験震時報第 77 巻
（2013）1～14 頁

火山の短周期成分を含む地殻変動モデルに対する傾斜計の応答

Response of Tiltmeters to Volcanic Crustal Deformation Models that Include Short Period Components

小久保一哉 [1]
Kazuya KOKUBO

(Received January 5, 2012: Accepted April 18, 2013)

ABSTRACT: Tiltmeters basically observe the ratio of components of gravitational acceleration *g* along level planes fixed at local grounds to the *g* itself being regarded as a constant, filtering out the short-period components by LPF. However rapid changes of ground tilts are generally accompanied by translational motions including short-period components. They make apparent changes out of the passband on 1-sps (samples per second) tiltmeter records calculated by using a second-order derivation of the LPF response to those motions. Applying this knowledge to the tiltmeters installed around volcanoes by JMA in 2009, apparent tiltmeter records for two typical ground deformation models used in volcanism can be calculated. The examples show the importance of understanding that rapid apparent changes of the 1-sps tiltmeter records are always caused not by tilts, but by translational motions for these models, and their polarizations appear in opposite directions to tilt changes for Mogi's model in particular.

1　はじめに

傾斜観測が対象とする地殻変動には，火山噴火や断層運動のような数秒の短時間で生じる現象も含まれる．気象庁が各火山に整備した傾斜計（気象庁，投稿中）のデータは，1 秒サンプリングで収集され，通常監視に用いているのは処理システム（VOIS）（松森，2013）で平均処理と潮汐補正を施された，分値および時間値である．しかし火山噴火に伴うような急な変動が分値でステップ状に見える場合は，地下で生じた現象を検討するためにオリジナルの秒値も用いたい場合がある．傾斜データの秒値を見る場合，その短周期側の特性に対する知見を持って，記録を解釈する必要が生じる．一般に地殻変動では傾斜に並進運動が伴って生じ，傾斜計は並進運動の短周期成分に応答する性質を持つためである．

火山周辺の地殻変動を説明するモデルとして，山川・茂木モデル（以下，茂木モデル）（山川, 1955; 茂木, 1957）とダイクモデル（Okada, 1992）が用いられ，いずれも変動源の体積変化と地殻変動は比例関係で記述される．傾斜計の分値や時間値の解釈には，その静的な比例関係の理解で十分である．しかし傾斜計の秒値の急な変化の形状は，並進運動への動的な応答が重なるため，そのまま地下の体積変化の形状という解釈ができない点に留意する必要がある．なお地震計も水平成分が傾斜変動への応答を含むという認識が，特に広帯域地震計記録の解釈に必要なことが Aoyama and Oshima（2008）で示されている．

本稿では，傾斜計の秒値の解釈に必要な認識の具体例として，2009～2010 年度に気象庁が各火山に整備したボアホール傾斜計の特性を用いて，茂木モデルとダイクモデルの急な体積変化と，傾斜計の応答

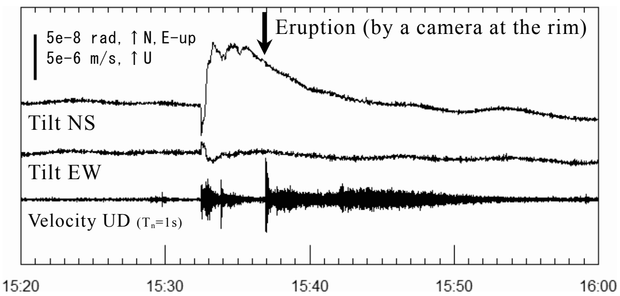

Fig. 1　One sps tiltmeter records and the envelope of UD velocity seismogram (natural period 1 second) around a phreatic eruption of Shinmoedake, Kirishimayama volcanoes on May 27, 2010 at 3 km SSE from the vent. The tilt record of NS shows a sharp onset of reverse polarity of the main changes that corresponds to underground expansion.

[1] 気象研究所 地震火山研究部， Seismology and Volcanology Research Department, Meteorological Research Institute
現所属：総務部情報利用推進課， Private Sector Development Division, Administration Department

の関係を求めた．また，事例として 2010 年 5 月の霧島山新燃岳の水蒸気爆発時の傾斜計記録に茂木モデルを適用し，地下の変動源の時間的な挙動の推定を試みた．その時の傾斜計と地震計の記録を Fig. 1 に示す．傾斜計 NS 成分の主要な変化は，火口方向（北）上がりで地下の膨張に対応しているが，反対方向の鋭い初動を伴っていた．

傾斜計の並進運動の短周期成分への応答は，見かけ上は運動方向上がりの変化として，傾斜変動への応答に重なることが示される．ここで短周期とは，傾斜計のフィルタ特性から 30 秒以下である．これにより，茂木モデルの等方的な変動源の急激な膨張の場合は，変動源から遠ざかる変位への応答のため，傾斜記録の初動は傾斜変動とは逆の極性（変動源方向の下がり）になる．またダイクモデルを含め一般の場合には，傾斜と変位の各ベクトルへの応答の合成になる．

2　傾斜計の原理と加速度

加速度運動する観測者には，加速度に比例して逆向きに見かけの力（慣性力）がかかり，その大きさは質量×加速度である．加速度計はその慣性力を検出して加速度を計測する．鉛直下向きにかかる重力は，仮想的な無重力空間における鉛直上向きの加速度 g（値は重力加速度）の運動により質量 m に生じる下向きの慣性力 mg として検出され，その g が計測される．従って加速度計の測定方向を横にして概ね水平な平面内の 2 方向に配置すると，上向きの加速度 g のその平面への正射影が 2 成分で計測される．Fig. 2 に示す 1 方向の概念図で，計測される加速度成分 $g\ \sin\theta$ は，傾斜変化で生じる θ の変化 $\Delta\theta$ に応じて $g\Delta\theta$ だけ変化する（θ と $\Delta\theta$ はともに微小で $\sin(\theta+\Delta\theta)-\sin\theta \fallingdotseq \Delta\theta$）．これを g（ここでは定数扱い）で割ることにより，傾斜変化 $\Delta\theta$（単位 : radian）が観測できる．これが加速度計をセンサーとする振り子式傾斜計の観測の原理である．この加速度の極性は図のように傾斜の上がり方向が正になる．

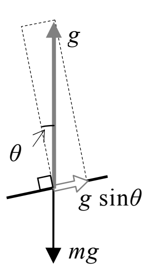

Fig. 2　An accelerometer measures upward acceleration g by sensing the gravity force mg regarded as downward inertial force caused by g. And so a tiltmeter measures $g\sin\theta$, its quasi horizontal component on an axis fixed to the ground. A tilt change $\Delta\theta$ is the ratio of its change $g\Delta\theta$ to g.

永年的な変化を観測するため，その加速度計の感度特性の長周期側は無限大まで平坦（入力に対し周期 T によらず一定の比例係数）である必要がある．

一方このような横方向の加速度の変化は，傾斜変動の他に並進運動によっても生じる．振り子式傾斜計のように重力で傾斜を検出する仕組みは，横方向の加速度で生じる慣性力にも同様に応答するが，その加速度は周期数 10 秒までの地震動が主で，より長周期（～∞）の成分はゼロと見なすことができる．そのため傾斜計はローパスフィルタ（以下，LPF）を用いて，長周期側（数 10 秒～無限大まで）を傾斜変動による加速度変化として観測している．

以上の傾斜計の性質は，重力と加速度運動による慣性力の性質そのものに起因するもので，液面の変位を検出する泡式や水管式の傾斜計においても，容器中の液体の持つ振り子としての機能（加速度応答）により本質的に共通である．

3　傾斜計の短周期側の応答

短時間の地殻変動には，LPF で制限された帯域の短周期成分も含まれ，そこでは傾斜変動と並進運動も同時に生じている．フィルタの通過帯域の外側も，一般に応答はゼロではないため，傾斜計の記録の特に急な変化は，地盤の傾斜と並進への応答の合成になっている．その記録のみから両者を分離することはできないが，両者の関係が理論的に仮定できる場合は，変動の時間変化の考察が可能になる．茂木モデルを仮定すると，地下の変動源の体積変化で地表付近に生じる傾斜と並進運動（以下，変位）はいずれも体積変化に比例し同じ関数形になることから，合成された傾斜計の応答を考察することができる．

4　火山総合観測点の傾斜計の特性

4.1　傾斜計の加速度応答と変位応答の考察

2009～2010 年度に気象庁が各火山の総合観測点に設置したボアホール型の傾斜計（ミツトヨ製 JTS-3B 型）は，水平 2 成分の加速度計をセンサーとする振り子式傾斜計である（気象庁，投稿中）．センサーは加速度比例の電圧（傾斜計としての感度 : 5 mV/μrad）を出力し，地上の制御装置のアナログ LPF を通して，後段のテレメータ装置（明星電機製 S502

