

## 余震活動解析プログラムの改良

### Upgrade of a Software Package for Analysis of Aftershock Activities

伊藤 秀美\*<sup>1</sup> 明田川 保\*<sup>2</sup>

Hidemi M. ITO<sup>1</sup> and Tamotsu AKETAGAWA<sup>2</sup>

(Received Jun. 28, 2006 : Accepted Oct. 2, 2006)

**Abstract:** A software package for analysis of aftershock activities is upgraded in the following points. 1) The number of aftershocks accompanied by secondary aftershocks is arbitrary. 2) The truncated Gutenberg-Richter distribution and the Utsu distribution are accepted as magnitude-frequency distributions. 3) Occurrence probability of aftershocks is calculated under generalization 1) and 2). 4) Errors in estimated parameters are given. The upgraded version is incorporated into REASA system for Retrieval of Earthquake Data and Analysis of Seismic Activities.

#### 1 概要

「余震の確率評価手法」(地震調査委員会 1998)を受け、気象庁では余震による被害が懸念される顕著地震が発生した場合に余震確率を発表している。解析には気象研究所で開発した地震活動予測支援システム ACTION(伊藤他,1994)を主に使用しているが、数年の運用期間中に当初の想定より複雑な状況に遭遇しており、改良の必要がでてきた。例えば、平成 16 年(2004)新潟県中越地震では 2 次余震を伴う余震が複数個発生しているが、現状では 1 個の場合しか想定していない。また、余震確率算出に際して、2 次余震に対応する計算ロジックがそもそも組み込まれていない。一方、余震の規模分布として Gutenberg-Richter 分布(以下 GR 分布)を前提にしているが、この分布は規模の大きい余震に対して適切でない可能性がある。このほか、パラメタの推定誤差に関する情報が出力されないことや、サン・マイクロシステムズ社の WS 上のシステムであるため普及しにくい等の問題点を抱えている。

今回、これらを解決すべく以下の改良を行った。

1. 余震回数の時間減衰において、2 次余震を伴う余

震の数は任意

2. 規模分布として、GR 分布のほか上限のある分布(切断 GR 分布および宇津分布)も使用可能
3. 余震確率は前提 1)2)の下で算出可能
4. パラメタの推定誤差の算出
5. PC 上でシステム構築  
震源検索・地震活動解析プログラム REASA(明田川他,2007)への組み込み

本稿の構成は以下の通りである。第 2 節でアルゴリズムの概要を示す。すなわち 2.1 節と 2.2 節で規模分布と最尤法による改良大森公式のパラメタ決定法、2.3 節で余震確率の計算法、第 2.4 節で  $M$  の下限を変えたときのパラメタの変換公式をとりあげる。第 3 節では、プログラムの概要をインターフェースを中心に説明する。この節は簡単なマニュアルもかねており、第 2 節とは独立に読むことが出来る。なお、計算の詳細等は付録にまわしてある。

余震活動の確率評価については、地震調査委員会の上記報告以降にいくつかの新しい試みが提案されている。負の 2 項モデル(岡田・伊藤,2001)や ETAS モデル(石垣,2006)などである。これらの組み込みについては他日を期したい。

\*<sup>1</sup> 気象研究所地震火山研究部 Seismology and Volcanology Department, Meteorological Research Institute

\*<sup>2</sup> 地震火山部地震予知情報課 Earthquake Prediction Information Division, Seismological and Volcanological Department

## 2 アルゴリズム

### 2.1 規模分布

#### 2.1.1 分布式

規模の分布密度としてよく使われるのは GR 分布

$$f_G(M) = \beta \exp(-\beta(M - M_{\min})), \quad M \geq M_{\min} \quad (1)$$

である。ここで  $M_{\min}$  は  $M$  の下限で、 $\beta$  は  $b$  値と

$$\beta = b \log 10 \quad (2)$$

の関係にある。ここで  $\log$  は自然対数を表す。また  $f_G$  は規格化されている

$$\int_{M_{\min}}^{\infty} f_G(M) dM = 1.$$

ところで余震規模は本震規模を越えることはなく、また実際の規模分布  $f$  において  $\log f(M)$  は上に凸となることが多い。上限  $M_{\max}$  を持つ分布として切断 GR 分布 (岡田 1970, 宇津 1978)

$$f_T(M) = \frac{\beta}{C_T} \exp(-\beta(M - M_{\min})) \quad M_{\min} \leq M \leq M_{\max} \quad (3)$$

がある。定数

$$C_T = 1 - \exp(-\beta(M_{\max} - M_{\min})) \quad (4)$$

は規格化条件

$$\int_{M_{\min}}^{M_{\max}} f_T(M) dM = 1 \quad (5)$$

を満たすように決められている。

$M_{\max} \rightarrow \infty$  で切断 GR 分布は GR 分布に帰着する。

また、上限  $\gamma$  を持ちかつ  $\log f(M)$  が上に凸となる分布として宇津分布 (宇津 1978)

$$f_U(M) = \frac{\beta^2(\gamma - M)}{C_U} \exp(-\beta(M - M_{\min})) \quad (6)$$

がある。ここに規格化のための定数  $C_U$  は

$$C_U = \exp(-\beta(\gamma - M_{\min})) + \beta(\gamma - M_{\min}) - 1. \quad (7)$$

本稿で記述される手法では規模分布の上限の取り扱いが切断 GR 分布と宇津分布では異なっている。すなわち、切断 GR 分布の  $M_{\max}$  は固定されるのに対し、宇津分布の  $\gamma$  は観測値から推定される。

#### 2.1.2 最尤推定法

$M$  の確率密度を  $f(M; \theta)$  とする。 $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$  は分布を決めるパラメタで、切断 GR 分布のときは  $k = 1, \theta_1 = \beta$ 、宇津分布のときは  $k = 2$  で  $\theta_1 = \beta, \theta_2 = \gamma$  である。マグニチュード  $M_1, \dots, M_n$  の地震が発生したとする。 $M_1 \sim M_1 + dM_1, M_2 \sim M_2 + dM_2, \dots, M_n \sim M_n + dM_n$  の地震が発生する確率は、各々の地震が独立とすれば、

$$L(M_1, M_2, \dots, M_n; \theta) dM_1 dM_2 \dots dM_n = f(M_1; \theta) f(M_2; \theta) \dots f(M_n; \theta) dM_1 dM_2 \dots dM_n$$

で与えられる。 $L$  を尤度という。最尤法では尤度  $L$  が最大になるようにパラメタ  $\theta$  を決める。これを解析的に遂行することは一般には困難で、通常は数値的手法による。本プログラムではシンプレックス法を用いている。これについては付録 A を参照されたい。

