の南北温度傾度を持ち、それと温度風バランスするような鉛直シアーがある風速場の不安定について考える。そのような基本場を、第 7.4 節で内部ロスビー波について用いた対数気圧座標系 $Z\equiv -H\ln(p/p_0)$ を用いて、

$$\bar{\psi}=-\bar{u}y=-\frac{U}{H}Zy \qquad \left(\bar{u}=-\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial y}=\frac{U}{H}Z,\quad 0\le Z\le H\right) \tag{8.5.1}$$

とする。ここでUは大気上端の基本場の東西風速であるとともに、大気層の鉛直シアーを表し、$U/2$ が大気の中間高度における基本場の東西風速である。Hは対数気圧座標系のスケールハイトであり、ここでは大気上端の高さとする。このような基本場のまわりに起こる線形波動の不安定性について、$\beta = 0$及び対流圏上端・下端で鉛直運動なしという境界条件のもとで考える。

なお、Charney (1947) は同様の問題について、$\beta \neq 0$、大気上端は無限遠（$p_t = 0$）という条件の下で解いた。しかし Charney（チャーニー）問題の解を構成するには特殊関数の知識が必要になるので、ここでは扱わない。

8.5.2 問題の定式化

第 7.4 節で内部ロスビー波に対数気圧座標系の準地衡風渦位方程式を適用した際に見たように、準地衡風渦位方程式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left\{f_0 + \beta y + \nabla_Z^2 \psi + \frac{f_0^2}{\rho_Z}\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{\rho_Z}{N_Z^2}\frac{\partial \psi}{\partial Z}\right)\right\} = 0 \tag{8.5.2}$$

である。ここでまた流線関数を $\psi = \bar{\psi} + \psi'$のように平均流と変動成分に分け、平均流を $\bar{u} = -\partial\bar{\psi}/\partial y$とする。さらに今回は、

・基本場の密度は一定とする。（ブシネスク近似）

・f面近似（$\beta = 0$）。

・平均東西流の鉛直シアーは一定（U/H）とする。

・大気の下端と上端（$Z = 0$ と $Z = H$）において鉛直流は 0 とする（rigid lid approximation）。

以上の仮定により準地衡風渦位方程式の変動成分は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\nabla_Z^2 \psi' + \frac{f_0^2}{N_Z^2}\frac{\partial^2 \psi'}{\partial Z^2}\right) = 0 \tag{8.5.3}$$

と書き換えられる。この式で表される波動の不安定を検討する。なお、このとき上記の仮定により

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = \beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \frac{f_0^2}{N_Z^2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial Z^2} = 0 \tag{8.5.4}$$

であることにも注意しておこう。

一方、対数気圧座標系の熱力学方程式は断熱では

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{V}\cdot\nabla_Z\right)\frac{\partial \Phi}{\partial Z} + N_Z^2 W = 0 \tag{8.5.5}$$

である（付録 2B）。Wはこの座標系における鉛直風である。ここに $\Phi = f_0\psi$ も使うと、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial \psi}{\partial Z} + \frac{N_Z^2}{f_0}W = 0 \tag{8.5.6}$$

と書き直せるので、その変動成分は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial \psi'}{\partial Z} - \frac{\partial \psi'}{\partial x}\frac{\partial \bar{u}}{\partial Z} + \frac{N_Z^2}{f_0}W = 0 \tag{8.5.7}$$

となる。

境界条件は、第 8.4 節と同様に、

（1）$y = \pm L$ において $v' = \partial\psi'/\partial x = 0$

（2）$Z = 0$と $Z = H$ において $W = 0$

とする。このうち 2 番目の境界条件を (8.5.7) に適用すると、

$$Z = 0, H \text{ において} \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial\psi'}{\partial Z} - \frac{\partial\bar{u}}{\partial Z}\frac{\partial\psi'}{\partial x} = 0 \tag{8.5.8}$$

というψ'に関する境界条件に書き直すことができる。

8.5.3 Eady 問題のノーマルモード解

方程式 (8.5.3) の解として、x方向に伝播する波動解

$$\psi'(x, y, Z, t) = \hat{\psi}(Z)e^{ik(x-ct)}\cos ly \tag{8.5.9}$$

を考える（$c = c_r + ic_i$）。このとき、$v' = \partial\psi'/\partial x = ik\hat{\psi}(Z)e^{ik(x-ct)}\cos ly$ より、南北方向の境界条件（1）は、

$$l = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{L} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{8.5.10}$$

のとき満たされる。この解を (8.5.3) 式に代入して整理すると、$\hat{\psi}(Z)$ に関する 2 階常微分方程式

$$ik\left(\frac{UZ}{H} - c\right)\left\{\frac{f_0^2}{N_Z^2}\left(\frac{d^2\hat{\psi}}{dZ^2}\right) - (k^2 + l^2)\hat{\psi}\right\} = 0 \tag{8.5.11}$$

が得られる。ここで、(8.5.1) より $\bar{u} = UZ/H$ としている。同様に (8.5.9) 式を (8.5.8) 式に代入して整理すれば、$\hat{\psi}$に関する境界条件

$$Z = 0, H \text{ において} \quad \left(\frac{UZ}{H} - c\right)\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial Z} - \frac{U}{H}\hat{\psi} = 0 \tag{8.5.12}$$

が得られる。

不安定波動に関しては (8.5.11) は、$c_i \neq 0$ のため $UZ/H - c \neq 0$ であることから、

$$H^2\frac{d^2\hat{\psi}}{dZ^2} = \mu^2\hat{\psi}\ , \quad \mu^2 = {\lambda_d}^2(k^2 + l^2)\ , \quad \lambda_d \equiv \frac{N_Z H}{f_0} \tag{8.5.13}$$

となる。ここで、λ_d は成層大気に対するロスビーの内部変形半径であり、μは擾乱の水平スケールに関する無次元のパラメータである。この微分方程式の一般解は

$$\hat{\psi}(Z) = A\sinh(\mu Z/H) + B\cosh(\mu Z/H) \tag{8.5.14}$$

となる（ここでは $\mu > 0$ としておく）。この一般解を境界条件 (8.5.12) に代入すると、関係式

$$\mu(UZ/H - c)\{A\cosh(\mu Z/H) + B\sinh(\mu Z/H)\} - U\{A\sinh(\mu Z/H) + B\cosh(\mu Z/H)\} = 0 \tag{8.5.15}$$

が得られ、これが $Z = 0, H$ で成り立つという条件から、A、Bに関する連立方程式

$$-c\mu A - UB = 0 \tag{8.5.16a}$$

$$\mu(U - c)(A\cosh\mu + B\sinh\mu) - U(A\sinh\mu + B\cosh\mu) = 0 \tag{8.5.16b}$$

が得られる。この斉次方程式が非自明解を持つためには、

$$\mu^2 c^2 - U\mu^2 c + U^2(\mu \coth \mu - 1) = 0 \tag{8.5.17}$$

が成り立たなければならない。これをcについて解くと、

$$c = \frac{U}{2} \pm \frac{U}{2}\left[1 - \frac{4}{\mu^2}(\mu \coth \mu - 1)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{8.5.18}$$

となるので、

$$\frac{\mu^2}{4} - \mu \coth \mu + 1 < 0 \tag{8.5.19}$$

のときcは非実数となり、波動解 (8.5.9) は不安定となりうる。ここで、関係式

$$\coth \mu = \frac{1}{2}\left(\tanh\frac{\mu}{2} + \coth\frac{\mu}{2}\right)$$

を使い、$\tanh(\mu/2)\coth(\mu/2) = 1$ にも注意して (8.5.19) を因数分解すると、

$$\left(\frac{\mu}{2} - \tanh\frac{\mu}{2}\right)\left(\frac{\mu}{2} - \coth\frac{\mu}{2}\right) < 0$$

となるが、任意のμ（> 0）に対して $\mu/2 > \tanh(\mu/2)$ なので、この条件はμが

$$\frac{\mu}{2} < \coth\frac{\mu}{2} \qquad \text{すなわち} \quad \frac{\mu}{2} < \frac{\mu_c}{2} \cong 1.2 \tag{8.5.20}$$

の関係式を満たすことである。すなわち (8.5.20) の条件を満たす場合にcは虚数部分を持ち、解 (8.5.9) は不安定となる。このとき、(8.5.18) から

$$c_r = \frac{U}{2}, \quad c_i = \pm\frac{U}{\mu}\left[\left(\frac{\mu}{2} - \tanh\frac{\mu}{2}\right)\left(\coth\frac{\mu}{2} - \frac{\mu}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{8.5.21}$$