型）の A/D 変換に渡される．この LPF はカットオフ周期 T_c=30 秒のバタワース 2 次型で，その結果，この傾斜計の特性は周期 30 秒～無限大において加速度に平坦である．なお加速度計センサーの短周期側の応答は約 0.2 秒のローパス特性で，A/D 変換は高いサンプリング周波数のデータから作成された 100 sps（samples per second）のデータの 1 秒間平均処理で 1 sps データを出力するので，観測データにはセンサー自体のローパス特性は現れず，専ら 30 秒の LPF が短周期側の特性を決めていると考えてよい．

加速度計＋LPF の，加速度に対する感度［電圧／加速度］の周期特性（両対数）を Fig. 3 に示す．また，この LPF のステップ応答を Fig. 4 に示す．この LPF の通過帯域の外側に当たる 30 秒より短周期の帯域（Fig. 3 の左側）では，入力電圧の周期 T の振幅に対し $\propto T^2$（傾き 2，フィルタの次数 2 に対応）で出力振幅は減衰する．そのような特性は入力を 2 階積分していることになり，加速度に比例する信号入力に対し，フィルタ出力は変位に比例する．

以上からこの傾斜計の出力は，フィルタのカットオフ周期 30 秒を境に，長周期側は加速度に対して平坦，短周期側は変位に対して平坦である．2 つの帯域の特性は，Fig. 3 の両対数グラフで，特性曲線の傾き 0 と 2 の 2 本の漸近線で表され，この場合カットオフ周期はその交点（特性の「折れ点」）に当たる．

両帯域での加速度と変位の感度［電圧／物理量］には Fig. 3 の補助線で示す関係がある．周期 30 秒以上の傾きゼロの漸近線において，仕様に規定されたこの傾斜計の感度 S_γ を重力加速度 g（9.8[ms^{-2}]）で割って，加速度計としての感度 S_a が得られる．一方，周期 30 秒以下の傾き 2 の漸近線において，変位に対する感度 S_d は，周期の 2 乗に比例する加速度感度と周期 2π[s]（角周波数 1[rad/s]=2π[rad]/2π[s]，微分・積分に対して振幅値が不変）で値が一致する．即ち（T_c は折れ点の周期 30[s]），

$$
\begin{aligned}
S_\gamma &= 5[\mathrm{mV}/\mu\mathrm{rad}] = 5000[\mathrm{V/rad}] \\
S_a &= S_\gamma / g \\
&= 510\ [\mathrm{V/ms^{-2}}] \\
&(T \gg T_c = 30\,[\mathrm{s}]) \\
S_d &= (2\pi / T_c[\mathrm{s}])^2 S_a \\
&= 22.4\ [\mathrm{V/m}] \\
&(T \ll T_c = 30\,[\mathrm{s}])
\end{aligned}
$$

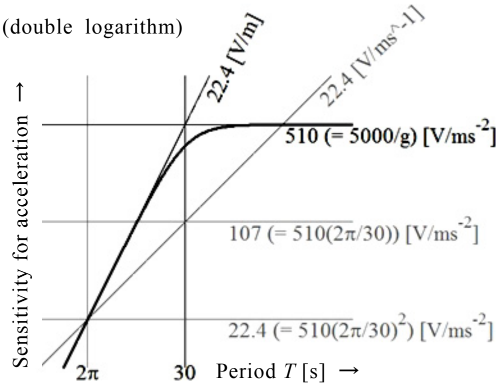

Fig. 3 The sensitivity curve of the accelerometer through LPF (second-order butterworth type) used in the tiltmeter has two asymptotes crossing at the corner period 30 seconds which have slopes 2 and 0 corresponding flat responses to displacement and acceleration respectively.

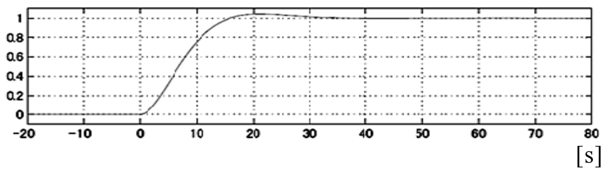

Fig. 4 The unit step response of the LPF (second-order butterworth type) that the output signal of the accelerometer passes through before being input into the telemeter's ADC.

である．

4.2 同時に生じる傾斜と変位への傾斜計の応答

傾斜と変位が同時に生じた場合の応答について考察する．一般に傾斜計は，地震計と同様にいわゆる線形・時不変システム（複数の信号を足し合わせた入力信号への応答は，個別の信号入力への応答の和であり，その応答特性は時間に依存しない）である．同時に生じる傾斜と変位に対する応答は，それぞれ個別の入力に対する応答の和になる．

この傾斜計について，傾斜に対する応答は，入力が加速度変化で，出力は前述の折れ点 30 秒の 2 次の LPF の応答である（Fig. 3）．一方，30 秒より短周期の帯域では，前述のように応答特性は変位に平坦であり，その帯域に着目して変位に対する振幅特性を考えると，30 秒以上の長周期の帯域は $\propto 1/T^2$（フィルタの次数 2 に対応）で減衰する．即ち変位に対する応答は30秒を折れ点とする2次のハイパスフィルタ（HPF）の特性になる（Fig. 5，同じくバタワース 2 次型）．

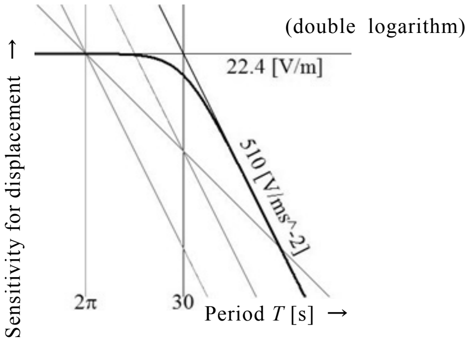

Fig. 5　The displacement sensitivity curve transformed by multiplying the acceleration sensitivity of Fig. 4 by $(2\pi/T)^2$. The slopes of two asymptotes become 0 and −2.

周期 30 秒以下の帯域で，傾斜計記録に変位入力に対する HPF 応答が見かけの傾斜として現れる物理量の比は，前節の感度の逆数の比で次の値である．

$$S_d / S_\gamma = \left(2\pi / T_c[\mathrm{s}]\right)^2 / g[\mathrm{ms}^{-2}] = 4.5\mathrm{e}-3\ [\mathrm{rad/m}] \tag{1}$$

即ちこの傾斜計の応答は，傾斜（加速度）入力に対する LPF 出力と，変位入力に対する HPF 出力（式(1)による見かけの傾斜換算）の重ね合わせになる（折れ点は共通の 30 秒）．両者の極性の関係は，同じ空間内の運動で変位と傾斜による加速度の極性は一致し，加速度の極性は傾斜の up 方向が正であるから（cf. 2 節），変位方向が傾斜の up に重なる．

変位に平坦な短周期側に注目すると，この変位計＋バタワース 2 次 HPF の特性は，折れ点を固有周期とする減衰定数 0.707（$=1/\sqrt{2}$）の変位地震計（水平動）に等しい（付録〔C〕）．そしてそのような地震計は同時に加速度入力に対しバタワース 2 次 LPF（折れ点は固有周期）の特性を示す．従って，変位と傾斜が同時に生じた場合のこの傾斜計の記録は，Fig. 6 のような振り子の運動（固有周期 30 秒，減衰定数 0.707 の変位地震計の応答を表すモデル）で，極性も含めて概念的に理解できる（変位は水平動に限定し，上下動が振り子に与える影響は無視する）．例えば茂木モデルの急な膨張変動に対して，初動は遠ざかる変位への応答で，それは傾斜記録としては変動源が下がる方向であり，最終的な振り子（点線）は変動源が上がる傾斜への応答で，それは変位地震計に傾斜に比例して現れる中立点のずれ（変動源に近づく方向への見かけの地動変位）を意味する．

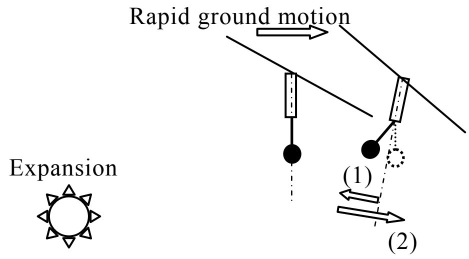

Fig. 6　Response of a pendulum to surface deformations (tilt and displacement) caused by a rapid underground expansion is equivalent to both the tiltmeter’s and the horizontal seismometer’s response. This explains how these apparent changes are caused, i.e. (1) initial swing toward the source and (2) back to a new neutral position.