$\theta$  の真の値を  $\theta^{(0)}$ 、最尤推定値を  $\hat{\theta}$  とする。最尤値  $\hat{\theta}$  は見本値データ  $M_1, M_2, \dots, M_n$  に依存する確率変数である。サンプル数  $n$  が十分大きいとき、 $\hat{\theta} - \theta^{(0)}$  は漸近的に平均 0、共分散行列  $V = (F^{-1}(\theta^{(0)})/n)$  の正規分布に従う。ここで  $F^{-1}$  は Fisher の情報行列  $F$  の逆行列であり、Fisher 行列は

$$F_{ij}(\theta) = \int dM \frac{1}{f(M; \theta)} \frac{\partial f(M; \theta)}{\partial \theta_i} \frac{\partial f(M; \theta)}{\partial \theta_j} \quad (8)$$

で与えられる (竹内, 1974)。特に対角成分の平方根  $\sqrt{(F^{-1})_{ii}/n}$  でパラメタ  $\theta_i$  の推定誤差とする。実用上は引数  $\theta^{(0)}$  を最尤値  $\hat{\theta}$  で置き換えて差し支えない。

切断 GR 分布の場合、尤度は

$$L(M_1, M_2, \dots, M_n; \beta) = (\beta/C_T)^n \times \exp\left(-\beta \sum_{i=1}^n (M_i - M_{\min})\right) \quad (9)$$

となる。Fisher 行列は (8) に (3) を代入して

$$F_{11} = \frac{1}{C_T \beta^2} \left[ -e^{-\beta \Delta M} \left\{ (\beta \Delta M - A)^2 + 2(\beta \Delta M - A) + 2 \right\} + A^2 - 2A + 2 \right] \quad (10)$$

(導出は付録 B1 参照). ここで

$$A = 1 - e^{-\beta\Delta M} \beta\Delta M / C_T \quad (11)$$

$$\Delta M = M_{\max} - M_{\min} \quad (12)$$

$M_{\max} \rightarrow \infty$  すなわち GR 分布の極限で  $C_T \rightarrow 1, A \rightarrow 1$  なので,  $F_{11} \rightarrow \beta^{-2}$  となってよく知られた結果になる.

一方, 宇津分布の場合は

$$L(M_1, M_2, \dots, M_n; \beta, \gamma) = (\beta^2 / C_U)^n \prod_{i=1}^n (\gamma - M_i) \times \exp\left(-\beta \sum_{i=1}^n (M_i - M_{\min})\right) \quad (13)$$

$f_U$  と  $\partial f_U / \partial \beta$  は  $M \rightarrow \gamma$  で  $\gamma - M$  のように振る舞うが,  $\partial f_U / \partial \gamma$  は定数に収束するため  $F_{11}, F_{12} = F_{21}$  は有限,  $F_{22}$  は無限大となる. それゆえ  $F$  の逆行列は  $F_{22} \rightarrow \infty$  の極限を取って

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} 1/F_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

となる. 従って共分散行列  $V$  はサンプル数  $n$  が十分大きいとき

$$V \sim \begin{pmatrix} 1/(nF_{11}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

のように振る舞う.  $V_{22} = 0$  となるのは  $\hat{\gamma} - \gamma$  の分散が  $1/n$  より早く 0 に収束するためである. 本プログラムではこの極限式を用いて  $\hat{\gamma}$  の推定誤差を 0 とするが, 有限の  $n$  に対して推定誤差が正確に 0 であることは意味していないことに注意する. 上式で

$$F_{11} = e^{-\beta\Delta M} \{B^2 - 2(\beta\Delta M + 2)B + (\beta\Delta M)^2 + 4\beta\Delta M + 6\} + (\beta\Delta M - 1)B^2 - 2(\beta\Delta M - 2)B + 2\beta\Delta M - 6 \quad (16)$$

(導出は付録 B1 を参照) であり,

$$B = 2 - \beta\Delta M(1 - e^{-\beta\Delta M}) / C_U \\ \Delta M = \gamma - M_{\min}.$$

## 2.2 改良大森公式

2 次余震を伴う余震の発生時刻を  $s_1, s_2, \dots, s_{I-1}$  とする. 表現を簡単にするため本震の発生時刻  $s_0 = 0$  とす

る. 時刻  $u$  における 1 日あたりの発生個数  $\lambda(u)$  は改良大森公式により

$$\lambda(u; \theta) = \sum_{i=0}^{I-1} \frac{K_i}{(u - s_i + c_i)^{p_i}} \chi_{s_i < u} \quad (17)$$

で与えられる. ここで  $\theta = \{K_i, c_i, p_i\}_{i=0}^{I-1}$  は大森パラメタである. また

$$\chi_{s_i < u} = \begin{cases} 1 & \text{if } s_i < u \\ 0 & \text{if } s_i \geq u \end{cases} \quad (18)$$

改良大森公式は, もとは平均発生個数を記述する式であったが, (17) をポアソン過程の強度関数として解釈することにより確率論的意味をもつこととなった.

ポアソン過程ということから, 期間  $[u_1, u_2]$  で  $m$  個の地震が発生する確率は

$$\frac{\Lambda(u_1, u_2; \theta)^m}{m!} \exp(-\Lambda(u_1, u_2; \theta))$$

で与えられる. ここに

$$\Lambda(u_1, u_2; \theta) = \int_{u_1}^{u_2} \lambda(u; \theta) du. \quad (19)$$

モデリングの期間を  $[T_s, T_e]$  とし, 最尤法で大森パラメタを求める. この期間での余震の発生時刻を  $t_1, t_2, \dots, t_{J-1}$  とする.  $[t_j, t_j + dt_j]$  で地震発生する確率は  $\lambda(t_j; \theta) dt_j$ ,  $[t_j + dt_j, t_{j+1}]$  で地震が発生しない確率は  $\exp(-\int_{t_j}^{t_{j+1}} \lambda(u; \theta) du)$  なので, 尤度  $L = L(t_1, t_2, \dots, t_J; \theta)$  は

$$L = \lambda(t_1)\lambda(t_2)\dots\lambda(t_{J-1}) \exp\left(-\int_{T_s}^{t_1} \lambda(u; \theta) du\right) \times \\ \exp\left(-\int_{t_1}^{t_2} \lambda(u; \theta) du\right) \dots \exp\left(-\int_{t_{J-2}}^{t_{J-1}} \lambda(u; \theta) du\right) \times \\ \exp\left(-\int_{t_{J-1}}^{T_e} \lambda(u; \theta) du\right) \\ = \lambda(t_1; \theta)\lambda(t_2; \theta)\dots\lambda(t_{J-1}; \theta) \exp\left(-\int_{T_s}^{T_e} \lambda(u; \theta) du\right) \quad (20)$$

