験震時報第 71 巻
（2008）89 ～91 頁

機械式地震計の周波数特性を持つ再帰型ディジタルフィルター

Recursive Digital Filter with Frequency Response of a Mechanical Seismograph

勝間田　明男 [1]

Akio KATSUMATA[1]

(Received June12, 2007: Accepted October 22, 2007)

1　はじめに

現在，中規模以上の地震動を震源から比較的近傍において観測するために，フィードバック型加速度計を用いる場合が多い．加速度計の記録から以前に使われていた機械式地震計相当の特性の波形を得る必要がある場合がある．ここでは，機械式地震計の周波数特性を実現するためのディタルフィルターの理論とプログラムを紹介する．

ディジタルフィルターのプログラムとして，これまでにも紹介されたものがある(例えば，斎藤, 1978; 勝間田, 1993)．ここでは，斎藤(1978)や勝間田(1993)と同様の z 変換の理論に基づく，時間領域処理のフィルターを考える．フィルター処理には周波数領域で行う方法もあるが，周波数領域処理では FFT 等により周波数領域に変換する必要があり，時間領域における処理よりも計算量は多くなる．

2　理論

ここでは，再帰型(IIR 型)フィルターとして地震計の特性を実現する．再帰型フィルターの一般的な形として次のものがある．

$$y_i=G(x_i+a_1x_{i-1}+a_2x_{i-2})-b_1y_{i-1}-b_2y_{i-2} \tag{1}$$

ここで，x_i は入力の時系列，y_i は出力の時系列，G, a_1, a_2, b_1, b_2 はフィルターのパラメーターである．この周波数特性を考える．$x(t)$のフーリエ変換を $X(\omega)$，サンプリング間隔を Δt とすると，$x(t\text{-}\Delta t)$ のフーリエ変換は $X(\omega)\exp(-i\omega\Delta t)$となるので，式(1)のフーリエ変換は次のとおりである．

$$\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=G\frac{1+a_1\exp(-i\omega\Delta t)+a_2\exp(-i2\omega\Delta t)}{1+b_1\exp(-i\omega\Delta t)+b_2\exp(-i2\omega\Delta t)} \tag{2}$$

なお，ωは周波数を表す．

式(2)におけて $\exp(-i\omega\Delta t)=z^{-1}$ という置き換えをしたものを z 変換と称する(例えば，三谷, 1987)．

$$\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=G\frac{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}} \tag{3}$$

この式は本来周波数特性の式であるが，式(1)との比較から時系列処理を表していると解釈できる．そこで，周波数特性の式を式(3)のように変換して，再帰型フィルターの式を得る．

機械式地震計の周波数特性は次の式で表現される(例えば，宇津, 2001)．

$$U(T)=\frac{A}{1-(T/T_0)^2-i2h(T/T_0)} \tag{4}$$

ここで，A は倍率，T は入力地動の周期であり ω=2π/T, T_0 は振り子の固有周期, h は減衰定数である．

式(4)において，$i\omega$に次の双一次変換(例えば，三谷, 1987)を施す．

$$i\omega=c\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \tag{5}$$

ここで，c は周波数補正のための係数である．

[1] 気象研究所地震火山研究部，Seismology and Volcanology Research Department, Meteorological Research Institute

係数 c はある特定の周波数の時に意図する周波数特性が得られるように決定すればよい．もし，周期 $T=T_0$ のときに式(5)の変換によって得られた近似された周波数特性が本来の周波数特性に正確に一致させようとすれば，ω に $2\pi/T_0$，z^{-1} に $\exp(-i2\pi\Delta t/T_0)$ を代入して c を決定すればよい．

$$c=\frac{2\pi}{T_0}\cot\frac{\pi\Delta t}{T_0}$$

以上の式を地震計の周波数特性の式に代入し，ディジタルフィルターを得る．

$$U(z)=G\frac{1-2z^{-1}+z^{-2}}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}} \qquad (6)$$

ここで

$$G=\frac{A}{1+2h\omega_0+\omega_0^2}$$

$$b_1=\frac{-2+2\omega_0^2}{1+2h\omega_0+\omega_0^2}$$

$$b_2=\frac{1-2h\omega_0+\omega_0^2}{1+2h\omega_0+\omega_0^2}$$

$$\omega_0=\frac{2\pi}{cT_0}$$

加速度記録から変位記録を得るためには，数値積分を行う必要がある．積分には台形式を用いる．

$$y_i=y_{i-1}+\frac{\Delta t}{2}(x_i+x_{i-1})$$

これは，$c=2/\Delta t$ とした場合の $1/i\omega$ の双一次変換に対応する．

式(6)に 2 階積分を組み合わせた場合には次のとおりになる．

$$G\frac{1-2z^{-1}+z^{-2}}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2\left(\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}\right)^2$$

$$=G\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}} \qquad (7)$$

式(7)の振幅の周波数特性を第 1 図に実線として表す．T_0=6.0(s)，h=0.55，A=1.0，Δt=0.01(s)を仮定している．但し，ここでは式(7)の値に$(i\omega)^2$ をかけて変位出力としての周波数特性として示してある．高周波側において出力振幅が小さくなるのは，台形式の周波数特性の影響である．第 1 図における破線は，式(7)の振幅特性を表す．長周期側において、式(7)の特性は，式(4)の特性にほぼ一致している．