である。この式からわかることを以下にまとめておく。（第 8.2 節の 2 層モデルの場合と比較しながら見ること。）

（1）c_rは傾圧不安定波のx方向の位相の伝播速度を与えるが、この伝播速度 $c_r = U/2$ は考えている大気の中間の高度の $\bar{u}$ に等しい。このとき擾乱はあたかもその層の風速で流されているように見えるので、その高度（$c_r = \bar{u}$となる高度）をステアリングレベル（steering level）と呼ぶことがある。

（2）傾圧不安定の条件 (8.5.20) をμの定義式 (8.5.13) を使って波数の条件に書き直すと、

$$(k^2 + l^2)^{\frac{1}{2}} < \frac{\mu_c}{\lambda_d} \cong 2.4\frac{f_0}{N_z H} \tag{8.5.22}$$

この式から、不安定になるのは、ある波長（臨界波長）以上の波であり、臨界波長は安定度N_zが大きいほど大きくなるが、鉛直シアーの強さUには依存しないことがわかる。

（3）不安定波の成長率 $\sigma = kc_i$ は (8.5.21) 式よりU（鉛直シアーの強度）に比例し、またμに依存する。成長率の最大値を与える $\mu = \mu_m$ は、$l = 0$ の場合、計算によると $\mu_m = 1.61$ となる。よって、成長率が最大となる波長は、(8.5.13) より

$$|\boldsymbol{k}_m|^2 = \frac{\mu_m^2}{\lambda_d^2} \tag{8.5.23}$$

対流圏の $N_Z \sim N$ の典型的な値 10^{-2} s^{-1}（気温減率 6.5℃ $(100m)^{-1}$ に相当）、$f_0 =$ 10^{-4} s^{-1}、$H =$ 10 km と

すると、内部変形半径は λ_d〜1000 km 程度となる。成長率最大の波数に対応する波長は $l = 0$ の場合 $L_m = 2\pi/|\boldsymbol{k}_m|$〜3,900 km で、$k = l$ の場合の東西方向の波長は 5,500 km に達する。これは中緯度の偏西風帯で観測される傾圧不安定波の波長と同程度の大きさである。さらに、この不安定波の成長率 σ の最大値（Eady 成長率: Eady growth rate）σ_E は、(8.5.21) のc_iとμ_m、k_mから

$$\sigma_E = 0.31\frac{U}{\lambda_d} = 0.31\frac{f_0}{N_Z}\frac{U}{H} \tag{8.5.24}$$

となり、鉛直シアー（U/H）が大きいほど、また鉛直安定度（N_Z）が小さいほど、不安定波動が速く成長すると言える。この成長率の極大値は典型的には 0.5 day^{-1} 程度、すなわち波動がe倍に成長するのにかかる最短の時間は 2 日程度である。

8.5.4 Eady 不安定モードの構造

ここでは傾圧不安定波の流線関数 ψ' を具体的に決める。(8.5.16a) のAとBの関係より、$\hat{\psi}$ をAのみを用いて表すと、

$$\hat{\psi}(Z) = A\left[\sinh\left(\frac{\mu Z}{H}\right) - \frac{c\mu}{U}\cosh\left(\frac{\mu Z}{H}\right)\right] = A\left[\sinh\left(\frac{\mu Z}{H}\right) - \frac{c_r\mu}{U}\cosh\left(\frac{\mu Z}{H}\right) - i\frac{c_i\mu}{U}\cosh\left(\frac{\mu Z}{H}\right)\right] = A\gamma e^{ik\varphi}$$

$$\gamma = \left[\left\{\sinh\left(\frac{\mu Z}{H}\right) - \frac{c_r\mu}{U}\cosh\left(\frac{\mu Z}{H}\right)\right\}^2 + \left\{\frac{c_i\mu}{U}\cosh\left(\frac{\mu Z}{H}\right)\right\}^2\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad \tan k\varphi = \frac{\frac{c_i\mu}{U}\cosh\left(\frac{\mu Z}{H}\right)}{\sinh\left(\frac{\mu Z}{H}\right) - \frac{c_r\mu}{U}\cosh\left(\frac{\mu Z}{H}\right)} \tag{8.5.25}$$

が得られる。これより

$$\psi'(x, y, Z, t) = A\gamma(Z)e^{kc_it}e^{ik(x - c_rt + \varphi(Z))}\cos ly \tag{8.5.26}$$

となる。この式で表される傾圧不安定波の振幅と位相は、高度とともに (8.5.26) 式のように変化する。流線関数 ψ'（高度場）が決まれば、波動に伴う速度場及び温度場は、地衡風の関係や熱力学方程式、静力学の式から

$$v' = \frac{\partial\psi'}{\partial x} \quad , \qquad W = -\frac{f_0}{N_Z^2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial\psi'}{\partial Z} - \frac{\partial\psi'}{\partial x}\frac{\partial\bar{u}}{\partial Z}\right] \quad , \qquad T' = \frac{f_0H}{R}\frac{\partial\psi'}{\partial Z}$$

等により完全に決まる。

図 8.10 には傾圧不安定波のジオポテンシャル、鉛直流、温度場の東西鉛直断面構造が、成長率が最大になる場合について示している。ここで重要なのは、ψ', θ', ω 相互の位相の関係である。まず、ψ'の位相は高さとともに西に傾く構造を持っていることに注目する。南北風の位相は描かれていないが、$v' = \partial\psi' / \partial x$ であることから、ψ'と同じ傾きを持ち 1/4 波長遅れる。これらから、

- 中層のトラフの前面→南風で暖気の上昇（$v'\theta' > 0,\ \omega\alpha' > 0$)
- 中層のトラフの後面→北風で寒気の下降（$v'\theta' > 0,\ \omega\alpha' > 0$)

の関係があることになり、2 層モデルで見たのと同様に、擾乱の有効位置エネルギーから擾乱の運動エネルギーへの変換が行われていることがわかる。上の関係はまた、傾圧不安定波により熱が極向きに輸送されていること（$v'\theta' > 0$）も示している。もともと、傾圧不安定波は、基本流 $\bar{u}$ に鉛直シアーがあること、言い換えれば基本場に南北温度勾配があることによって発達し、熱を極向きに輸送し南

北方向の温度傾度を弱めようとする。すなわち、傾圧不安定波は、傾圧性を緩和する方向に作用する。このことをエネルギーの面から見ると、基本場の南北方向の温度傾度が弱まると、基本場の東西流が弱まるので、基本場の東西流が持つ運動エネルギーが減少し、その分、傾圧不安定波の有効位置エネルギー（そしてさらに運動エネルギー）に変換されていることになる。ただし、ここで述べた線形論の範囲では、基本場に対する影響を議論することはできないことに留意が必要である。

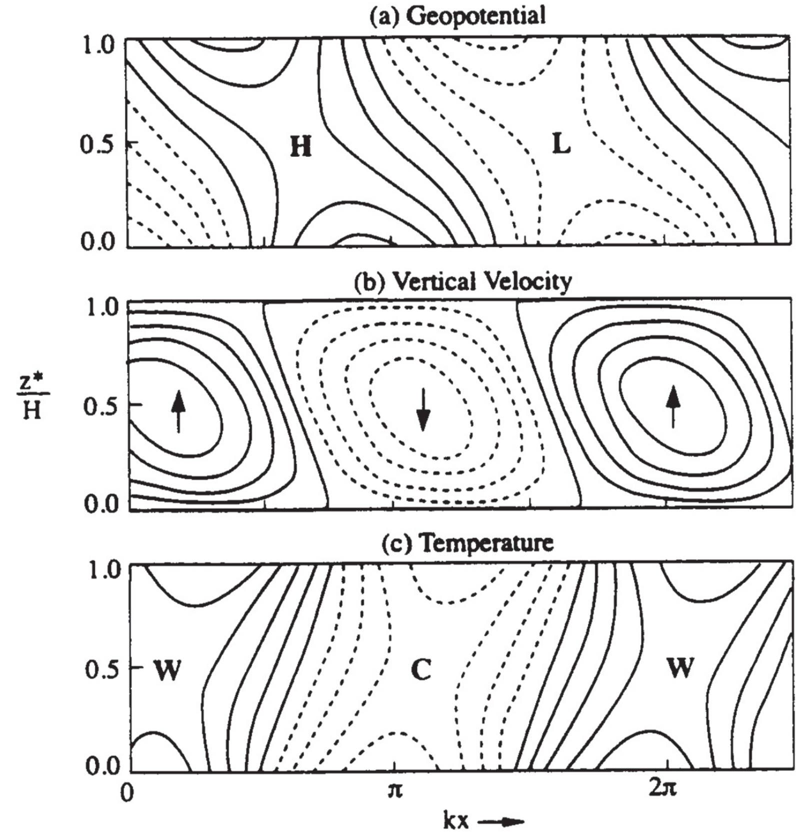


図 8.10　Eady 波の最も不安定な場合の東西鉛直断面。(a) ジオポテンシャル、(b) 鉛直速度、(c) 気温の、それぞれ擾乱成分。（Holton 2004）

第 8 章の参考文献

Charney, J. G., 1947: The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current. J. Meteor., 4, 135-162.