で与えられる. 強度関数の時間積分  $\Lambda(T_s, T_e; \theta)$  は

$$\Lambda(T_s, T_e; \theta) = \sum_{i=0}^{I-1} K_i h(s_i, c_i, p_i; T_s, T_e) \quad (21)$$

と書ける．ここで  $h = h(s, c, p; u_1, u_2)$  は

$$h = \int_{u_1}^{u_2} \frac{\chi_{s < u}}{(u - s + c)^p} du = \begin{cases} \frac{(u_2 \vee s - s + c)^{1-p} - (u_1 \vee s - s + c)^{1-p}}{1-p} & \text{if } p \neq 1 \\ \log\{(u_2 \vee s - s + c)/(u_1 \vee s - s + c)\} & \text{if } p = 1 \end{cases} \quad (22)$$

また,  $a \vee b$  は  $a$  と  $b$  の大きい方を表す．尤度  $L$  を最大にする  $\theta$  を  $\hat{\theta}$ , 真値を  $\theta^{(0)}$  とする．Fisher 行列を

$$F_{ij}(\theta) = \int_{T_s}^{T_e} \frac{1}{\lambda(t; \theta)} \frac{\partial \lambda(t; \theta)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \lambda(t; \theta)}{\partial \theta_j} dt \quad (23)$$

で定義すると, 適当な条件下で,  $T_e$  が十分大きいとき  $\hat{\theta} - \theta^{(0)}$  は平均 0, 共分散行列の  $V = F^{-1}$  の正規分布に従う (Kutoyants, 1982)\*3. 対角成分の平方根  $\sqrt{V_{ii}}$  で  $\theta_i$  の推定誤差とする.

もっとも簡単な場合, すなわち,  $I = 0$  で  $c_0, p_0$  に標準値を仮定し,  $K_0$  のみ推定する場合には, 解析的な解を得ることが出来る．これはデータ量が少ない活動初期に想定される． $K = K_0, c = c_0, p = p_0$  とおくと尤度は

$$L = \prod_{j=1}^{J-1} \frac{K}{(t_j + c)^p} \exp\left(-\int_{T_s}^{T_e} K/(u + c)^p du\right)$$

となる．(22) を用いて

$$\log L = (J-1) \log K + p \sum_{i=1}^{J-1} \log \frac{1}{(t_j + c)} - Kh(0, c, p; T_s, T_e)$$

なので

$$\frac{\partial \log L}{\partial K} = \frac{J-1}{K} - h(0, c, p; T_s, T_e) = 0$$

より最尤値  $\hat{K}$  は

$$\hat{K} = (J-1)/h(0, c, p; T_s, T_e).$$

また Fisher 行列は

$$F_{KK} = \frac{1}{K} \int_{T_s}^{T_e} \frac{1}{(u + c)^p} du = \frac{1}{Kh(0, c, p; T_s, T_e)}$$

となる．

一般の場合は最適解および Fisher 行列は数値的に求める．付録 B2 参照． $\{K_i, c_i, p_i\} (i = 0, \dots, I-1)$  をすべて推定する場合のほか, パラメタに拘束条件

$$c_0 = c_1 = \dots = c_{I-1}, \quad p_0 = p_1 = \dots = p_{I-1} \quad (24)$$

を課す場合もサポートしている． $I \geq 2$  の場合にはこの拘束条件を課した方が最適解は安定して求まりやすい．

### 2.3 余震確率

余震規模の確率分布密度を  $f$ , 改良大森公式でえられる強度関数を  $\lambda$  とする．予測時刻を  $T_1$  とし  $[M_1, M_2]$  の地震が期間  $[T_1, T_2]$  に発生する地震の個数を  $X$  とすると,  $X$  はポアソンパラメタ

$$\Phi = \Phi([M_1, M_2], [T_1, T_2]) = \int_{M_1}^{M_2} \int_{T_1}^{T_2} f(M)\lambda(t) dM dt \quad (25)$$

のポアソン分布に従う．すなわち

$$\text{Prob}(X = k) = \frac{\Phi^k e^{-\Phi}}{k!}. \quad (26)$$

とくに少なくとも 1 個発生する確率は

$$1 - e^{-\Phi}. \quad (27)$$

(25) において, 切断 GR 分布, 宇津分布の場合にはそれぞれ

$$\int_{M_1}^{M_2} f_T(M) dM = \left( e^{-\beta(M_1 - M_{\min})} - e^{-\beta(M_2 - M_{\min})} \right) / C_T \quad (28)$$

$$\int_{M_1}^{M_2} f_U(M) dM = \left( \{(\gamma - M_1)\beta - 1\} e^{-\beta(M_1 - M_{\min})} - \{(\gamma - M_2)\beta - 1\} e^{-\beta(M_2 - M_{\min})} \right) / C_U \quad (29)$$

となる．(28) で  $M_{\min} \leq M_1 \leq M_2 \leq M_{\max}$ , (29) で  $M_{\min} \leq M_1 \leq M_2 \leq \gamma$  とする．また (25) において時間因子は

$$\int_{T_1}^{T_2} \lambda(u) du = \sum_{i=0}^{i_1} K_i h(s_i, c_i, p_i; T_1, T_2). \quad (30)$$

\*3 この漸近式が改良大森公式に対して無条件で成り立つわけではない．適用限界については付録 C を参照

となる．ここで， $i_1$  は  $s_i \leq T_1$  を満たす最大の  $i$  である．また関数  $h$  は (22) で定義されている．

## 2.4 パラメタの変換公式

前節の式は  $M_1 \geq M_{\min}$  であることを仮定している．この仮定は必ずしも満たされるとは限らない．たとえば M4.0 以上の地震を使ってパラメタを決定し，M3.0 以上の一日あたりの余震回数を予測することがある．この節では規模の下限を変えたときのパラメタの変換公式を導いておく．

下限を  $\tilde{M}_{\min}$  にした場合のパラメタに  $\tilde{\cdot}$  をつけることにする． $M \sim M + dM, t \sim t + dt$  の強度関数は  $M$  の下限によらないはずなので

$$f(M)\lambda(t)dMdt = \tilde{f}(M)\tilde{\lambda}(t)dMdt$$

この式が任意の  $M, t$  に対して成り立つことから

$$\tilde{\beta} = \beta \quad (31)$$

$$\tilde{c}_i = c_i \quad (32)$$

$$\tilde{p}_i = p_i \quad (33)$$

$$\tilde{K}_i = K_i \frac{C(\tilde{M}_{\min})}{C(M_{\min})} e^{\beta(M_{\min} - \tilde{M}_{\min})} \quad (34)$$