３　プログラム

式(7)をプログラム化したものを次に示す．但し，A=1.0 を仮定している．

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
/*----------------------------------------------------
  Recursive digital filter to convert acceleration to
  displacement record of a mechanical seismograph
Y(n) = gn * (X(n) + h[0] * X(n-1) + h[1] * X(n-1)
         - h[2] * Y(n-1) - h[3] * Y(n-2)
       return code =0 : no error
                   =1 : t0 <= 0
                   =2 : dt <= 0
  ----------------------------------------------------*/
int filt_acc_to_seismogram(
          double t0
          double h_damp
          double dt
          int      *m_filt
          double *gn_filt,
          double h_filt[])
{
     double    pi= M_PI;
     double    c, w0;
     if(t0 <= 0.0) return(1);
     if(dt <= 0.0) return(2);
     c=(2.0 * pi / t0)/tan(pi * dt / t0);
     w0=2.0 * pi /(c * t0);
     *gn_filt =1.0/(1.0+2.0 * h_damp * w0 + w0 *w0)
                 * (dt/2.0) * (dt/2.0);
     h_filt[0]= 2.0;
     h_filt[1]= 1.0;
     h_filt[2]=(-2.0+2.0 * w0 * w0)
```

```
            /(1.0+2.0 * h_damp * w0 + w0 * w0);
    h_filt[3]=(1.0-2.0 * h_damp * w0 + w0 * w0)/
             (1.0+2.0 * h_damp * w0 + w0 * w0);
    *m_filt =1;
    return(0);
}
```

ここで，各引数は以下の通りである．

t0　　　入力：地震計の固有周期(s).

h_damp　入力：地震計の減衰係数.

dt　　　入力：データのサンプリング間隔(s).

*m_filt　出力：フィルターの数(1 が返される).

*gn_filt　出力：倍率係数．式(7)の $G(\Delta t/2)^2$ に相当する.

h_filt[]　出力：フィルター係数．h_filt[0～3]はそれぞれ式(1)の a_1, a_2, b_1, b_2 にあたる.

なお，プログラム中の h_filt[0]と h_filt[1]を以下のように書き換えると速度記録から変位記録を得るプログラムとなる.

```
    h_filt[0]= 0.0;
    h_filt[1]=-1.0;
```

4　まとめ

機械式地震計の特性を再現するための，再帰型ディジタルフィルターの理論と，加速度及び速度記録から機械式地震計の特性をもった変位記録を得るためのプログラムを提示した.

当プログラムを使って計算した係数が，気象庁において加速度計の出力から変位振幅を得るために，2001 年 5 月より使われており，変位マグニチュードを決定するための基礎データを与えている.

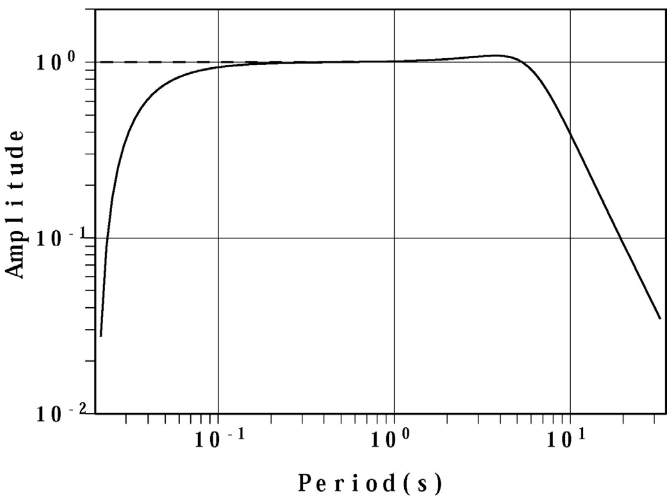
文献

宇津 徳治 (2001): 地震学, 第３版, 共立出版. 376pp.

勝間田 明男 (1993): ベッセルディジタルフィルタの自動設計について， 験震時報, ***56***, 17-34.

斎藤 正徳 (1978): 漸化式ディジタルフィルターの自動設計, 物理探鉱, ***31***, 240-263.

三谷 政昭(1987): ディジタルフィルタデザイン, 昭晃堂, 223pp.



第１図　式(7)の振幅の周波数特性(実線).
T_0=6.0(s)，　h=0.55，　A=1.0，　Δt=0.01(s)を仮定している．$(i\omega)^2$をかけて変位出力としての周波数特性として示してある．破線は式(4)として表される地震計の周波数特性である.