Eady, E. T., 1949: Long waves and cyclone waves. Tellus, 1, 33-52.

Nagata, M, 1993: Meso-b-scale vortices developing along the Japan-Sea Polar-Airmass Convergence Zone (JPCZ) cloud band: Numerical simulation. J. Meteor. Soc. Japan, 71, 43–57.

Takayabu, I., 1992: Kelvin-Helmholtz billow clouds on a frontal surface. J. Meteor. Soc. Japan, 70, 733-738.

付録 8A　渦ロスビー波と順圧不安定

台風の眼の壁雲をレーダーで観測すると、円形でなく楕円や多角形になることがあるのは、以前か

ら知られていた。さらに衛星観測により、眼の中にメソ渦が観測されることも、しばしば指摘される。例えば図 8A.1a では眼の中に 5 個のメソ渦があるように見える。このような現象は渦ロスビー波（vortex Rossby wave）として、第 8.4 節の順圧不安定と類似のメカニズムで説明されている。

湿潤対流により強い潜熱加熱が生じると、その下層では渦位が増大する（例えば北畠（2019b）第 2.4 節参照）。このため台風では眼の壁雲に沿って下層に高渦位のリング状の分布が生じる。第 8.4.3 項では水平シアーに伴う渦位極大域を右に見る方向に伝播する 2 組のロスビー波により順圧不安定が生じると説明されていたが、それと同様に、台風の眼の壁雲に沿った渦位極大域の外側では接線方向の基本流に相対的に時計回り、内側では反時計回りに波動が伝播する（図 8A.1b では渦位の代わりに相対渦度ζとされている）。これらが位相ロックして不安定波動が成長するとメソ渦として可視化されると説明される。

第 4 章や第 7 章で主として説明した、β効果を復元力とする惑星ロスビー波は、図 8A.1c のように惑星渦度の南北傾度に関連して、惑星渦度の大きいほうを右に見る方向に伝播していた。この惑星ロスビー波の東西風と南北風が、渦ロスビー波ではそれぞれ接線風速と動径風速に対応する。

渦ロスビー波の詳細は例えば坪木・伊藤（2013）を参照していただきたい。

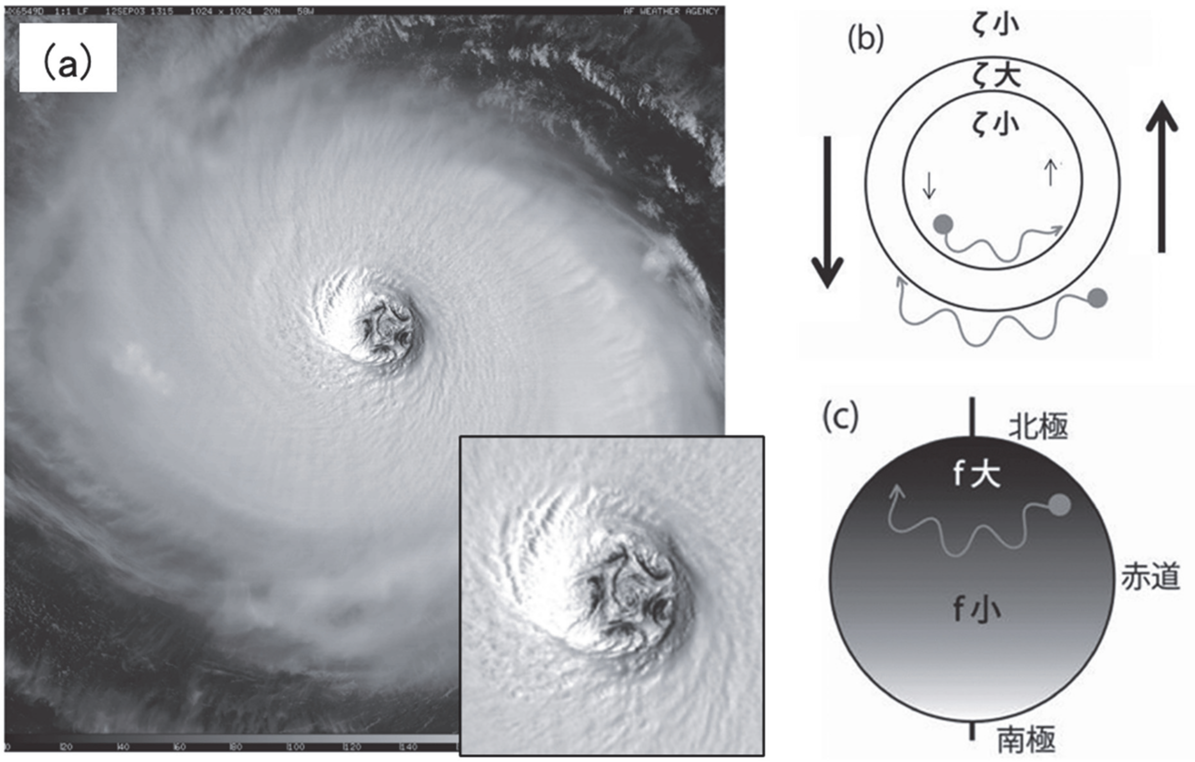


図 8A.1　(a) 衛星可視画像においてハリケーンの眼の中にメソ渦が見られた例（Kossin and Schubert 2004）。図の右下に眼の周辺の拡大図を示した。(b) 相対渦度ζの分布と渦ロスビー波の伝播の模式図、(c) 惑星ロスビー波の模式図。(b)と(c)は坪木・伊藤（2013）より引用。

付録 8A の参考文献

Kossin, J. P. and W. H. Schubert, 2004: Mesovortices in Hurricane Isabel. Bull. Amer. Meteor. Soc., 85, 151-153.

坪木和久、伊藤耕介、2013：メソ構造。台風研究の最前線（上）、気象研究ノート（226）、93-126。

第 9 章　大気境界層

地表面の影響を受けない、いわゆる自由大気（free atmosphere）に対して、地表面の影響を受ける層を、**大気境界層**（atmospheric boundary layer）という。第 1.2 節で触れたように、気象力学における摩擦力としては、大気分子が物体に接触することによって生じる分子粘性だけでなく、乱流による渦粘性がはるかに大きい。このため大気境界層には、大気分子が地表面に直接接触するごく薄い層（**接地層**）だけでなく、**乱流渦**（turbulent eddy）により運動量や温位が混合されることで大気が地表面の影響を受けている、厚さ 1～2km 程度の層を含めて議論する。

第 8 章までは、基本的に水蒸気や摩擦（粘性）のない条件下での主に総観スケールの気象現象について説明してきた。境界層過程はスケールの小さい局地的な気象現象と関係が深いが、総観スケールの気象現象の力学においては摩擦力として大規模な現象にも影響を与えるので、本章ではそのような側面に限定して述べる。境界層の詳しい説明については Stull (1988) 等の専門書を参照していただきたい。

9.1　境界層内の運動を表す方程式系

前章までの波動を扱う際に、基本場と擾乱を分離して扱う摂動法を用いて議論を行った。その場合の擾乱の波長は、一般に水平スケールの方が鉛直スケールよりはるかに大きいものであった。それに対して、境界層内の擾乱は乱流渦となり、水平スケールと鉛直スケールがほぼ同じになる。その最大スケールは境界層の深さとほぼ同じ 10^3m になりうる一方、最小スケールは分子粘性による拡散のスケールとほぼ同じ 10^{-3} m とされる。ここで興味のあるのは大規模な流れへの影響なので、それを表すための近似を行う。

9.1.1　ブシネスク近似

境界層における運動を表すための近似の一つ目は、第 6 章でも用いたブシネスク近似である。これは、境界層における密度変化が 10%程度であることから非圧縮流体と考えるが、対流を表現するには浮力が不可欠であるため、非圧縮（密度が変化しない）だが浮力が存在すると近似するものである。