宇津分布の場合はさらに  $\tilde{\gamma} = \gamma$  が成り立つ．

(34) で  $C(M_{\min})$  は規格化定数を  $M_{\min}$  の関数と見たもので，切断 GR 分布に対しては (4) 式

$$C_T(M_{\min}) = 1 - \exp(-\beta(M_{\max} - M_{\min}))$$

宇津分布に対しては (7) 式

$$C_U(M_{\min}) = \exp(-\beta(\gamma - M_{\min})) + \beta(\gamma - M_{\min}) - 1$$

で与えられる．切断 GR で  $M_{\max} \rightarrow \infty$  とすると  $C_T \rightarrow 1$  で，GR 分布の変換公式

$$\tilde{K}_i = K_i \exp(\beta(M_{\min} - \tilde{M}_{\min}))$$

を得る．

## 3 プログラム

余震発生確率に関する情報を速やかに発表するためには，操作性の良いアプリケーション・ソフトウェアが必要である．そのソフトウェアは，特に緊急時など人員の限られた状況下においても適切な処理ができる

マンマシンインターフェースを備えていなければならない．

今回改良した余震発生確率プログラムは UNIX の標準的なグラフィカル・ユーザ・インターフェースである OSF / Motif を使用した地震検索・地震活動解析プログラム REASA (明田川他, 2007) に搭載した．このプログラムは，震源の検索や統計処理などを総合に行えるソフトウェアであり，そのなかのひとつの機能として，余震発生確率処理が組み込まれている．ここでは，その概要を具体的な例を示しながら説明する．

余震発生確率計算に必要な震源ファイルは，気象庁で使用している地震活動解析ソフト hypdsp (横山, 1997) を用いて準備するか，本プログラムで気象庁震源ファイルを読み込んだ後，検索条件を与えて切り出す．余震発生確率処理はメインメニューの「統計」に用意されている．震源ファイルを読み込み，処理を起動するときの状態を Fig. 1 に示す．処理を起動すると，基本作業として規模分布のあてはめ，改良大森公式のあてはめ，余震発生確率計算と続く．このインターフェースプログラムの特長は，面倒なパラメータ入力を極力減らしたことである．すべてのパラメータ設定と解析処理は自動で行われる．もれなく検知されている  $M$  の下限値以上の本震 - 余震データを使用すれば，オペレータは作業を進めるためのボタンを 3 回押すだけで確率計算まで実行できる．もちろん状況に合わせて，様々なパラメータの変更，モデルの選択等も可能である．各段階において 2 節で述べたアルゴリズムが使用される訳であるが，これらとプログラム中の関数の対応関係を付録 D にまとめておく．

### 3.1 規模分布

「余震発生確率処理」を起動すると，規模分布処理が起動する．ポップアップする画面を Fig. 2 に示す．デフォルトでは本震を除くすべての余震データを用いて GR 式をあてはめる．この例では，切断 GR 式をあてはめている．このダイアログでは，規模分布をあてはめるモデルの選択， $M$  の範囲，あてはめるデータの範囲 (期間) をそれぞれ変更できる．それぞれの機能を Table 1 にまとめた．

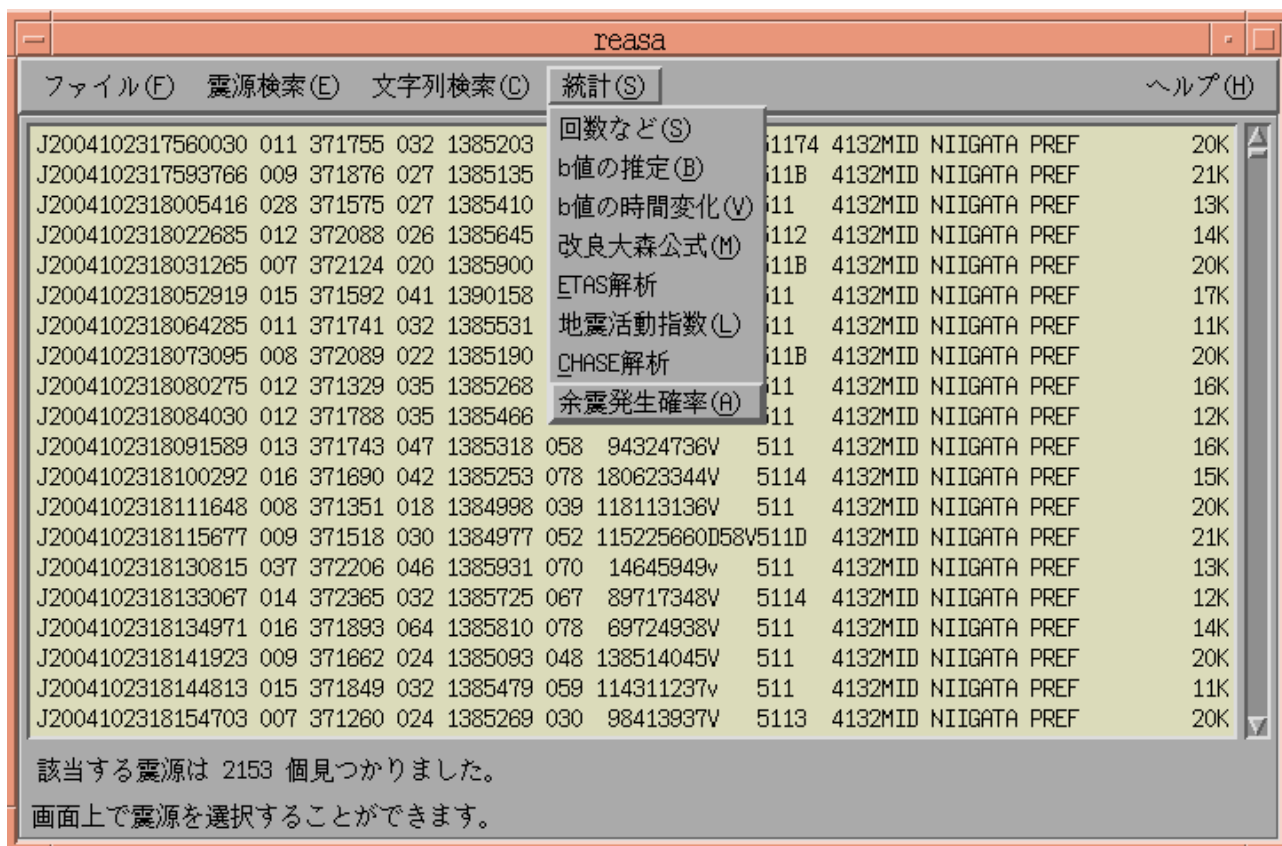


Fig. 1 A pull-down menu to start aftershock analysis

Table 1 Details of parameters to be specified in evaluation of frequency-magnitude relations