5　茂木モデルの急な体積変化への適用

5.1　茂木モデルにおける傾斜と変位の関係

火山現象に伴う地殻変動の解釈で一般に用いられる茂木モデルは，半無限弾性体の地殻内部の球状圧力源で地表に生じる傾斜や変位などを記述し，変動源の大きさがその深さや観測領域に対して十分小さい場合にはよく成り立つとされている．火山の噴火時には地下で物質の移動も生じるので実際の地殻変動はより複雑になるが，ここでは傾斜記録の初動部分の解釈のため，単発的な一点の圧力変化による変動が変動源の移動の影響より卓越すると仮定し，また媒質の応答は周期 2 秒以上で平坦と仮定して，茂木モデルを用いて傾斜と変位を考察する．

茂木モデルによる傾斜 γ[radian]と変位 d[m]は，それぞれ水平距離 R[m]の地下 D[m]の変動源の体積変化 v [m^3]に比例し，以下のように表現される．式の短縮のため直線距離 L[m]も用いる．

$$\gamma = \frac{9v}{4\pi}\frac{DR}{L^5}\ ,\quad d = -\frac{3v}{4\pi}\frac{R}{L^3} \tag{2}$$

$$v = \frac{\pi a^3 P}{\mu}$$

γ [radian]：傾斜，　d [m]：変位，
v [m^3]：体積変化，　P [Pa]：圧力，
μ [Pa]：剛性率，　a [m]：半径，
D [m]：深さ，　R [m]：水平距離，
$L = \sqrt{R^2 + D^2}$ [m].

極性定義は傾斜を主に考えて，体積膨張に対し変動源方向 up の傾斜を正とし，前述の通り変位も同じ方向が正であり，式(2)の d は遠ざかる方向である．

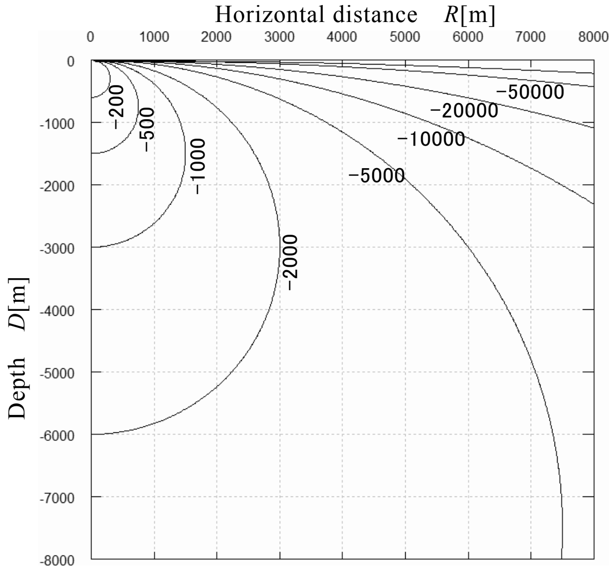

Fig. 7 Ratios of horizontal displacement to tilt [m/rad] on the surface by Mogi's models mapped on the underground cross section where the sources are distributed. Contour lines drawn as the solution curves of Equation (3) are tangent circles to the measuring point at the left end of the top line. The radii [m] are −3/2 times the values [m/rad].

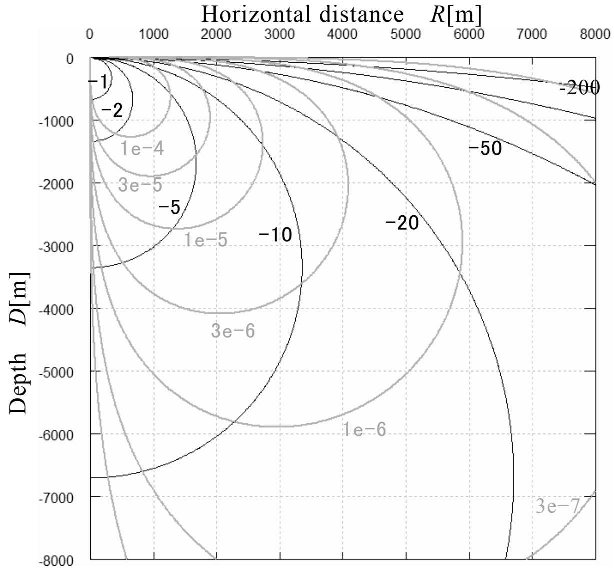

Fig. 8 Black contour lines represent the ratios of the tiltmeter's responses to two kinds of motions (displacement and tilt) by step change of Mogi's model on the same cross section as Fig. 7. The values are multiplied by the ratio of sensitivities per Eq. (3). Gray contour lines represent the coefficient of tilt to the source's change in volume [μrad/m^3].

式(2)により，変位と傾斜の間に以下の比例関係があり，この比の水平距離と深さの分布を Fig. 7 に示す．

$$\frac{d}{\gamma} = -\frac{L^2}{3D} = -\frac{R^2 + D^2}{3D} \quad \text{[m/rad]} \tag{3}$$

火山監視においては，傾斜計の変動源からの距離とその変動源の深さが多くの場合共に数 km であることから，式(3)の値は数千であり，1 μrad の傾斜が生じた場合は，同時に数 mm の変位が生じる．

なお鉛直ダイクモデル（膨張）の場合は，隆起の頂点がダイクを挟んで 2 ヶ所に生じ，その間にはダイクから遠ざかる向きで上がり傾斜と変位が生じ，上の比例係数が正になる領域ができる（後述, 6 節）.

5.2 ステップ状の変化への応答

茂木モデルの体積変化で生じる傾斜と変位に対するこの傾斜計の応答の具体例として，まずステップ状の変化を検討する．30 秒より短周期において変位入力が見かけの傾斜として現れる係数（式(1)）を，茂木モデルを仮定した傾斜と変位の関係（式(3)）に適用し，変動源のステップ状の体積変化で生じる傾斜変動に対して，同時に生じる変位応答が見かけの傾斜として現れる振幅比は次式になる．

$$\frac{d\,S_d}{\gamma\,S_\gamma} = -\frac{L^2[\mathrm{m}^2]\left((2\pi/30[\mathrm{s}])^2/g[\mathrm{ms}^{-2}]\right)}{3D[\mathrm{m}]}$$
$$= -\frac{0.0015L^2}{D}$$

このステップ応答の振幅比（Fig. 7 に感度比(1)が掛かる）および傾斜変動量（式(2)の γ の体積変化 v への係数[m^{-3}]）の水平距離と深さに対する分布を Fig. 8 に示す．これが急な傾斜変動で傾斜に対する逆方向の変位応答の比の最大値で，数倍～数十倍になる．体積変化の立ち上がり時間が長くなると，変位に対する HPF 応答の振幅は減少し，この比の絶対値も小さくなる．この点は具体的に次節で検討する．

5.3 時間的な挙動に対する応答

より一般に，茂木モデルの急な体積変化に対する傾斜記録の秒値の見え方を調べるため，この傾斜計の具体的な応答を計算する．その計算式は，時系列を(t)で表し，傾斜入力 $\gamma(t)$ に対する LPF の応答と変位入力 $d(t)$ に対する HPF の応答を，それぞれ利得 1 のインパルス応答関数で表すと，次式のような形式に記述できる（＊：畳み込み積分）．右辺第 2 項には，変位が短周期帯域において見かけの傾斜と

して現れる式(1)の感度比が掛かる.

$$\alpha(t) = F_L * \gamma(t) + F_H * \left(S_d / S_\gamma\right) d(t) \tag{4}$$

$\alpha(t)$: 傾斜記録

F_L : LPF の利得 1 インパルス応答

F_H : HPF の利得 1 インパルス応答

茂木モデルでは，この右辺の 2 項の傾斜と変位はモデルの変動源の体積変化 $v(t)$に比例するので，式(1)と式(2)を代入し，畳み込み積分の線形性で，次のように書ける.

$$\alpha(t) = \left(A F_L + B F_H\right) * v(t)$$
$$A = \frac{\gamma}{v} = \frac{9DR}{4\pi L^5},\ B = \frac{d}{v}\frac{S_d}{S_\gamma} = -\frac{3R\pi}{L^3 {T_c}^2 g} \tag{5}$$

$v(t)$: 茂木モデル変動源の体積変化

A : モデルによる傾斜の比例係数

B : モデルによる変位への応答係数

これを数値計算するために, Laplace 変換でアナログ周波数領域の伝達関数を求め，Z 変換によりそれを離散化して，逆 Z 変換により時間領域に戻して漸化式の形式を求める．以降の途中計算は付録〔A〕に示すとおりで，離散化のサンプリング周期 τ[s]とおくと，求める漸化式は,

$$\alpha_n = b_0 v_n + b_1 v_{n-1} + b_2 v_{n-2} - a_1 \alpha_{n-1} - a_2 \alpha_{n-2} \tag{6}$$