局所直交座標系で、地球自転と摩擦を考慮した断熱の方程式系は、

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + fv + F_{rx} \tag{9.1.1a}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - fu + F_{ry} \tag{9.1.1b}$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + g\right) + F_{rz} \tag{9.1.1c}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial \theta}{\partial t} + u\frac{\partial \theta}{\partial x} + v\frac{\partial \theta}{\partial y} + w\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \tag{9.1.1d}$$

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}+\rho\frac{\partial v}{\partial y}+\rho\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0 \tag{9.1.1e}$$

ここでは Holton (2004) に基づき、第 6.2 節と同様に、密度は一定（$=\rho_0$）とし、基本場は静力学平衡にありzのみに依存するとして、そこからの変位を考える。温位θはzのみに依存する基本場の温位 $\theta_0(z)$ とそこからの変位 $\theta_1(x,y,z,t)$ で表す（$\theta=\theta_0(z)+\theta_1(x,y,z,t)$ ）。さらに、ここでは θ_1 を改めて θ とおく。それらにより、(9.1.1a-e) を以下のように表す。

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}+fv+F_{rx} \tag{9.1.2a}$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y}-fu+F_{ry} \tag{9.1.2b}$$

$$\frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z}+g\frac{\theta}{\theta_0}+F_{rz} \tag{9.1.2c}$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{\partial \theta}{\partial t}+u\frac{\partial \theta}{\partial x}+v\frac{\partial \theta}{\partial y}+w\frac{\partial \theta}{\partial z}=-w\frac{d\theta_0}{dz} \tag{9.1.2d}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{9.1.2e}$$

第 6 章では時間変化しない基本場 $\bar{\theta}$ からの微小な変位を θ' としていたが、ここではそれらをそれぞれ θ_0と θ で表していることに注意していただきたい。気圧pも第 6 章での $\,'$を省略している。

9.1.2 レイノルズ近似

近似の二つ目は、**レイノルズ平均**（Reynolds averaging）である。いま、個々の乱流渦を表す必要はないが、乱流を含む流れを量的に表したい。そのためには、微小なスケールの乱流渦に対しては十分に長い時間で平均する必要があるが、一方で、それによって大規模な流れ自体の変化傾向がすべて消えてしまっては意味がなく、それが消えない程度には短い時間で平均する必要がある。このため、物理量（例えば (9.1.2c, d) で導入した温位の変位θ）を、ゆっくりと変化する平均場 $\bar{\theta}$（前章までで用いていた摂動法での「基本場」は時間変化しなかったが、ここでの「平均場」は時間変化することに注意）と、乱流成分 θ' に分離する。このうち乱流成分は、考える時間スケールでは平均値は 0 になるとする。すなわち

$$\theta=\bar{\theta}+\theta',\quad \overline{\theta'}=0 \tag{9.1.3}$$

そしてさらに、変動成分（乱流成分）どうしの積の平均（共分散）は、一般に 0 にならないとする。例えば、熱の鉛直フラックス $w\theta$ の平均に関しては以下のように考える。

$$\overline{w\theta}=\overline{(\bar{w}+w')(\bar{\theta}+\theta')}=\bar{w}\bar{\theta}+\overline{w'\theta'},\qquad \overline{w'\theta'}\neq 0 \tag{9.1.4}$$

これを適用する前に、さらに (9.1.2a-d) を変形しておく。例えば (9.1.2a) の左辺に (9.1.2e) を適用すると、

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}+u\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u^2}{\partial x}+\frac{\partial uv}{\partial y}+\frac{\partial uw}{\partial z} \tag{9.1.5}$$

となる。ここで各変数を平均場と乱流成分に分けて、平均場を取ると、

$$\overline{\frac{du}{dt}} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{u}\bar{u} + \overline{u'u'}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{u}\bar{v} + \overline{u'v'}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\bar{u}\bar{w} + \overline{u'w'}\right) \tag{9.1.6}$$

またこれを次のように書き直すことにする。

$$\overline{\frac{du}{dt}} = \frac{\bar{d}\bar{u}}{dt} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{u'u'}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{u'v'}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{u'w'}\right) \tag{9.1.7}$$

ここで

$$\frac{\bar{d}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial}{\partial z}$$

で、平均運動に沿った時間変化を表す。

すると、(9.1.2a-e) は以下のようになる。

$$\frac{\bar{d}\bar{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + f\bar{v} - \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{u'u'}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{u'v'}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{u'w'}\right)\right] + \overline{F_{rx}} \tag{9.1.8a}$$

$$\frac{\bar{d}\bar{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - f\bar{u} - \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{u'v'}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{v'v'}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{v'w'}\right)\right] + \overline{F_{ry}} \tag{9.1.8b}$$

$$\frac{\bar{d}\bar{w}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + g\frac{\bar{\theta}}{\theta_0} - \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{u'w'}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{v'w'}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{w'w'}\right)\right] + \overline{F_{rz}} \tag{9.1.8c}$$

$$\frac{\bar{d}\bar{\theta}}{dt} = -w\frac{d\theta_0}{dz} - \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{u'\theta'}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{v'\theta'}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{w'\theta'}\right)\right] \tag{9.1.8d}$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \tag{9.1.8e}$$

となる。(9.1.8a-d) の大括弧の中の共分散項は、**乱流フラックス**（turbulent flux）を表す。例えば、$\overline{w'\theta'}$ は鉛直乱流熱フラックス（vertical turbulent heat flux）であり、$\overline{u'w'}$ は東西風の鉛直乱流運動量フラックス（vertical turbulent momentum flux）である。これらの項は、自由大気中では無視できるが、平均風と比較して乱流の激しい境界層では無視できない大きさである。乱流運動量フラックスは応力のように働くと見なせることから、**レイノルズ応力**（Reynolds stress）と呼ばれる。

9.1.3 大気境界層運動量方程式

地表面にごく近い粘性の大きい層より上の境界層内で、水平方向に一様に乱流が存在する場合、水平方向の平均風の運動方程式 (9.1.8a,b) は

$$\frac{\bar{d}\bar{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + f\bar{v} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{u'w'}\right) \tag{9.1.9a}$$

$$\frac{\bar{d}\bar{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - f\bar{u} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{v'w'}\right) \tag{9.1.9b}$$

と書ける。

ここで、自由大気中の平均場の地衡風 $\bar{u}_g$ と $\bar{v}_g$ を用いて、平均場の気圧傾度力を

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = f\bar{v}_g \ , \qquad \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = -f\bar{u}_g$$

と表せる。これを (9.1.9a,b) に用いると、境界層内でのバランス（時間変化がない場合、すなわち $\bar{d}/dt = 0$ の場合）は、

$$f(\bar{v} - \bar{v}_g) - \frac{\partial}{\partial z}(\overline{u'w'}) = 0 \ , \quad -f(\bar{u} - \bar{u}_g) - \frac{\partial}{\partial z}(\overline{v'w'}) = 0 \tag{9.1.10a, b}$$

のように書け、コリオリ力・気圧傾度力・乱流の項のつり合いを表すことになる。このうち乱流の項は観測が困難である。方程式系を解く（または予報方程式系で予報を行う）ためには、観測不能な量を何らかの観測可能な量で近似して、方程式系を閉じる（close）必要がある。このような近似を**クロージャー近似**（closure approximation）という。以下では 2 次の項である乱流フラックスを平均風速や平均温位を用いて近似する 1 次のクロージャーを考える。

9.1.4 よく混合された境界層

下層空気よりも地表面や海面の方が暖かく、静的安定度が比較的低く、熱力学的不安定による対流が卓越して境界層が鉛直によく混合される場合は、ごく下層（接地層）を除き、温位や水平運動の運動量（水平風）が鉛直方向にほぼ一様になる。この場合は、抵抗係数（drag coefficient）C_d を用いて、(9.1.10a,b) を以下のように近似することが考えられる。

$$f(\bar{v} - \bar{v}_g) = C_d|\bar{\boldsymbol{V}}|\frac{\bar{u}}{h} \ , \quad -f(\bar{u} - \bar{u}_g) = C_d|\bar{\boldsymbol{V}}|\frac{\bar{v}}{h} \tag{9.1.11a, b}$$

h は境界層の上端の高度、$\bar{\boldsymbol{V}} = (\bar{u}, \bar{v}, 0)$ である。すなわち

$$f\boldsymbol{k} \times \bar{\boldsymbol{V}} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla\bar{p} - \frac{C_d}{h}|\bar{\boldsymbol{V}}|\bar{\boldsymbol{V}} \tag{9.1.12}$$