モデルの型	GR式 (デフォルト)	切断GR式	宇津式
M範囲設定 (自動)	自動設定M下限値 ~ ∞ (デフォルト)	自動設定M下限値 ~ 本震M	自動設定M下限値 ~ 上限M初期値[本震M]
M下限値は、M度数分布の形状から適切な値を判定する			
(任意設定)	M下限値のみ	M下限値, M上限値	M下限値, 上限M初期値
データ範囲	以下より選択 <ul style="list-style-type: none"> <li>すべての余震 (デフォルト)</li> <li>改良大森公式のモデリング期間と連動</li> <li>任意期間指定</li> </ul> (任意期間指定を選択したときは期間を入力するテキストフィールドがダイアログに自動で追加される)		
特長	通常使用されている式	上限Mより大きい地震は発生しないという仮定のもとにあてはめるGR式	上限M値を計算によって推定するモデル

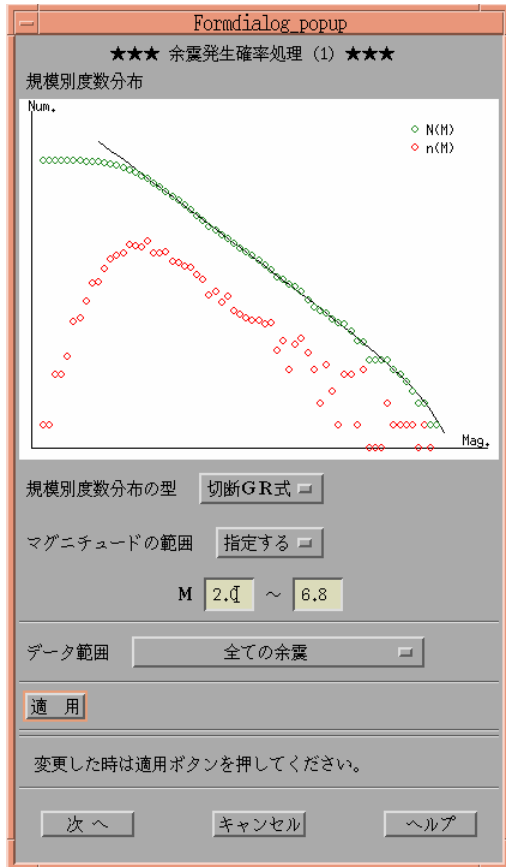


Fig. 2 A dialog window to set required parameters in evaluation of frequency-magnitude relations

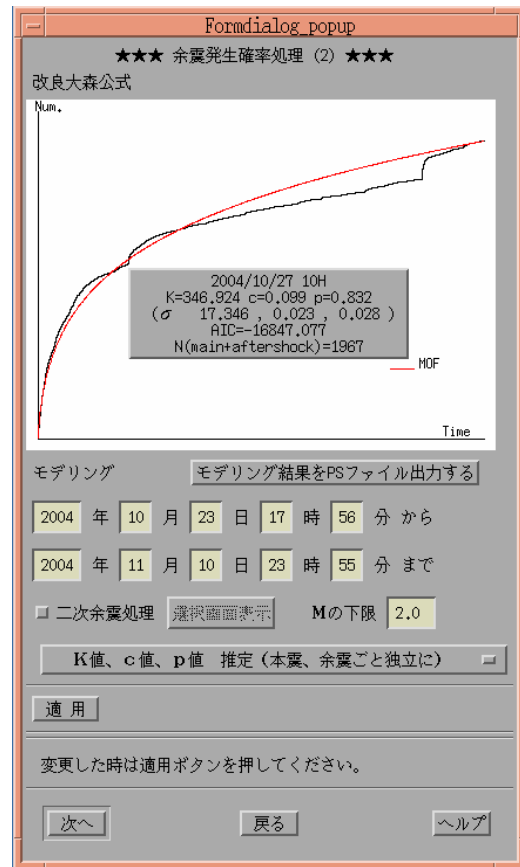


Fig. 3 A dialog window to set required parameters in evaluation of the modified Omori formula

Table 2 Details of parameters to be specified in obtaining the best fitted modified Omori formula

モデリング期間	<p>(デフォルト) 本震の時間～最後のデータの時間 (ただし、本震は含まれない)</p> <p>(任意設定) モデリング開始時間:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・本震の時間あるいは本震より前の時間を設定 → 本震直後の余震からとなる</li> <li>・本震より後の時間を設定 → 該当する余震からとなる</li> </ul> <p>モデリング終了時間:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・最後のデータより前の時間 → 該当する余震までとなる</li> <li>・最後のデータの時間 → 最後の余震データまで</li> <li>・最後のデータより後の時間 → 指定時間まで地震が発生していないとしてモデリングする</li> </ul> <p>(注意) 規模分布の期間に「改良大森公式のモデリング期間と連動」を選択時には、期間変更時に、規模分布から再実行するようにガイドする機能がついている</p>
モデル	<p>右から選択</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・K値, c値, p値 推定 (本震・二次余震を伴う余震ごと独立に) (デフォルト)</li> <li>・K値, c値, p値 推定 (c値, p値は本震・二次余震を伴う余震とも共通)</li> <li>・本震のK値のみ推定 (c値, p値は陸域地震の標準値)</li> <li>・本震のK値のみ推定 (c値, p値は海域地震の標準値)</li> <li>・本震のK値のみ推定 (c値, p値は全域の標準値)</li> </ul>
Mの下限	<p>(デフォルト) 規模分布モデルのMの下限值</p> <p>(任意設定) ・規模分布モデルのMの下限以上 → 可</p> <p>・規模分布モデルのMの下限より小 → 可 (ただし、不適切である旨の警告付)</p>
二次余震処理	n段(仕様上は19段)までの二次余震処理が可能(ただし、K値, c値, p値 推定時のみ利用可)

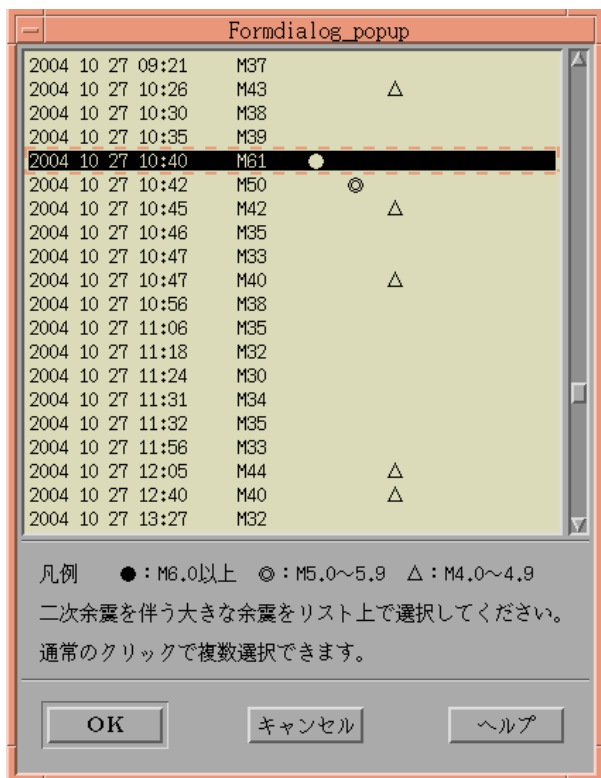


Fig. 4 A dialog window to choose large aftershocks which are accompanied by secondary aftershocks