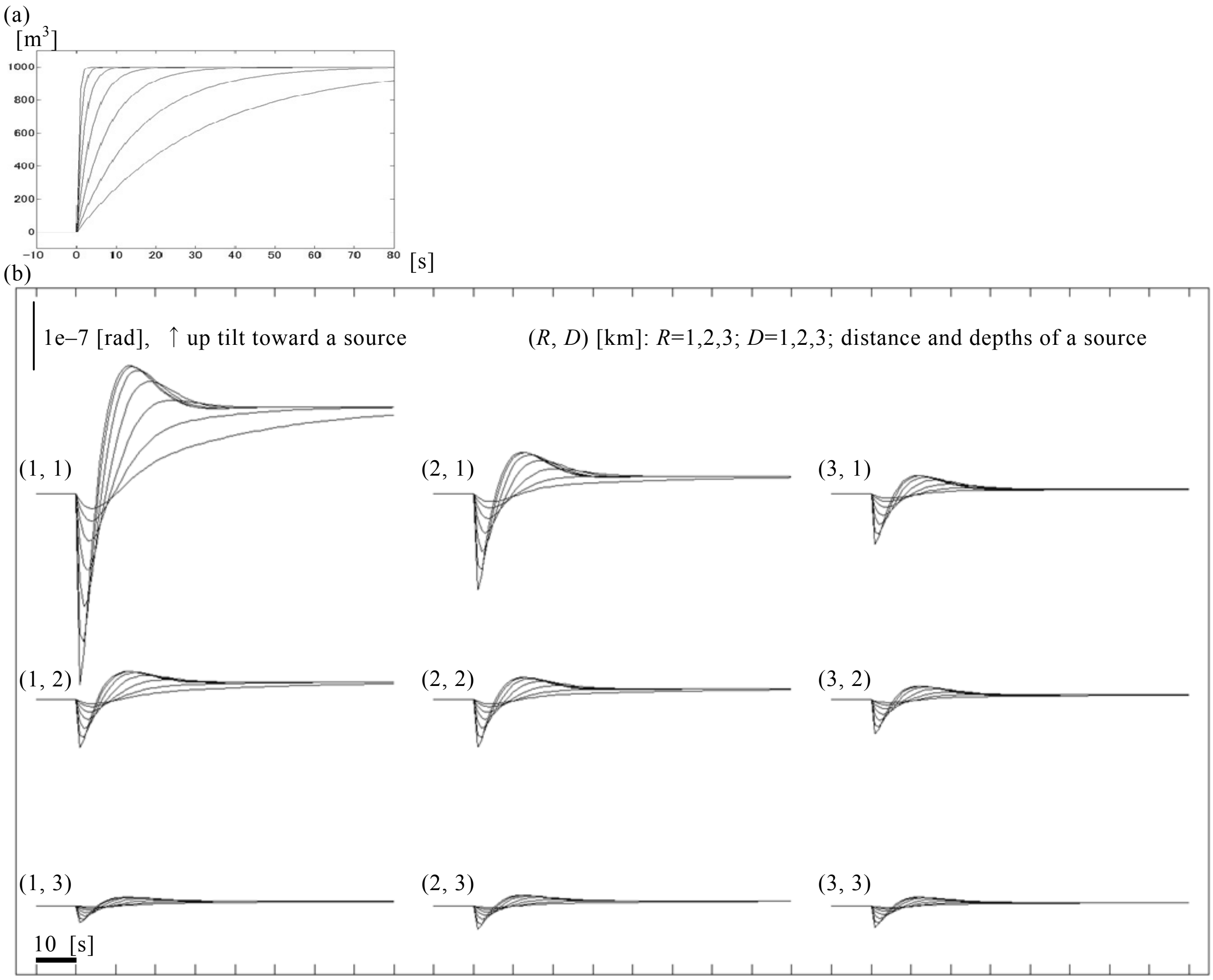

Fig. 9 Examples of apparent 1 sps tilt records (b) calculated by some of Mogi's models which have variations of time constants (0.5, 1, 2, 4, 8, 16, 32[s]) of exponential relaxing function shown in (a), of which distribution in (b) corresponding distances and depths (1, 2 and 3 km) of the source shown as (R, D) on each trace.

$$a_0' = \tau^2 + 2\sqrt{2}\,\tau/\omega_d + 4/\omega_d{}^2 \quad [\mathrm{s}^2]$$

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \frac{9DR/4\pi L^5}{a_0'} \begin{pmatrix} \tau^2 - 4L^2/3Dg \\ 2\tau^2 + 8L^2/3Dg \\ \tau^2 - 4L^2/3Dg \end{pmatrix} \quad [\mathrm{m}^{-3}]$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{a_0'} \begin{pmatrix} 2\tau^2 - 8/\omega_d{}^2 \\ \tau^2 - 2\sqrt{2}\,\tau/\omega_d + 4/\omega_d{}^2 \end{pmatrix}$$

$$\tau = 1\ [\mathrm{s}]$$

$$\omega_c = 2\pi / T_c\ [\mathrm{rad/s}],\ T_c = 30\ [\mathrm{s}]$$

$$\omega_d = \frac{2}{\tau}\tan^{-1}\frac{\tau\omega_c}{2} \cong \frac{2\pi}{30.1}\ [\mathrm{s}^{-1}]$$

となる．変動源の位置（D[m]，R[m]，それらの関数 L）に応じて，第 n ステップの傾斜記録は，2 ステップ前までの変動源の体積変化の入力と，1，2 ステップ前の傾斜記録の出力の線形結合で表される．

なお，式(5)から出発して，この入力と出力の逆演算，すなわち傾斜計記録から体積変化を求める漸化式が形式的には作成できるが，不安定な性質を持つため，活用方法は検討を要する（付録〔D〕）．

5.4 茂木モデルでの計算例

(1) 与えられた変動源の時間関数への応答

ある水平距離と深さの茂木モデルの変動源で体積変化が与えられた場合の，この傾斜計記録の計算結果を例示する．

まず, 体積変化は変化量 $V_{\max}$ に対する緩和関数（極性は膨張）をいくつかの時定数（0.5, 1, 2, 4, 8, 16, 32[s]）で設定し，変動源の位置は，水平距離と深さをそれぞれ 1, 2, 3 km で設定した例を Fig. 9 に示す．時間の経過と共に本来の傾斜への応答に落ち着くが，初動部分は変位の短周期成分への応答が重なるため極性が反転する．変動の立ち上がりが緩やかになるにつれて初動の反転の振幅も小さくなる．ステップに近い時定数 0.5 秒の変動に対する傾斜応答と変位応答の振幅の関係は Fig. 8 で与えられる．

次に，体積変化として次式のような関数

$$\frac{V_{\max}}{1 + \exp\left(-(t - t_0)r\right)}$$

を用いて，r の値（$V_{\max}$ で規格化した最大増加率）で立ち上がりの緩急を調節した場合（緩慢な方から 1/12, 1/10, 1/8, 1/6, 1/4, 1/2 [s^{-1}]）の傾斜計の応答の例を Fig. 10 に示す（$D = R = 1000$ m）．緩慢な変化では初動の反転は見られず，急な立ち上がりの変化に対して初動の反転が生じることが分かる．

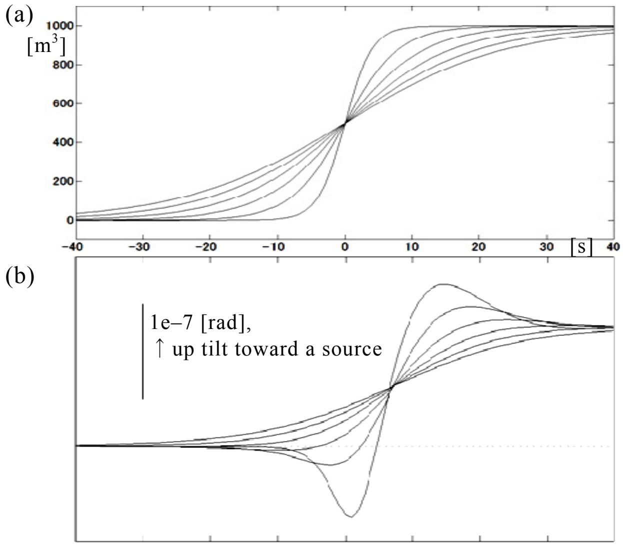

Fig. 10 Examples of apparent 1 sps tilt records (b) ($D = R$ = 1000 [m]) calculated by some of Mogi's models with sigmoidal source time functions which have variations of rapidness (a).