である。(9.1.12) 式において、右辺第 2 項は風速ベクトルの方向とは逆向きに働く力として示される。気象学においては、これが通常、摩擦力と呼ばれるが、本章の冒頭で述べたように、ここで示しているのは分子粘性ではなく乱流によるものであることに注意が必要である。そしてこの効果により、大気分子が地表面に直接接していなくても、境界層内では気圧の低い側に風が吹き込む成分が生じると説明される。

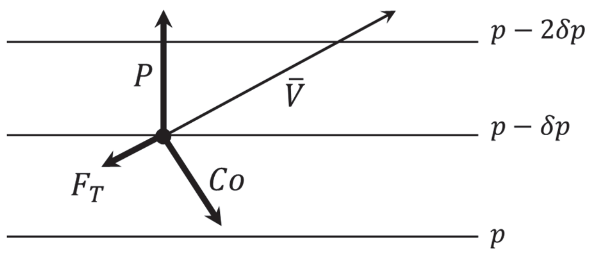


図 9.1　よく混合された境界層において、速度$\bar{V}$の空気塊に働く力のバランス。実線は等圧線。P：気圧傾度力、Co：コリオリ力、F_T：乱流抵抗（turbulent drag）。

9.1.5 中立～静的安定な境界層とエクマン層

静的に比較的安定な境界層では、熱力学的不安定による対流は抑制されるが、風速と風向は高度とともに大きく変化する。すると前項のような単純な近似は適切でなく、平均場を用いて乱流運動量フラックス発散の鉛直依存性を決定する必要がある。そのためには次のように表す（2 次の項を 1 次の項で近似している）。

$$\overline{u'w'} = -K_m\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right), \qquad \overline{v'w'} = -K_m\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\right), \qquad \overline{\theta'w'} = -K_h\left(\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial z}\right) \tag{9.1.13}$$

ここでK_mは運動量の渦拡散係数（eddy diffusivity of momentum）または渦粘性係数（eddy viscosity coefficient）、K_hは熱の渦拡散係数（eddy diffusivity of heat）と呼ばれる。この方法を K 理論（K theory）と呼ぶ。ただしこの K 理論は多くの制約がある。特に、係数Kは経験的に決定され、近似としては精度の高いものとは言えないことには留意が必要である。Kの値を決定する方法の一つでよく知られたものには混合距離理論があるが、ここでは省略する。

ここではK理論の近似 (9.1.13) を用い、またK_mを定数とすると、(9.1.10a,b) は以下のように書ける。これは古典的な**エクマン層**の式である。

$$K_m\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial z^2} + f\left(\bar{v} - \bar{v}_g\right) = 0\,, \quad K_m\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial z^2} - f\left(\bar{u} - \bar{u}_g\right) = 0 \tag{9.1.14a, b}$$

ここで、乱流を含む項がなくなり、すべて平均場で表せるので、以後は平均場を表す符号は省略する。

境界条件として、地表面では風速 0 で、高高度では風速は地衡風に等しくなるとすると、境界条件は以下のようになる。

$$\begin{aligned} &z = 0 \quad \text{で} \quad u = 0,\ v = 0 \\ &z \to \infty \quad \text{で} \quad u \to u_g\,,\ v \to v_g \end{aligned} \tag{9.1.15}$$

ここで、地衡風u_gとv_gは境界層よりも上空の平均場の値であり、定数（zに依存しない）である。これを解くために、(9.1.14a) + i×(9.1.14b) を計算して整理すると、

$$K_m\frac{\partial^2\{(u+iv)-(u_g+iv_g)\}}{\partial z^2} = if\{(u+iv)-(u_g+iv_g)\} \tag{9.1.16}$$

と書くことができ、ここから、(9.1.16) の解は

$$(u+iv)-(u_g+iv_g) = A\exp\left[\left(\frac{if}{K_m}\right)^{\frac{1}{2}}z\right] + B\exp\left[-\left(\frac{if}{K_m}\right)^{\frac{1}{2}}z\right]$$

と求められる。これをさらに簡単にするために、座標の取り方を工夫しよう。もとの方程式系は水平面内の回転に対して不変なので、x軸を地衡風の方向にとる。これにより、$v_g = 0$（すなわち気圧傾度力はy方向だけにある）とできる。ここで、$\sqrt{i} = (1+i)/\sqrt{2}$ を用い、さらに (9.1.15) の境界条件を用いて、北半球で $f > 0$ であることも考慮すると、$A = 0$、$B = -u_g$となる。よって解は

$$u + iv = -u_g\exp[-\gamma(1+i)z] + u_g$$

となる。ここで、$\gamma = \sqrt{f/2K_m}$ である。これを実部と虚部に分けると、

$$u = u_g(1 - e^{-\gamma z}\cos\gamma z)\,, \qquad v = u_g e^{-\gamma z}\sin\gamma z \tag{9.1.17a, b}$$

が得られる。この解は対数らせんを表し（図 9.2）、この風速分布を**エクマンスパイラル**（Ekman spiral）

と呼ぶ。$z=\pi/\gamma$ の高度で $v=0$ なので風は地衡風 u_g に平行でほぼ等しい風速になる。この高度をエクマン層（Ekman layer）の上端として $D_e \equiv \pi/\gamma$ と定義しておく。すなわち、

$$D_e = \pi\sqrt{2K_m/f} \tag{9.1.18}$$

である。中緯度での観測から、風は地表面から高度 1 km 程度で地衡風の値に近づくので、$D_e = 1$ km、$f = 10^{-4}$ s^{-1} とすると、$K_m \cong 5$ m^2 s^{-1} となる。

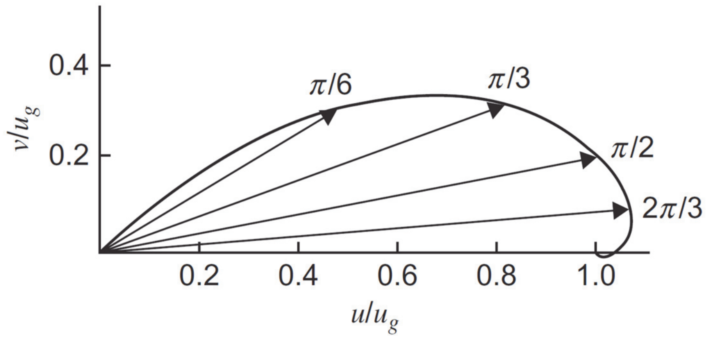


図 9.2　エクマンスパイラルの解である風のホドグラフ。矢印はエクマン層のいくつかの高度における風ベクトルで、スパイラル曲線はエクマン層の速度変化。スパイラル上の各点は γz の値で、高度を無次元化したものである。（Holton and Hakim 2012）

9.2 総観規模の渦のスピンダウン

前節の最後に述べたエクマン層は、比較的安定な成層であることなど、いくつかの仮定に基づく条件下での構造を持つ境界層であり、現実の境界層は常にその構造を持つわけではない。それでも、それを前提とすることで興味深い特徴を説明することができ、自由大気中の総観規模の擾乱を考える上での示唆が与えられる。なお、この節でも原則として北半球の大気の運動について述べる。

9.2.1 エクマン・パンピングと2次循環

いま、境界層がエクマン層の構造を持つと仮定する。エクマン層では、高度によって風向・風速が変化するが、水平風は全体に、気圧の高いほうから低いほうへと吹き込む成分を持っていた。そのため、エクマン層内では、その上の自由大気中の流れに対して左向きに質量が輸送されていることになるので、それを計算してみる。

エクマン層における地衡風に垂直な成分の風速vは (9.1.17b) で表されるので、エクマン層内の全質量輸送量Mは、密度ρを一定とすると、

$$M = \int_0^{D_e} \rho v dz = \rho u_g \int_0^{D_e} e^{-\frac{\pi z}{D_e}} \sin\left(\frac{\pi z}{D_e}\right) dz \tag{9.2.1}$$

と書ける。ここで、新たな変数 $Z = \pi z/D_e$ を採用すると、

$$M = \rho u_g \frac{D_e}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-Z} \sin Z\, dZ = \frac{1}{2}\frac{D_e}{\pi}\rho u_g \tag{9.2.2}$$

となる。ここで、

$$\int_0^\pi e^{-Z}\sin Z\,dZ = \frac{1}{2}(1+e^{-\pi}) \cong \frac{1}{2}$$

を使い、ただし近似記号は等号で置き換えている。質量輸送の方向が地衡風向に直交することを考慮して、(9.2.2) を一般化すると、質量輸送ベクトル $\boldsymbol{M}$ は、地衡風ベクトル $\boldsymbol{V}_g$ を用いて、