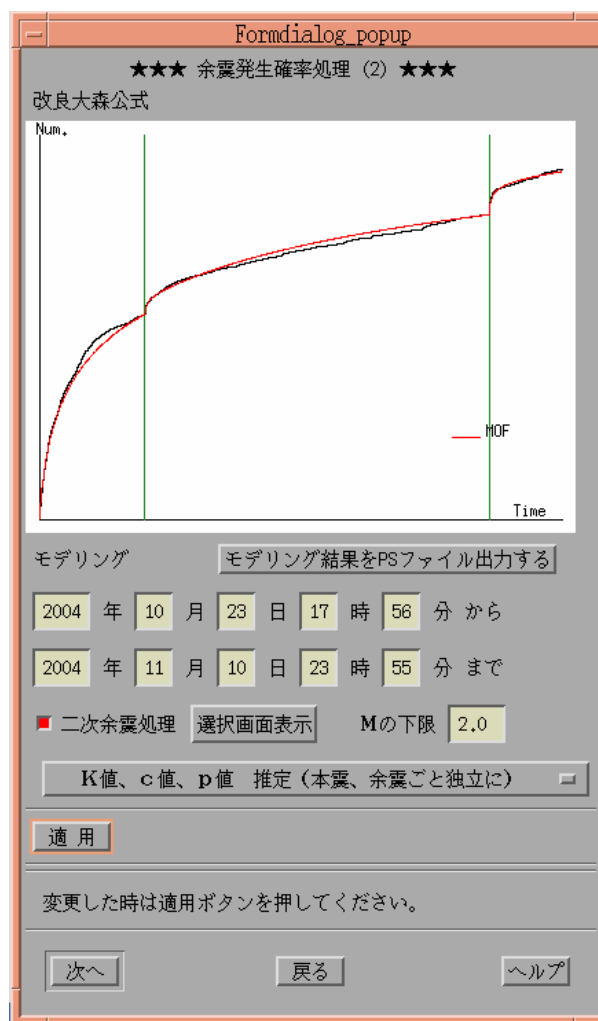


Fig. 5 An example of a curve fitting by the modified Omori formula for an aftershock sequence which involves secondary aftershocks

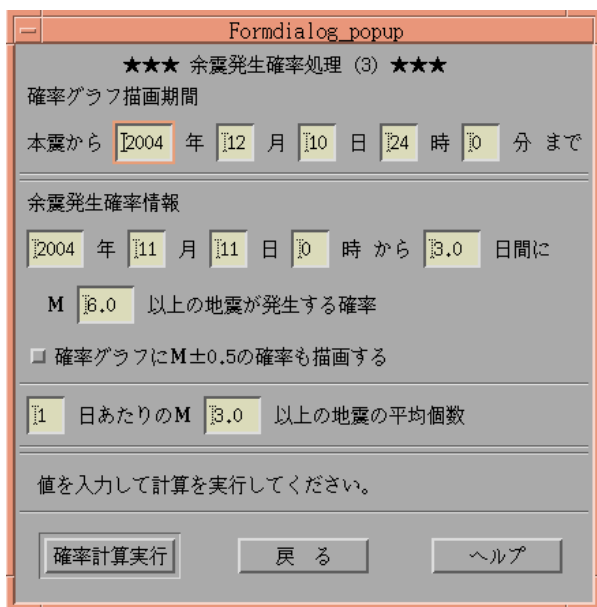


Fig. 6 A dialog window to set required parameters in estimation of occurrence probability of aftershocks



Table 3 Details of parameters to be specified in estimation of aftershock probability

確率グラフ 描画期間	余震発生確率のグラフを描く期間（グラフの横軸の長さ） （デフォルト）本震の時間～最後のデータの日+1か月 （任意設定）本震の時間～任意の指定時間まで
余震発生確率情報	余震発生確率情報の起点時間，確率情報を出す余震の規模，確率の算出幅（期間）などの設定 （デフォルト）情報起点時間：最後のデータの日時の1時間後 確率情報：起点時間から3日以内にM6.0以上が発生する確率，起点時間における，M3.0以上の余震の1日あたりの平均発生個数 （任意設定）情報起点時間：任意の指定時間 確率情報：確率を算出する幅（何日以内），規模の指定 平均発生個数を算出する期間（何日あたり），規模の指定