(2) 傾斜計記録からの変動源の挙動推定

2010 年 5 月 27 日に発生した霧島山新燃岳の水蒸気爆発に伴い，火口中心から約 3 km 南南東に設置されている高千穂河原の傾斜計 NS 成分に記録された 1 秒値の変化（Fig. 1）は，逆極性の初動を伴い急激な地下の膨張を示す変動（N 上がり）の後，噴火開始にやや先行して収縮傾向に転じ，噴火微動の減衰と共にほぼ元の状態に戻った．噴火直前は火口直下の膨張の茂木モデルで解釈できるとして，この秒値の初動の逆極性を解釈するために，前述のとおり茂木モデルによる地殻変動とこの傾斜計の特性を検討し，地下の体積膨張の急な立ち上がりにより，秒値の初動の逆極性は必然的であることがわかった．

Fig. 11 に，変動源の位置を新燃岳の火口直下に仮定して，この初動を含む傾斜計記録(a)に 5.3 節末尾で触れた逆演算を適用し，体積膨張の時間変化の推定を試みた結果を示す．この推定は漸化式が不安定なため，傾斜データの期間を変えてそれぞれに発散しない深さを探索し（期間の最後の 15 秒間の平均 2 階差分がゼロに近い条件），その計算結果の時系列を重ねて共通区間の中央値と共に示す(b)．この探索が収束する場合は，その深さは距離 R で Fig. 7 のモデルの挙動による傾斜と変位の比が等しい 2 つの深さのいずれかで，それらを D_1, D_2 とすると式(3)の方程

式から $D_1D_2 = R^2$ を満たす．今回の初動に対応する変化は他の周辺観測点に見られないことから変動源はごく浅いと考えられ，その深さ(e)は約 2000 m で，そこで計算された膨張量は初期 2 秒間(d)と 30 秒後(c)でそれぞれ約 700 m^3 と 6000～7000 m^3，この変化中の最大値は概ね 8000 m^3 である(b).

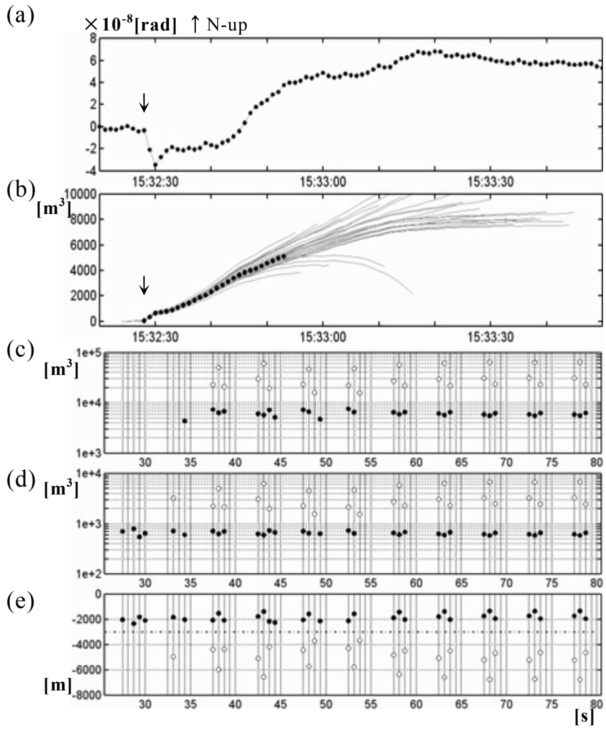

Fig. 11 Estimated volume changes and depths of Mogi's models of eruption of Shinmoedake on May 27, 2010 as Fig. 1 by the tiltmeter record (a) at 3 km SSE from the vent. These are the results of trials to search to avoid divergence of the recurrence expression. Several lengths and starts of spans of the record are applied to confirm the stabilities of the results. Gray lines in (b) show output sequences of expression with the spans of the record and black dots show the median of them during the common span. Arrows show the same time when the sharp onset of observed tilt change showing depression on the direction of the vent and calculated simultaneous expansive volume change. In (c) and (d) the estimated volume expansions at 30 seconds and 2 seconds after the onset (arrows) by the spans, and in (e) two depths that causes equivalent response of the tiltmeter are shown. Filled and empty marks respectively indicate the shallower and deeper ones in (e), i.e. $D<R$ and $D>R$ where R=3000[m]. (b) indicates the shallower results. These results are plotted for the lengths of the spans (from 30 to 80 seconds shown beneath the horizontal axes) and the start of them (at 4 to 0 seconds before the onset shown as left-to-right 5 members).

6 ダイクモデルの場合

火山の地殻変動の解釈として，地下に板状の変動源を設定するダイクモデルも用いられ，ダイクの位置，大きさおよび角度のパラメタが与えられると，傾斜と変位はそれぞれ開口量に比例するベクトルとして計算できる（Okada, 1992）．最も単純な例として，南北方向の鉛直のダイクモデルで，その分布を Fig. 12 に示す．鉛直のダイクモデルでは，膨張によりダイクを挟んで隆起の頂点が 2 ヶ所に生じ，ダイ

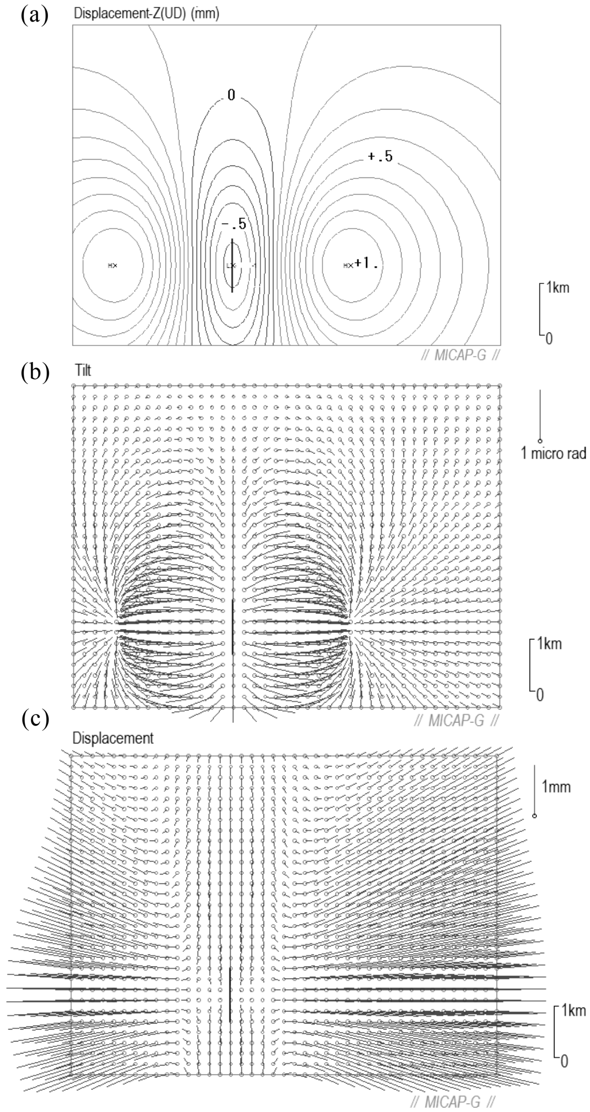

Fig. 12 Examples of distributions of (a) upheavals, (b) tilt, and (c) horizontal displacement caused by a vertical dike model shown as longitudinal line segment in each figure, of which the depth of the top is 2 km below, the vertical length is 1 km and the tensile is 10 cm. MICAP-G software (Naito and Yoshikawa, 1999) was used to draw these figures using formulae by Okada (1992).

クの周囲は沈降領域になる．一方，変位は概略として，ダイクの直交方向を中心にダイクから離れる領域と，ダイクの延長線上を中心にダイクに近づく領域ができる．茂木モデルでは傾斜と変位は常に反対向きのため，急な変動で傾斜計の初動は傾斜と逆極性になるが，ダイク付近の東西には，傾斜による加速度(b)と変位(c)が外向きで分布し，初動が傾斜と同じ極性で現れる領域ができる．

ダイクモデルの急な膨張に対するこの傾斜計の応答も，傾斜ベクトルの LPF 応答成分に変位ベクトルの HPF 応答成分（見かけ傾斜換算，変位方向 up）が重なって記録される．そのベクトル変化を例示するため，この単純化した例で，各ベクトルを観測成分（$(x, y) = (E, N)$）に分解して数値計算を試みる．

ダイクモデルでの数値計算は，傾斜と変位がそれぞれ開口量に比例し，その成分(x, y)ごとの比例係数 C_x, C_y が与えられるので，

$$\begin{cases} d_x(t) = C_x \gamma_x(t) \\ d_y(t) = C_y \gamma_y(t) \end{cases}$$

を仮定でき（ただし傾斜の成分がゼロとなる点は除く），傾斜変動の時系列 $\gamma(t)$を入力と考えると，式(4)以降の同様の計算が可能である．途中の計算は付録〔B〕に示すとおりで，成分(x, y)ごとに式(6)と同じ形式の漸化式が得られる（ただし入力は傾斜変動 γ）．

$$\begin{cases} \alpha_{x,n} = b_{x0}\gamma_{x,n} + b_{x1}\gamma_{x,n-1} + b_{x2}\gamma_{x,n-2} \\ \qquad\qquad - a_1\alpha_{x,n-1} - a_2\alpha_{x,n-2} \\ \alpha_{y,n} = b_{y0}\gamma_{y,n} + b_{y1}\gamma_{y,n-1} + b_{y2}\gamma_{y,n-2} \\ \qquad\qquad - a_1\alpha_{y,n-1} - a_2\alpha_{y,n-2} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} b_{x0,y0} \\ b_{x1,y1} \\ b_{x2,y2} \end{pmatrix} = \frac{1}{a_0'} \begin{pmatrix} \tau^2 + 4C_{x,y}/g \\ 2\tau^2 - 8C_{x,y}/g \\ \tau^2 + 4C_{x,y}/g \end{pmatrix}$$