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{2}\frac{D_e}{\pi}\rho\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{V}_g \tag{9.2.3}$$

と書ける。

境界層において、空気（質量）が地衡風に対して左向きに輸送されることで、低気圧では収束が起こることはよく知られている。これを (9.2.3) を用いて表すと、エクマン層における質量発散は

$$\nabla\cdot\boldsymbol{M} = \frac{1}{2}\frac{D_e}{\pi}\rho\nabla\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{V}_g) = -\frac{1}{2}\frac{D_e}{\pi}\rho\boldsymbol{k}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{V}_g) = -\frac{1}{2}\frac{D_e}{\pi}\rho\zeta_g \tag{9.2.4}$$

と書ける。すなわち、地衡風渦度　$\zeta_g = \boldsymbol{k}\cdot\nabla\times\boldsymbol{V}_g$ を用いて、正（低気圧性）の地衡風渦度と質量収束、負（高気圧性）の地衡風渦度と質量発散が関係づけられる。

エクマン層内で収束した質量は、エクマン層上端を経て自由大気側に流出すると考えられる。密度一定と仮定しているので、連続の式を使うと、エクマン層上端の鉛直速度 w_e は

$$w_e = -\int_0^{D_e}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dz = -\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{M} = \frac{1}{2}\frac{D_e}{\pi}\zeta_g \tag{9.2.5}$$

と表せる。$D_e =$ 1 km で、総観規模擾乱の典型的な渦度である ζ_g =10^{-5} s^{-1} の場合、w_e =1.7×10^{-3} m s^{-1} =0.17 cm s^{-1} が得られる。これにより、境界層と自由大気との間で質量交換（及び物理量交換）が絶えず行われていることがわかる。しかしこれは総観規模擾乱の典型的な上昇流が 1 cm s^{-1} のオーダーであるのと比較すると 1 桁小さく、総観規模擾乱の主たる上昇流の原因が境界層摩擦なのではない。

このように、自由大気中の流れによって、境界層に**2次循環**（secondary circulation）が生じ、境界層内では乱流混合よりも 2 次循環のほうが支配的になって、自由大気との質量（・物理量）交換が行われることを、**エクマン・パンピング**（Ekman pumping）と呼ぶ。

図 9.3 は、自由大気中の低気圧性循環に伴って励起された 2 次循環を模式的に示している。低気圧性循環に伴い、境界層内では摩擦収束が生じ、自由大気への上昇流が生じる。

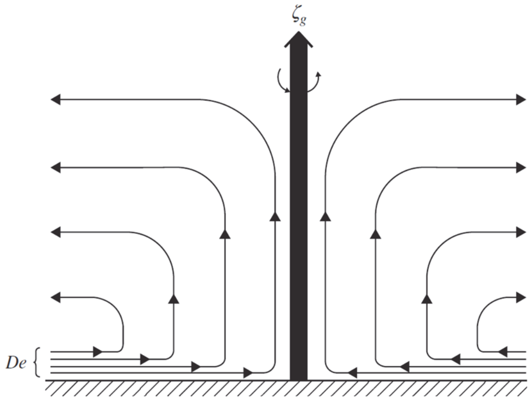


図 9.3　自由大気中の低気圧性循環に伴って境界層内の摩擦収束により生じた 2 次循環の模式図（Holton and Hakim 2012）。

なお、図 9.3 は、台風（熱帯低気圧）に伴う 2 次循環にも似ているが、台風では中心の上空に潜熱加熱による暖気核が形成され、その周辺に生じた水平温度勾配に関連する温度風バランスを維持するために 2 次循環が維持・強化される（例えば北畠（2019a）第 7.2 節を参照）ので、摩擦収束のみの場合とは異なる。

9.2.2 スピンダウン

境界層と自由大気との物理量の交換により、境界層に流れが生じるとともに、自由大気中の流れにも変化が生じる。図 9.3 のように、自由大気中に正渦度がある状態で、それに関連した 2 次循環が境界層に生じると、エクマン・パンピングにより、境界層内にあった渦度の相対的に小さい空気が自由大気中に上昇し、自由大気中の渦度が減少する。これは、自由大気中の拡散のみによって渦が弱まる（渦度が減少する）よりも速い速度で自由大気中の渦を弱めることで、低気圧を衰弱させる効果があると考えられる。

このような、2 次循環による渦の衰弱（**スピンダウン**：spin down）の時間スケールを見積もってみる。ここでは総観規模の順圧的な（傾圧性のない）渦を考える。第 5 章の地衡風渦度方程式はz座標系で近似的に

$$\frac{d\zeta_g}{dt} = -f\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = f\frac{\partial w}{\partial z} \tag{9.2.6}$$

と書け、地衡風渦度の時間変化が水平発散または鉛直速度の鉛直傾度で説明できる。いま、対流圏界面の高さを $z = H$ とすると、境界層上端（$z = D_e$）と圏界面の間の自由大気について、

$$\frac{d\zeta_g}{dt} = f\left[\frac{0 - w_e}{H - D_e}\right] \cong -\frac{fw_e}{H} \tag{9.2.6}$$

と書ける。ここで、$H \gg D_e$であり、また圏界面の鉛直速度は 0 としている。ここに (9.2.5) と (9.1.18) を代入すると、

$$\frac{d\zeta_g}{dt} = -\frac{fD_e}{2\pi H}\zeta_g = -\left(\frac{fK_m}{2H^2}\right)^{1/2}\zeta_g \tag{9.2.7}$$

この式からは地衡風渦度の時間変化として次の形の解が得られる。

$$\zeta_g(t) = \zeta_g(0)\exp(-t/\tau_e) \tag{9.2.8}$$

ここで、$\zeta_g(0)$は時刻 $t = 0$ の地衡風渦度、τ_e は地衡風渦度が$1/e$になるのにかかる時間で、$\tau_e \equiv H\sqrt{2/(fK_m)}$ である。H = 10 km、f = 10^{-4} s^{-1}、K_m = 10 m^2 s^{-1}とすると、$\tau_e \approx$ 4 日となる。つまり、中緯度の順圧大気中の総観規模擾乱では、典型的なスピンダウン時間は数日である。

一方、拡散による減衰時間のスケールも見積もってみる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K_m\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{9.2.9}$$

の形の拡散方程式で、拡散の時間スケールを τ_d、拡散の典型的な鉛直スケールをHとすると、

$$U/\tau_d \sim K_m U/H^2$$

であるので、$\tau_d \sim H^2/K_m$ である。これに上記の値を入れると、τ_d~10^7 秒～約 100 日となり、拡散の効

果だけだと総観規模の低気圧が衰弱するのに 100 日かかることになる。それと比較すると、エクマン・パンピングによるスピンダウンは擾乱の衰弱に非常に効果的に働く点で重要である。上の見積もりによる減衰時間は現実の低気圧の衰弱と比較しても現実的な値であるように見える。

このように境界層は自由大気中の大規模な気象現象にも数日程度で大きな影響を与えるので、数値予報モデルでは境界層を精度良く表現することが必要である。しかし現在の数値予報モデルでは乱流を表現することはできないので、**パラメタリゼーション**が必要となる。そのために境界層の理論を踏まえたパラメタリゼーションスキームの改善が続けられている。

【海洋のエクマンスパイラルと質量輸送】

エクマン層の式 (9.1.14a, b) の解としてのらせんの向きは、境界条件によって決まる。ここでは、以下のような境界条件も考えてみよう。

$$z = 0 \quad \text{で} \quad u = u_g, \quad v = v_g$$

$$z \to -\infty \quad \text{で} \quad u \to 0, \; v \to 0$$

これは、海洋において、海面では海上風の影響を受けて地衡流バランスした流れ、十分に深いところで流速 0 となるような状態を表す。この条件では、エクマンスパイラルは、海面の地衡流から深度とともに時計回りに方向を変える。すると、海洋表層の海水（質量）は流れに対して右向きに輸送される（エクマン輸送)。この効果により、日本海で南西風が吹き続けたときに、風向に対して右側に位置する日本海沿岸で潮位が上昇することがある。

第 9 章の参考文献

Stull, R. B., 1988: An Introduction to Boundary Layer Meteorology. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 666pp.