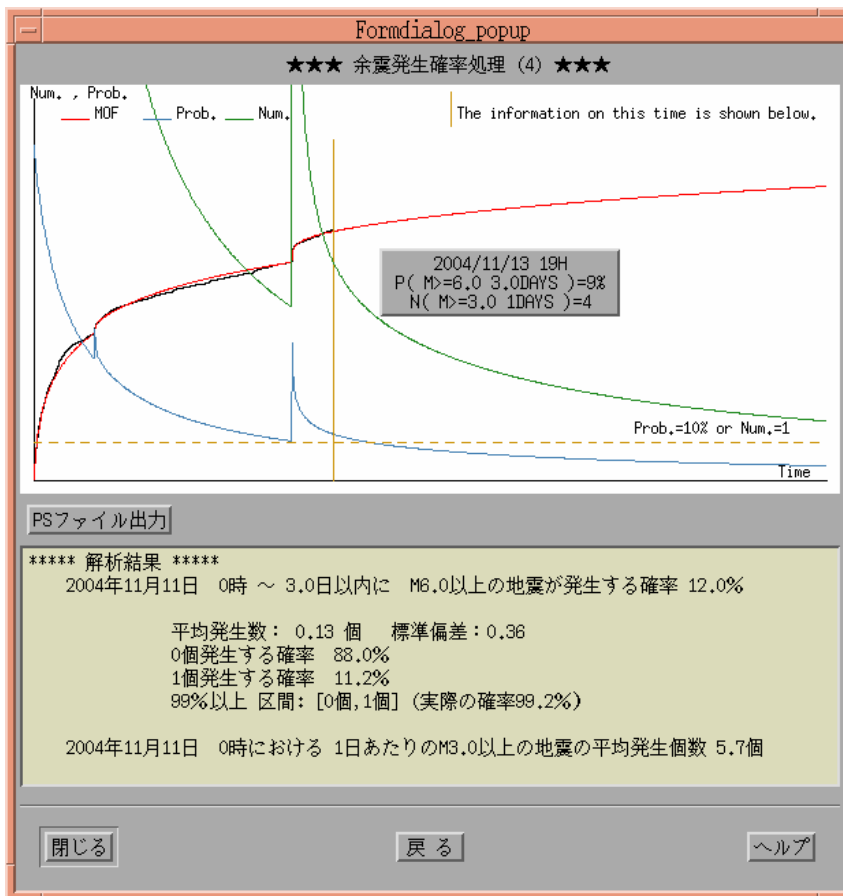


Fig. 7 Temporal changes of occurrence probabilities of aftershocks

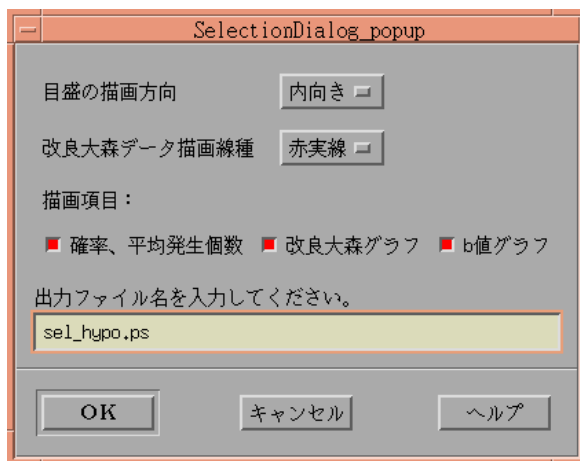


Fig. 8 A dialog window to output PostScript files

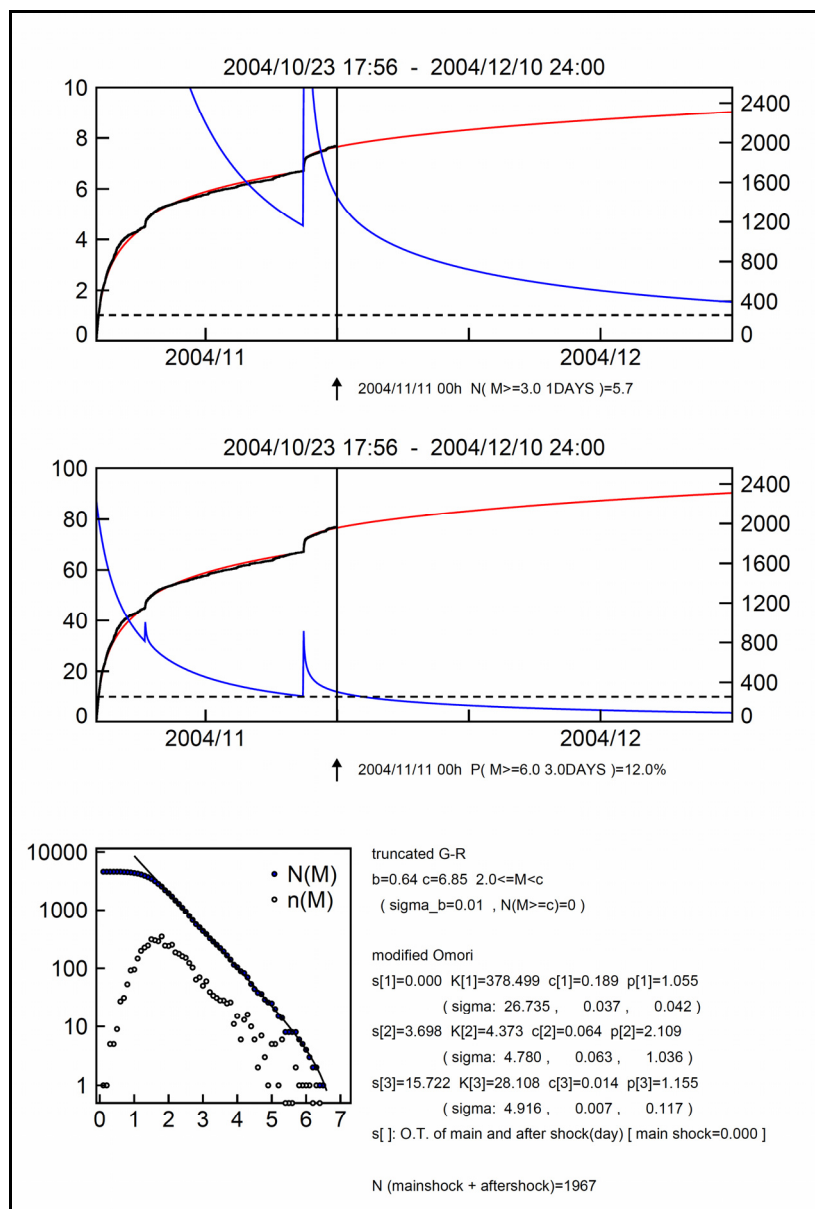


Fig. 9 An example of output in PostScript

Table 4 Auxiliary functions prepared for operators

補助機能	機能概要
ヘルプ機能	各ダイアログ上にヘルプボタンを用意しており、入力の仕方などをガイドする
警告機能	入力されたパラメータにミス等があれば、考えられる原因を明示し、修正を促す
情報提示機能	余震確率を計算する上で重要なパラメータ変更があった場合に、メッセージを出力し注意喚起する
ポップアップ 情報機能	描画された図中の任意の位置で右クリックすることで、その位置における日付やマグニチュードの値、計算されたパラメータ値などを表示する
入力等制御 機能	オペレータが次にすべきことが判断できるよう、現在の状況を判断し、ボタン押下の可否や入力の可否状態を明示的に示す
パラメータ保持 機能	確率計算まで実行することによって、設定パラメータが一時的に保持される機能。つまり、確率計算まで実行すれば、処理をもとって微調整が可能となる。確率計算まで行かない状態で処理を戻すと、各ダイアログのパラメータは初期値に戻る
パラメータ保存 機能	確率計算を終了させると、設定パラメータは保存され、次回以降は保存されたパラメータが読み込まれる。震源検索を実行(震源リストのリフレッシュ)することによってパラメータを初期化することも可能

### 3.2 改良大森公式

規模分布の処理を確定して「次へ」ボタンを押すと、Fig. 3 の画面がポップアップして、改良大森公式のあてはめの処理へ移る。デフォルトでは、規模分布で適用された M の下限以上の余震データを用いて、通常の大森公式がすでにあてはめられている。このダイアログでは、モデルの選択、改良大森公式をあてはめるデータの期間、M の下限、二次余震処理の有無（n 段階の大森公式のあてはめ）をそれぞれ変更できる。それぞれの機能を Table 2 にまとめた。