（a_0’ および係数 a は式(6)と同じ）

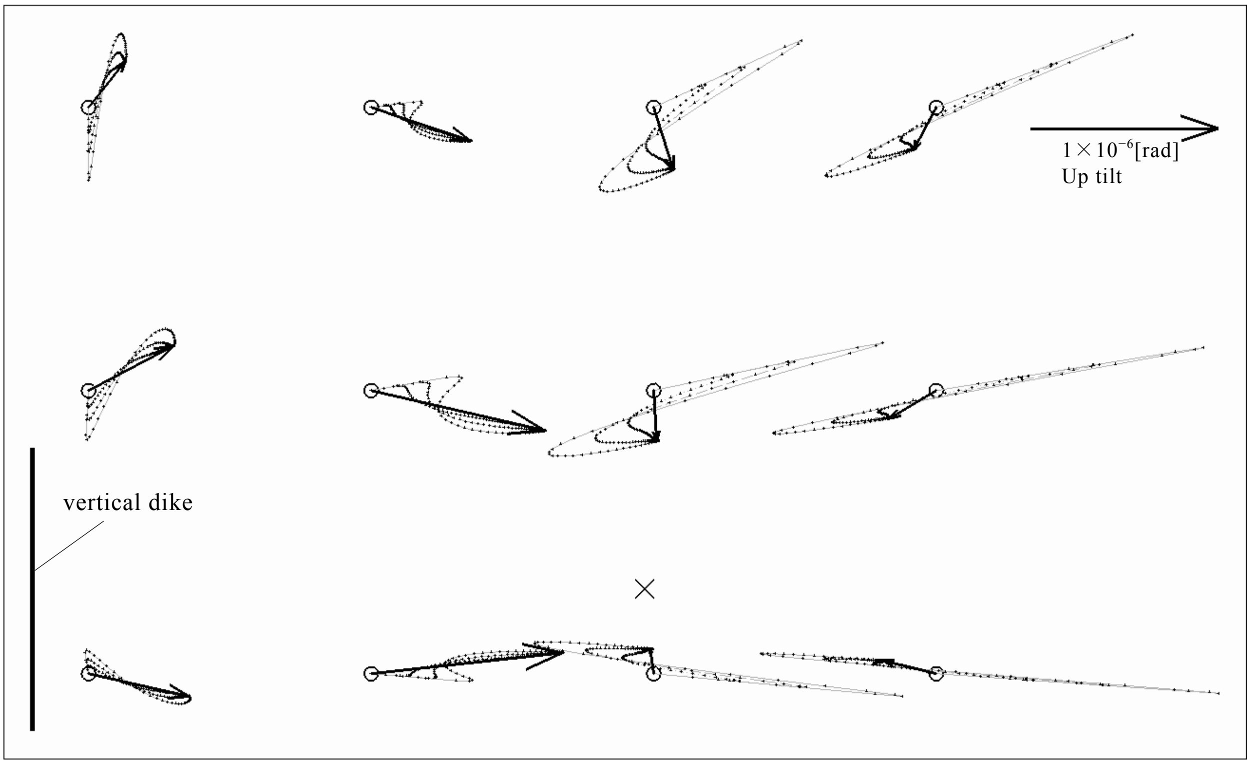

Fig. 13　Distribution of calculated 1 sps apparent changes of up vectors by the tiltmeters caused by the dike model as in Fig. 12 which have expansive exponential functions with time constants 5, 10 and 20 seconds. The grid points arrayed at intervals of 1 km. Arrows show the final up tilt vectors. A cross is the peak of upheavals. Apparent transient HPF responses to displacements increase with increasing of rapidness of volume changes, i.e. short-period components of the changes. The first motions of tilt records are proportional to the horizontal motion vectors before appearance of LPF responses to the real tilt vectors. The dissolved responses are shown in Fig. 14.

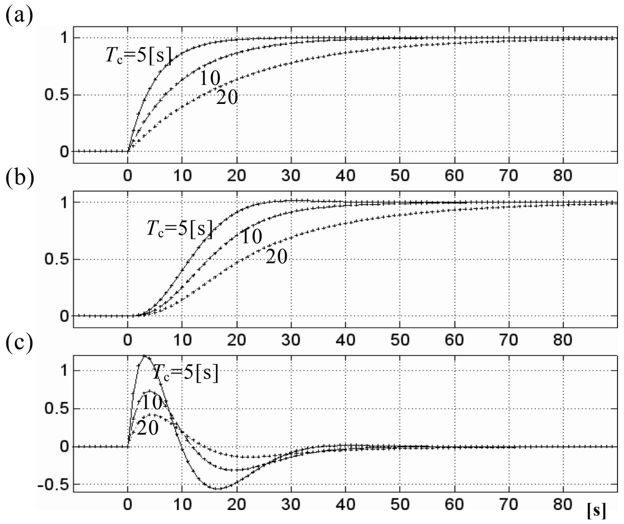

Fig. 14 Examples of calculated responses of the tiltmeter to tilt (b) and displacement (c) both of which the changes have the same time functions (a) as in Fig. 13. If a source time function, tilt and displacement vectors are given, apparent transient response of the tiltmeter is calculated by adding up the two vectors that grow as these responses to the function.

モデルで与えられる比例係数 C_x, C_y を用いて，傾斜変動ベクトルの時系列を入力として傾斜計 2 成分の応答ベクトル時系列が計算できる．Fig. 12 のダイクが Fig. 9 (a)のような緩和関数（時定数 5, 10, 20 秒）で膨張した場合の，この傾斜計記録に現れる見かけの傾斜ベクトル変化の分布を Fig. 13 に例示する．傾斜計記録の初動ベクトルは Fig. 12(c)の変位ベクトルに比例して現れ，傾斜の LPF 応答と変位の HPF 応答（傾斜換算）の足し算による過渡的なベクトル変化を経て，最終的に同図(b)の傾斜ベクトルへと収束する様子が示されている．即ち，傾斜と変位の 2 つのベクトルが，変動源の膨張に比例して成長するのに対し，それぞれへの独立の応答（Fig. 14）をベクトルで合成した結果で，これらの見かけの傾斜ベクトル変化が生じる．2 つのベクトルが正反対向きの場合の応答が，前節までの茂木モデルの検討で得た結果である．

このように傾斜計の秒値で急な変化を解釈する上で，ダイクモデルを選択すると，同時に生じている変位ベクトル場に対応して，変位方向上がりの初動とその後の短周期応答が重なることで，この傾斜計の記録に見かけのベクトル変化が現れる可能性を念頭におく必要が生じる．その変化は傾斜と変位の 2 つのベクトル場の反映であり，その観点でモデルとの整合性について検討を要する．見方を変えれば静的な傾斜への応答のみで検討するより，モデルパラメタへの拘束条件を増やすことができるとも言える．

7 その他の秒値に関する参考事項

前述（4.2 節）の通り，この傾斜計の秒値に見られる短周期（～数 10 秒）の現象の波形記録は，固有周期 30 秒，減衰定数 0.707 の変位地震計と同等である．そのような波形は，変位地震計の固有周期より短周期の記録（実際は傾斜応答も含む）を変位波形と呼ぶのと同じ意味で，30 秒より短周期については変位波形と考えて良い（サンプリング周期 1 秒に対応して解析可能なのは周期 2 秒以上）. その典型的な例は遠地地震の波形であり，また地震や火山現象と無関係に周期数秒の振動が長時間継続して見えるのは，波浪等によって励起されるいわゆる脈動ノイズとして地震計記録で馴染みの現象の変位波形である．

この傾斜計の 30 秒より短周期の現象を変位波形として見る場合，縦軸の基準長さを [rad] 単位で表示した値に，式(1)の感度比の逆数

$$S_\gamma / S_d = g[\mathrm{ms}^{-2}] / (2\pi / T_c[\mathrm{s}])^2$$
$$= 223 \ [\mathrm{m/rad}]$$

を掛けることにより, 対応する変位の値が得られる．極性は傾斜の上がり方向と変位方向が一致する．例えば傾斜 NS 成分で縦軸の単位長さを 1×10^{-7} [rad]（上が N 上がり）で表示した地震波形は，30 秒より短周期の部分についてその長さを 22 [μm] の変位（上が N 方向）で解釈して良い．

8 まとめ

短時間の地殻変動で傾斜変化と変位が同時に生じるとき，傾斜計の秒値の解釈においては，以下の認識が必要である．

A) 傾斜計の記録は，傾斜変化に対する LPF の応答と，変位に対する HPF の応答の，ベクトルの重ね合せになる．この HPF は，傾斜計の LPF の特性の 2 階微分で得られ, 気象庁の火山監視用の傾斜計では LPF のカットオフ周期 30 秒以下がその通過帯域である．