記号リスト

ここでは主要な記号のみ記載している。

a	地球半径（=6.37×10^6 m）
$\boldsymbol{A}$	任意のベクトル
A	任意の領域、有効位置エネルギー（第 2 章）、地球上の循環に関連する面積を赤道面に投影した面積（第 4 章）
Bu	バーガー数（大気の鉛直密度成層と地球自転の影響の比に関する無次元数、≡ $[(NH)/(fL)]^2$、第 5 章）
c	位相速度
C	閉曲線
c_p	位相速度（特に群速度との対比で）
c_s	音速（$=\sqrt{\gamma RT}$）
$\boldsymbol{c}_g$	群速度ベクトル
C_p	乾燥大気の定圧比熱（$\equiv C_v + R$ =1004 J K^{-1} kg^{-1}）
C_v	乾燥大気の定積比熱（=717 J K^{-1} kg^{-1}）
D	閉じた水平領域（第 2 章）、水平発散
D_e	エクマン層の上端の高さ（第 9 章）
$\boldsymbol{e}$	単位ベクトル（第 1 章）、流れに沿った方向の単位ベクトル（第 3 章）
f	コリオリパラメータ（$\equiv 2\Omega \sin\varphi$）、任意のスカラー関数
Fr	フルード数（流れの慣性力と重力の比に関する無次元数、第 5 章で$= U/(NH)$）
$\boldsymbol{F}$	外力
$\boldsymbol{F}_r$	外力、特に摩擦力
g	重力加速度
$\boldsymbol{g}$	重力ベクトル（地球自転による遠心力の影響を含む、$\equiv \boldsymbol{g}^* + \Omega^2\boldsymbol{R}$）
$\boldsymbol{g}^*$	万有引力による重力ベクトル（第 1 章）
g_0	ジオイド面における標準重力加速度（=9.81 m s^{-2}、第 2 章）
G	重力定数（=6.673×10^{-11} N m^2 kg^{-2}）
h	浅水方程式系における流体の自由表面の高さ
h_B	浅水方程式系における底面（地表面）の高さ
H	スケールハイト（$\equiv RT_0/g$、ここでT_0は空気層の平均的気温。第 2 章、第 7 章）、鉛直方向

	の距離のスケール、浅水方程式系における流体の平均的な厚さ
H_R	ロスビーハイト（Rossby height）またはロスビー深度（Rossby depth）（$\equiv f_0 L/N$、第 5 章）
i	虚数単位（$\equiv \sqrt{-1}$）
$\boldsymbol{i}$	xyz座標系におけるx方向の単位ベクトル、球座標系におけるλ方向の単位ベクトル、円筒座標系におけるr方向の単位ベクトル
$\boldsymbol{j}$	xyz座標系におけるy方向の単位ベクトル、球座標系におけるφ方向の単位ベクトル、円筒座標系におけるλ方向の単位ベクトル
J	非断熱加熱率
$\boldsymbol{k}$	xyz座標系及び円筒座標系におけるz方向の単位ベクトル、球座標系におけるr方向の単位ベクトル、波数ベクトル（第 6 章）
k	x方向の波数
K	運動エネルギー
K_h	熱の渦拡散係数（第 9 章）
K_m	運動量の渦拡散係数または渦粘性係数（第 9 章）
l	y方向の波数
L	長さ・水平距離のスケール
m	z方向の波数
M	質量、絶対角運動量、地衡風絶対運動量（第 7 章）、エクマン層内の質量輸送量（第 9 章）
$\boldsymbol{n}$	流れに垂直な方向（左向き）の単位ベクトル、閉曲面に垂直で外向きの単位法線ベクトル
N	ブラント・バイサラ振動数（$\equiv (g\, d \ln \bar{\theta}/dz)^{1/2}$）
N_Z	対数気圧座標系におけるブラント・バイサラ振動数
p	気圧
p_0	基準気圧
p_s	地上気圧
P	全位置エネルギー（第 2 章）、有効位置エネルギー（第 8 章）、エルテルの渦位（第 4 章）
q	比湿（第 1 章）、準地衡風渦位（第 5 章～）
Q	熱量（第 1 章）、順圧渦位（第 4 章、第 7 章）
$\boldsymbol{Q}$	Q ベクトル（第 5 章、第 8 章）
r	球座標系及び円筒（円柱）座標系における動径距離
$\boldsymbol{r}$	位置ベクトル
R	乾燥大気の気体定数（$= R_d \equiv R^*/M_d$ =287 J K^{-1} kg^{-1}）、回転軸からの距離、曲率半径（第 3 章～）
$\boldsymbol{R}$	回転軸（自転軸）からの位置ベクトル

R^*	モル気体定数（普遍気体定数、=8.314 J K^{-1} mol^{-1}、第 1 章）。気象学ではこれを乾燥大気の平均分子量M_d（=28.97）で除した「乾燥大気の気体定数」R_d（または単にRとする）をよく使う。
Ri	リチャードソン数（流れの静的安定度に関する無次元数、$\equiv N^2H^2/U^2$。第 5 章では $Ri = p^2\tilde{S}/U^2$ をあてている）
Ro	ロスビー数（流れの慣性力とコリオリ力の比を表す無次元数、$\equiv U/fL$。総観規模現象では～0.1。第 2 章付録 2A、第 3 章、第 5 章）
s	空気塊の運動に沿った曲線（第 3 章）
S	閉曲面（第 1 章)、エントロピー（第 1 章)、気圧座標系における鉛直安定度（$\equiv (R/p)S_p = -\alpha\,\partial\ln\theta/\partial p$、第 5 章)、500 hPa における鉛直安定度 $S(p)$（第 8 章）
$\boldsymbol{S}$	傾圧ベクトル（第 4 章）
S_p	気圧座標系における大気の鉛直安定度（$\equiv -T\,\partial\ln\theta/\partial p$、第 2 章～。Holton の教科書でも$S_p$）
$S(p)$	気圧座標系の鉛直安定度Sを領域・時間平均し、気圧依存性を持つ量（$\equiv -\bar{\alpha}\,\partial\ln\bar{\theta}/\partial p = (N/\bar{\rho}g)^2$、第 5 章～。Holton の教科書では気圧に依存する場合も依存しないとした場合もσで表している）
T	時間スケール、温度
T_v	仮温度（第 1 章）
u	xyz座標系におけるx方向の速度、球座標系におけるλ方向の速度、円筒座標系におけるr方向の速度
U	水平速度（風速）のスケール、内部エネルギー、
v	xyz座標系におけるy方向の速度、球座標系におけるφ方向の速度、円筒座標系におけるλ方向の速度
$\boldsymbol{v}$	（回転系における）3 次元速度ベクトル
$\boldsymbol{v}_I$	慣性系における 3 次元速度ベクトル（第 1 章、第 4 章）
$\boldsymbol{v}_R$	回転系における 3 次元速度ベクトル（第 1 章）
V	水平風速・水平速度、体積
$\boldsymbol{V}$	水平速度ベクトル
$\boldsymbol{V}_a$	2 次元非地衡風ベクトル
$\boldsymbol{V}_g$	2 次元地衡風ベクトル
V_g	地衡風速
$\boldsymbol{V}_T$	温度風ベクトル（第 3 章）
w	xyz座標系及び円筒座標系におけるz方向の速度、球座標系におけるr方向の速度
W	鉛直速度のスケール、対数気圧座標系における鉛直方向の速度、仕事（第 1 章）