B) その結果，周期 30 秒以下の短周期成分を含む急な地殻変動では，傾斜計記録の見かけの立ち上がりは主として変位への応答で現れ，次第に実際の傾斜変動に収束する．変化の立ち上がりが秒値でステップに近い場合は，変位応答は極めて顕著で，その見かけの振幅は実際の傾斜変動の数倍以上になる．見かけの変位応答の極性は，変位方向と傾斜の上がり方向が一致する．

C) 茂木モデルでは，傾斜の上がり方向と変位方向が正反対であるため，急な地殻変動に対する傾斜計の記録には，実際の傾斜変動とは逆極性の見かけの初動が変位応答によって生じる．

D) ダイクモデルでは，急な変化を含む傾斜計記録は，モデルが与える傾斜と変位の 2 つのベクトルに対して整合性を要請することを，モデルパラメタの検討において考慮する必要がある．

本稿では傾斜計の特性の理論的な考察からこれらの知識が導かれることを示し，一つの記録事例に逆演算を適用して噴火時の変動源モデルの挙動の推定を試みた．霧島山等で多数得られている噴火時の傾斜計記録にこれらを適用して，変動源モデルの解析がどのように改善するかを検討することが，今後の課題である．

謝辞

査読者の吉田康宏氏（現文部科学省）には，本稿の改善に有益な助言をいただきました．他の匿名査読者と，編集長の内藤宏人氏（地震予知情報課）および編集委員の坂井孝行氏（同）にも有益な助言をいただきました．記して感謝の意を表します．

文献

気象庁地震火山部火山課 (2013): 全国 47 火山への火山観測施設の整備，験震時報，投稿中．

内藤宏人・吉川澄夫 (1999): 地殻変動解析支援プログラム MICAP-G の開発，地震 2，**52**，101-103．

松森敏幸 (2013): 新しくなった火山監視・情報センターシステム（VOIS）の紹介，験震時報，**76**，83-131．

茂木清夫 (1957): 桜島の噴火と周辺の地殻変動との関係，火山，**1**，9-18．

山川宜男 (1955): 内部力源による半無限弾性体の変形について，地震，**8**，84-98．

Aoyama, H. and H. Oshima (2008): Tilt change recorded by broadband seismometer prior to small phreatic explosion of Meakan-dake volcano, Hokkaido, Japan, Geophys. Res. Lett., **35**, L06307.

Okada,Y. (1992): Internal deformation due to shear and tensile faults in a half-space, Bull. Seism. Soc. Am., **82**, 1018-1040.

（編集担当　坂井孝行）

付録

ここに示す計算については，ディジタル信号処理（DSP）あるいはディジタルフィルタ設計に関する一般的な解説が参考になる（例えば，中村尚五「ビギナーズ　ディジタルフィルタ」，東京電機大学出版局，1989）．Laplace 変換形式（$s=i\omega$，i：虚数単位）を $H(s)$に添字をつけて表す．

〔A〕茂木モデルに対する応答の漸化式

式(5)から式(6)を導出する．式(4)の傾斜（加速度）入力に対する LPF はバタワース 2 次型であり，入力が変位（加速度の 2 階積分）の場合の応答はこの LPF を 2 階微分して求められる．それぞれアナログ形式の伝達関数は（折れ点 T_c），

$$
\begin{aligned}
H_{FL}(s) &= \frac{{\omega_c}^2}{s^2+\sqrt{2}\omega_c\cdot s+{\omega_c}^2},\\
H_{FH}(s) &= \frac{s^2}{s^2+\sqrt{2}\omega_c\cdot s+{\omega_c}^2}\\
\omega_c &= 2\pi/T_c\ \text{[rad/s]},\ T_c=30\text{[s]}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

である．H_{FH}（H_{FL}の 2 階微分を$\times s^2$で求めて利得 1 になるように ${\omega_c}^2$で規格化）は，バタワース 2 次型 HPF である．これらを用いると式(5)の Laplace 変換は，畳み込み積分が積になり，

$$H_\alpha(s)=\left(A\,H_{FL}(s)+B\,H_{FH}(s)\right)H_v(s)$$

となる．右辺の（）内が体積変化から傾斜記録に変換するアナログ周波数領域の伝達関数で，これを新たに H_Fとおくと，

$$
\begin{aligned}
H_\alpha(s) &= H_F(s)\,H_v(s)\\
H_F(s) &= AH_{FL}(s)+BH_{FH}(s)
\end{aligned}
\tag{8}
$$

この H_Fは，式(5)の A, B と式(7)を代入し，式(1)の関係から

$$S_d \big/ S_\gamma = \omega_c^{\,2} \big/ g \quad [\mathrm{rad/m}]$$

を用いて，

$$H_F(s) = \frac{A\,\omega_c^{\,2} + B\,s^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_c\, s + \omega_c^{\,2}}$$
$$= \frac{9DR}{4\pi L^5} \frac{1 - \left(L^2 \big/ 3Dg\right) s^2}{\left(s^2 \big/ \omega_c^{\,2}\right) + \left(\sqrt{2} s \big/ \omega_c\right) + 1}$$

となる．

次に，ディジタル領域で記述するため，サンプリング周期 τ [s]による離散化を表す双一次変換の関係

$$s = \frac{2}{\tau} \cdot \frac{(1 - z^{-1})}{(1 + z^{-1})}, \quad z = \mathrm{e}^{i\omega\tau}$$

を代入し Z 変換する．折れ点に対応するディジタル領域での角周波数（この変換を pre-warping という）

$$\omega_d = \frac{2}{\tau} \tan^{-1} \frac{\tau\omega_c}{2}$$

を用いて $Z\{\}$で表すと，離散化された伝達関数

$$Z\{H_F\}(z) = \frac{\dfrac{9DR}{4\pi L^5} \left(1,\ z^{-1},\ z^{-2}\right) \begin{pmatrix} \tau^2 - 4L^2 \big/ 3Dg \\ 2\tau^2 + 8L^2 \big/ 3Dg \\ \tau^2 - 4L^2 \big/ 3Dg \end{pmatrix}}{\left(1,\ z^{-1},\ z^{-2}\right) \begin{pmatrix} \tau^2 + 2\sqrt{2}\,\tau/\omega_d + 4 \big/ \omega_d^{\,2} \\ 2\tau^2 - 8 \big/ \omega_d^{\,2} \\ \tau^2 - 2\sqrt{2}\,\tau/\omega_d + 4 \big/ \omega_d^{\,2} \end{pmatrix}} \quad (9)$$

が求められる．分子は入力，分母は出力の信号列の Z 変換に掛かる．それぞれ，$(1, z^{-1}, z^{-2})$ の線形結合で，ここでは見やすさのため形式的に各係数を列ベクトルで表現している（行ベクトル×列ベクトル）．この変換は数式処理ソフトウェア（フリーの Maxima など）で簡便に得られる．

最終的に求める漸化式の左辺には係数 1 の実時間出力を置くので，そこに掛かる分母の第 1 項の係数で，分母子の列ベクトルで表現した各係数を割ってから逆 Z 変換する．式(8)の Z 変換は，各係数を改めて a_n, b_n（$n = 0, 1, 2$）とおくと，$a_0 = 1$ で，

$$Z\{H_\alpha\}(z) = Z\{H_F\}(z)\, Z\{H_v\}(z)$$
$$= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} Z\{H_v\}(z) \quad (10)$$

となり，逆 Z 変換すると，式(9),(10)で与えられる係数により漸化式

$$\alpha_n = b_0 v_n + b_1 v_{n-1} + b_2 v_{n-2} - a_1 \alpha_{n-1} - a_2 \alpha_{n-2} \quad (11)$$

$$a_0' = \tau^2 + 2\sqrt{2}\,\tau/\omega_d + 4 \big/ \omega_d^{\,2} \quad [\mathrm{s}^2]$$

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \frac{9DR/4\pi L^5}{a_0'} \begin{pmatrix} \tau^2 - 4L^2 \big/ 3Dg \\ 2\tau^2 + 8L^2 \big/ 3Dg \\ \tau^2 - 4L^2 \big/ 3Dg \end{pmatrix} \quad [\mathrm{m}^{-3}]$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{a_0'} \begin{pmatrix} 2\tau^2 - 8 \big/ \omega_d^{\,2} \\ \tau^2 - 2\sqrt{2}\,\tau/\omega_d + 4 \big/ \omega_d^{\,2} \end{pmatrix}$$

が求められる．

〔B〕 ダイクモデルの場合の漸化式

ダイクモデルでは変位と傾斜が独立のベクトルだが，それぞれ向きはダイクの形状と位置関係で決まり，大きさは開口量に比例するので，傾斜の成分がゼロとなる点を除外すれば，成分ごとに変位と傾斜の比例関係

$$\begin{cases} d_x(t) = C_x \gamma_x(t) \\ d_y(t) = C_y \gamma_y(t) \end{cases}$$

を仮定できる．この比例係数は例えば Okada（1992）の式を用いた MICAP-G の出力から変位／傾斜で得られる．x, y について同様なので以下区別を省略し，式(4)で傾斜変動 $\gamma(t)$を入力と考えて，式(1)の関係を用いて同様に Laplace 変換すると，アナログ周波数領域の伝達関数 H_{FD} が得られる．

$$H_\alpha(s) = \left(H_{FL}(s) + C\left(\omega_c^{\,2} \big/ g\right) H_{FH}(s)\right) H_\gamma(s)$$

$$H_{FD}(s) = \left(H_{FL}(s) + C\left(\omega_c^{\,2} \big/ g\right) H_{FH}(s)\right)$$
$$= \frac{\omega_c^{\,2}\left(1 + (C/g)s^2\right)}{s^2 + \sqrt{2}\omega_c\, s + \omega_c^{\,2}}$$

これを Z 変換すると，

$$Z\{H_{FD}\}(z) = \frac{\left(1,\ z^{-1},\ z^{-2}\right) \begin{pmatrix} \tau^2 + 4C/g \\ 2\tau^2 - 8C/g \\ \tau^2 + 4C/g \end{pmatrix}}{\left(1,\ z^{-1},\ z^{-2}\right) \begin{pmatrix} \tau^2 + 2\sqrt{2}\,\tau/\omega_d + 4 \big/ \omega_d^{\,2} \\ 2\tau^2 - 8 \big/ \omega_d^{\,2} \\ \tau^2 - 2\sqrt{2}\,\tau/\omega_d + 4 \big/ \omega_d^{\,2} \end{pmatrix}}$$

$$
\begin{aligned}
Z\{H_\alpha\}(z) &= Z\{H_{FD}\}(z)\, Z\{H_\gamma\}(z) \\
&= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} Z\{H_\gamma\}(z)
\end{aligned}
$$

となる．同様にして逆 Z 変換することにより，同じ形式の漸化式（ただし入力は傾斜変動 γ）

$$
\alpha_n = b_0\gamma_n + b_1\gamma_{n-1} + b_2\gamma_{n-2} - a_1\alpha_{n-1} - a_2\alpha_{n-2}
$$

が得られる．a_0’ および係数列$\{a\}$は式(11)と同じで成分に共通である．係数列$\{b\}$は次のようになる．

$$
\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{a_0'} \begin{pmatrix} \tau^2 + 4C/g \\ 2\tau^2 - 8C/g \\ \tau^2 + 4C/g \end{pmatrix}
$$

Cにモデルで与えられる成分(x, y)ごとの比例係数C_x, C_yを用いて，成分ごとの係数列$\{b_x\}$，$\{b_y\}$を求め，漸化式を構成できる．

〔C〕 バタワース 2 次型 HPF と地震計の応答

式(7)のバタワース 2 次型 HPF の伝達関数

$$
H_{FH}(s) = \frac{s^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_c \cdot s + {\omega_c}^2}
$$

は，線形システムとしての振り子式地震計（固有角周波数 ω_n, 減衰定数 h，利得 1 の 3 個のパラメタで特性が記述できる）の運動方程式の，角周波数 ω の定常解（いわゆる複素周波数応答，この絶対値と偏角がそれぞれ振幅特性と位相特性），

$$
\frac{-\omega^2}{-\omega^2 + i\,2h\omega_n\omega + {\omega_n}^2}
$$

の $h = 1/\sqrt{2}$ の場合と等しい（$s = i\omega$ を代入して得られる）．即ち $h = 1/\sqrt{2}$（≒0.707）の地震計の特性は，その固有周波数をカットオフ周波数に持つバタワース 2 次型 HPF と等価である．

〔D〕 逆演算の可能性

本文の式(5)の逆演算は，式(8)から，

$$
H_v(s) = \frac{H_\alpha(s)}{H_F(s)}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{H_F(s)} &= \frac{s^2 + \sqrt{2}\omega_c s + {\omega_c}^2}{A{\omega_c}^2 + Bs^2} \\
&= \frac{4\pi L^5}{9DR} \frac{\left(s^2/{\omega_c}^2\right) + \left(\sqrt{2}s/\omega_c\right) + 1}{1 - \left(L^2/3Dg\right)s^2}
\end{aligned}
$$

となり，この関数の極（分母=0 となる複素数 s の解）は，

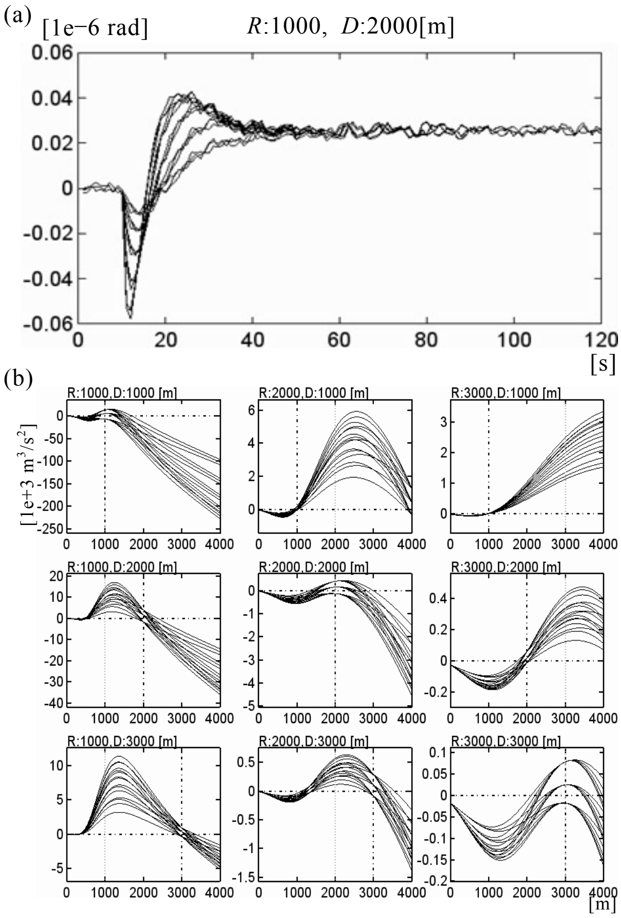

Fig. 15　Influence of noises on tilt records in estimating depth of source by the recurrence expression with them. The tilt records used are the same ones shown in Fig. 9 (b). Three sequences of noise made by integration of uniform random numbers passed by 10-second HPF and adjusted to 5 % of maximal amplitudes of each response were added to each calculated tilt record (as a trial) as is shown in (a) for example (R = 1000, D = 2000 [m]). Each figure in (b) corresponding distribution of Fig. 9 (b), i.e. distance and depth of source, shows mean values of second-order differences of output sequences of the expression for last 30 seconds to depth. Depths can be surmised at the points where curves cross the zero line.

$$s = \pm\sqrt{3Dg}\Big/L$$

である．極の 1 つでも実部が正（Laplace-s 平面において右半平面上）の場合その伝達関数は不安定であり，この逆演算もそれに該当する．

このZ変換は，式(9)の分母子を逆にした

$$\frac{\dfrac{4\pi L^5}{9DR}\left(1,\ z^{-1},\ z^{-2}\right)\begin{pmatrix}\tau^2+2\sqrt{2}\,\tau/\omega_d+4\big/\omega_d{}^2\\ 2\tau^2-8\big/\omega_d{}^2\\ \tau^2-2\sqrt{2}\,\tau/\omega_d+4\big/\omega_d{}^2\end{pmatrix}}{\left(1,\ z^{-1},\ z^{-2}\right)\begin{pmatrix}\tau^2-4L^2\big/3Dg\\ 2\tau^2+8L^2\big/3Dg\\ \tau^2-4L^2\big/3Dg\end{pmatrix}}$$

であり，これにより構成した漸化式は，上記の評価に従い一般には発散するが，与えられた入力データ系列に対して発散を回避できる距離 R と深さ D の組みを数値的に探索するなどにより，利用できる可能性がある．

その可能性として，モデルと無関係のノイズが傾斜計記録に重畳している場合の，深さの探索への影響を調べるため，Fig. 9(a)と同様の体積膨張（ここでは時定数 1～16 秒）のモデルによる傾斜記録に，ノイズを加えた場合の，横軸の深さ変化（距離はモデルに固定）に対する漸化式の期間末尾における平均 2 階差分（縦軸，発散状況を評価）を，Fig. 15 に示す．(b)の各図は Fig. 9(b)と同じ配置で変動源の位置（深さ D と距離 R）に対応し，ノイズがない場合は一方がモデルの深さである $D_1D_2 = R^2$ で 2 階差分はゼロを通り，この判定で探索が可能であることが確認できる．ノイズを変えて 3 通りの試行による結果では，特に $D = R$ の例でノイズの影響が大きく発散を回避できない場合があることがわかる．また別に，急な記録を含まない Fig. 10 の関数では，ノイズがなくても探索は困難であり，この逆演算の漸化式の利用手法は個別の検討が必要である．