x	xyz座標系で、通常は東向きの座標
y	xyz座標系で、通常は北向きの座標
z	xyz座標系及び円筒座標系における鉛直座標
Z	ジオポテンシャル高度（$\equiv \Phi/g_0$、第 2 章）、対数気圧座標系における鉛直座標（$\equiv -H\ln(p/p_0)$）
Z_T	層厚（第 2 章）
α	比容（$\equiv 1/\rho$）、角度
β	コリオリパラメータの緯度変化（$\equiv df/dy$）、自然座標系における運動の方位角（第 3 章、第 4 章）
γ	比熱比（$\equiv C_p/C_v$ =1.4）、波動の位相差（第 8 章）、エクマンスパイラルに関する量（$= \sqrt{f/2K_m}$、第 9 章）
Γ	気温減率（$\equiv -dT/dz$）、相対循環（第 4 章）
Γ_a	絶対循環（第 4 章）
Γ_d	乾燥断熱減率（$\equiv g/C_p$）
ζ	相対渦度の鉛直成分（$= \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega} = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y$）
ζ_θ	等温位面上の相対渦度の鉛直成分（第 4 章）
η	絶対渦度の鉛直成分（$= \zeta + f$）
θ	温位（$\equiv T(p_0/p)^{R/C_p} = T/\Pi(p)$））
κ	（$\equiv R/C_p$、第 5 章）
λ	経度、ロスビーの内部変形半径の逆数（第 8 章）
λ_d	ロスビーの変形半径（第 3 章、第 7 章）、ロスビーの内部変形半径（第 8 章）
ξ	一般鉛直座標系における鉛直座標（第 2 章付録 2B）
$\Pi(p)$	エクスナー関数（$\equiv (p/p_0)^{R/C_p}$）
ρ	密度
σ	振動数、シグマ座標系における鉛直座標（第 2 章付録 2B）、等温位面密度（第 2 章付録 2B、第 4 章付録 4A）、気圧座標系における鉛直安定度$S(p)$を気圧に依存しない定数としたもの（第 5 章、Holton の教科書では気圧に依存する$S(p)$と明確な区別をしていない）
$\boldsymbol{\sigma}$	閉曲線で囲まれた面に垂直で、面積に比例した大きさを持つベクトル（第 4 章。第 1 章では$\boldsymbol{S}$）
φ	緯度
Φ	ジオポテンシャル（$\nabla\Phi \equiv -\boldsymbol{g}$）
χ	ジオポテンシャル変化傾向（$\equiv \partial\Phi/\partial t$、第 5 章）、速度ポテンシャル（第 3 章付録 3A）
ψ	任意の物理量（第 2 章）、流線関数（第 3 章付録 3A、第 5 章～）
Ψ	流線関数、特に温位座標系におけるモンゴメリー流線関数（第 2 章付録 2B、$\equiv C_pT + \Phi$）

ω	角速度（第 1 章)、気圧座標系における鉛直速度
$\boldsymbol{\omega}$	相対渦度ベクトル（$= \nabla \times \boldsymbol{v}$）
$\boldsymbol{\omega}_a$	絶対渦度ベクトル（$\equiv \nabla \times \boldsymbol{v}_I$）
ω_θ	絶対渦度の等温位面に垂直な成分（第 4 章）
Ω	地球自転の角速度（=7.292×10^{-5} rad s^{-1})、または任意の回転系における角速度
$\boldsymbol{\Omega}$	角速度ベクトル
∇	3 次元の勾配演算子
∇_H	2 次元の勾配演算子（浅水方程式系の場合、または鉛直座標系に依存しない場合に使用）
∇_p	等圧面上の 2 次元の勾配演算子
∇_z	幾何学的高度zを一定とした 2 次元の勾配演算子
∇_Z	対数気圧座標系における（実際には等圧面上の）2 次元の勾配演算子
$\frac{d}{dt}$	ラグランジュ微分（$\equiv \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla$）
$\frac{d_g}{dt}$	地衡風によるラグランジュ微分（$\equiv \frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{V}_g \cdot \nabla_p$、第 5 章～）
$\frac{d_H}{dt}$	2 次元のラグランジュ微分（$\equiv \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{V} \cdot \nabla_H$、浅水方程式系等）
$\bar{\psi}$	物理量ψを等圧面（または等高度面）上で時間・領域平均したもの（時間変化しない基本場。ただし第 5 章では$\tilde{\psi}$で表す)。または変動の 1 周期での平均。第 9 章では時間変化する平均場。
$\tilde{\psi}$	物理量ψを等圧面（または等高度面）上で時間・領域平均したもの（第 5 章)。第 2 章付録 2B の$\tilde{\rho}$は擬密度。
$\dot{\psi}$	物理量ψのラグランジュ的時間変化（$\equiv d\psi/dt$)。ψが鉛直座標の場合は鉛直速度。
ψ^*	物理量ψを無次元化した変数（第 5 章)、物理量ψの複素共役（第 7 章～）

【表紙と裏表紙について】
これらの衛星画像はそれぞれ、おおむね夏至と冬至の日の、2040UTC の観測のものである。同じ時刻には春分または秋分の日であれば 140°E 線を境に東西で日射の有無が分かれるが、夏至の日のこの時刻には日本列島のかなりの部分が既に太陽光に照らされており、それに対して冬至はこの時刻では夜明けまでまだ時間があることがわかる。このような違いによって季節の変化とそれに関連する大気の運動が生じる。

著者略歴

北畠尚子（きたばたけ　なおこ）

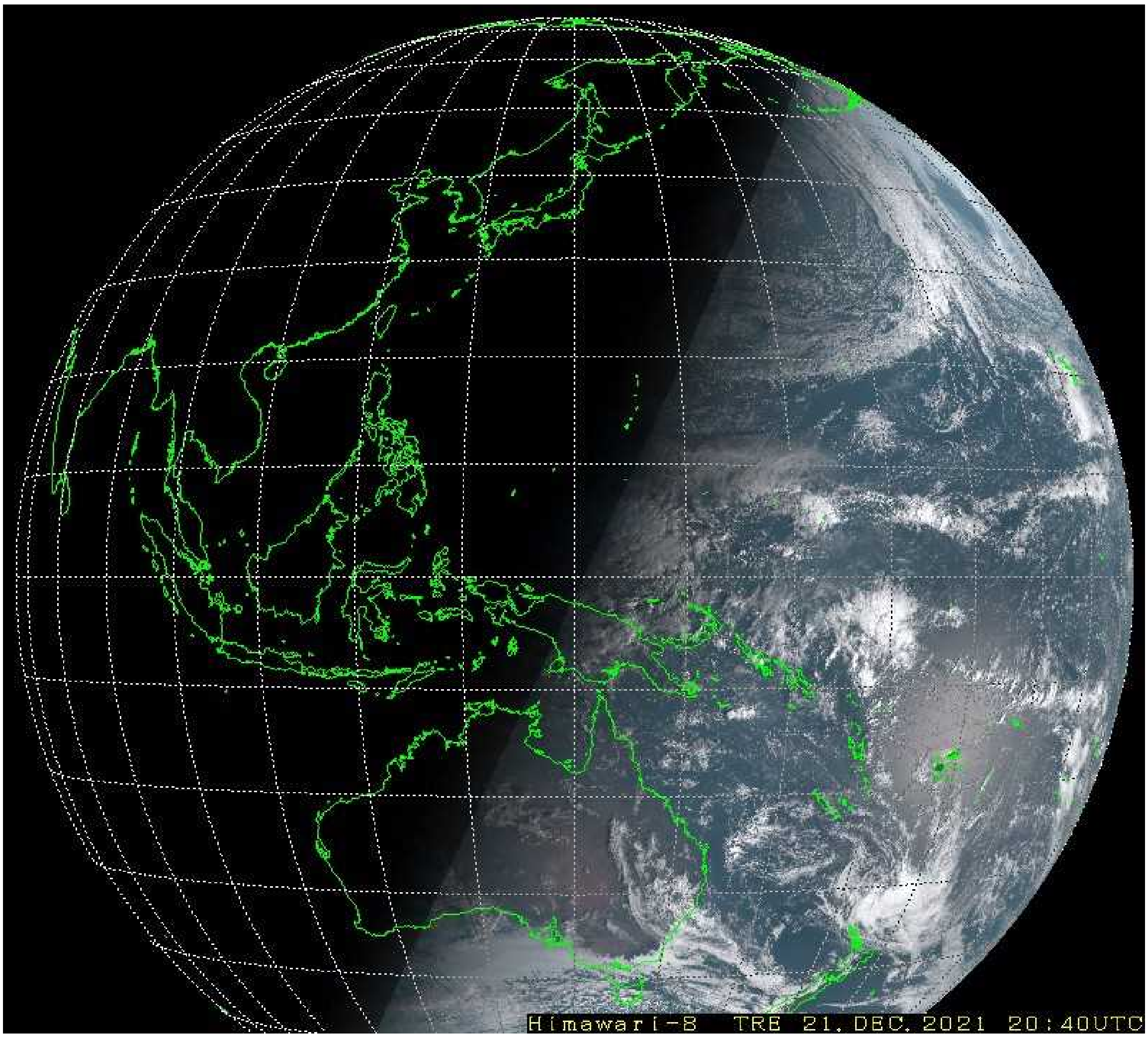
仙台管区気象台技術部予報課、気象庁予報部予報課、海洋気象部海上気象課、気象大学校講師、気象庁気象研究所台風研究部主任研究官・第二研究室長
現在　気象大学校教授

総観気象学　理論編

2022 年 3 月 18 日　初版

著　者　北畠尚子
発行者　気象庁
〒105-8431 東京都港区虎ノ門 3-6-9

印刷所　三鈴印刷株式会社



表紙:ひまわり8号　カラー合成画像

2021年6月20日2040UTC

裏表紙:表紙と同じ、ただし12月21日2040UTC