二次余震処理は、今回のプログラム改良の大きな特長である。ここでは、その方法について簡単に述べる。Fig. 3 は平成 16 年（2004 年）新潟県中越地震の余震回数積算と改良大森公式のあてはめの結果を示している。図からわかるように、あるところで余震回数積算に明らかなギャップが見られる。これは、規模の大きな余震が引き起こした二次的な余震の影響である。このような二次余震をあてはめるためには、まずダイアログ上の「二次余震処理」ボタンを押す。これを押すと M3.0 以上の余震をリストアップしたダイアログがポップアップする（Fig. 4）。このリストから二次余震を引き起こした余震を選択する。選択はリストをクリックして表示を白黒反転させるだけで良く、複数の選択が可能である。どの余震を選べば良いかわからないときは、Fig. 3 に示したように改良大森公式をあてはめた図中のギャップの部分で右クリックすれば、おおよその時間がわかるので、それを参考にその時間に近い規模の大きな余震を選べば良い。この例では 2 つの余震を選択した。その結果を Fig. 5 に示す。

### 3.3 余震発生確率

改良大森公式のあてはめを確定して「次へ」ボタンを押すと、Fig. 6 がポップアップする。このダイアログで余震発生確率計算に必要なパラメータを与える。ここで設定できるのは、余震発生確率のグラフを描く期間、余震発生確率情報の起点日時と確率の算出幅（期間：何日以内）、平均発生個数を求める M の下限と平均

をとる日数（何日あたり）である。それぞれの機能について Table 3 にまとめた。

### 3.4 解析結果と出力

解析結果を Fig. 7 に示す。グラフは改良大森公式のあてはめの状況と、確率のグラフ、そして、平均発生個数のグラフである。テキスト表示されている部分は余震発生確率情報である。この時間以外の値についてはグラフ上で右クリックすることでおおよその値が表示される。Fig. 7 の例では、11 月 13 日には確率値が 10% をきる事がわかる。処理としては以上で完了であるが、得られた結果を資料にしたい場合にポストスクリプトファイルに出力できる機能がある。以下にそれについて簡単に述べる。まず、Fig. 7 ダイアログ中の「PS ファイル出力」ボタンを押すと、Fig. 8 のダイアログがポップアップする。オペレータは好みの書式や、必要な図を選択して「OK」ボタンを押せばよい。すべての図を選択したときの出力結果を Fig. 9 に示す。これらの図はワープロソフト等に貼り付けることを前提としているため、軸の単位や名前などはなく、あえてシンプルなつくりになっている。

### 3.5 その他の特長

本インターフェースプログラムには、オペレータの作業の助けになる機能をできるかぎり充実させ、誤操作のないように配慮した。例えば、オペレータの慣熟度に関わらず、安定した処理を行えるよう、ミスオペレーションには警告ダイアログがでたり、重要なパラメータ変更には確認のための情報ダイアログを出すなどしている。また、入力領域の入力の可否が自動的に判断され不適当な値の入力を極力排除するなど操作性には十分気を配った。Table 4 にそれらについてまとめた。

## 付録 A 最適解の数値的計算法

本稿ではシンプレックス法<sup>\*4</sup>を採用した。この方法では最小にすべき関数の値だけが必要とされるので適用は容易である。関数値に加えて微係数値も用いる方

<sup>\*4</sup> 線形計画法のシンプレックス法とは別物である。混乱を避けるためポリトープ法ということもある。

法に比べて収束が遅いとされるが、本稿で扱った切断 GR 分布, 宇津分布, 改良大森公式の当てはめでは計算時間は問題にならない。

この方法は以下のような簡単なアルゴリズムを採用している。最小化すべき関数を  $g$ , パラメタの数を  $m$  とする。  $m+1$  個の点  $P_0, \dots, P_m$  をとる\*5。  $P_0, \dots, P_m$  のうち関数  $g$  の最大を与える点に、鏡映, 縮小, 拡大などの簡単な一次写像を施して新しい点配置を作る。  $g$  の最大を与える点と最小を与える点の距離が予め与えた値以下になるまでこの操作を繰り返す。方法の詳細とプログラムは奥村 (1991) にある。また本余震活動解析プログラムでは find\_minimum という関数でこのアルゴリズムを実行している (付録 D 参照)。

## 付録 B Fisher 行列の計算

### B.1 マグニチュード分布

(10) の導出は以下の通り。

$$\partial f_T / \partial \beta = \frac{1}{C_T} \{A - \beta(M - M_{\min})\} e^{-\beta(M - M_{\min})}$$

を (8) に代入して

$$F_{11} = \int_{M_{\min}}^{M_{th2}} \frac{1}{C_T \beta} \left( A - \beta(M - M_{\min}) \right)^2 e^{-\beta(M - M_{\min})} dM.$$

ここで  $A$  は (11) で定義される。  $\beta(M - M_{\min}) = x$  と変数変換して、

$$F_{11} = \frac{1}{C_T \beta^2} \int_0^{\beta \Delta M} (x - A)^2 e^{-x} dx$$

ここで

$$\int (x - A)^2 e^{-x} dx = -e^{-x} \{ (x - A)^2 + 2(x - A) + 2 \}$$

を用いて、(10) が得られる。

(16) については次のようにする。

$$\partial f_U / \partial \beta = \frac{\beta(\gamma - M)}{C_U} e^{-\beta(M - M_{\min})} \{ B - \beta(M - M_{\min}) \}$$

を用いて

$$F_{11} = \frac{1}{C_U} \int_{M_{\min}}^{\gamma} (\gamma - M) e^{-\beta(M - M_{\min})} \times \{ B - \beta(M - M_{\min}) \}^2 dM$$

$\beta(M - M_{\min}) = x$  と変数変換して、

$$F_{11} = \frac{1}{C_U \beta^2} \int_0^{\beta \Delta M} (\beta \Delta M - x)(B - x)^2 e^{-x} dx$$

ここで

$$\int (D - x)(B - x)^2 e^{-x} dx = e^{-x} \{ -(D - x)(B - x)^2 - (B - x)(3x - B - 2D) + (6x - 4B - 2D) + 6 \}$$

を用いて (16) を得る。

### B.2 改良大森公式の場合

$\theta = (K_0, c_0, p_0, \dots, K_{I-1}, c_{I-1}, p_{I-1})$  の場合

$$\xi_m = u - s_m + c_m$$

として、

$$\begin{aligned} \partial \lambda(u) / \partial K_m &= \chi_{s_m < u} \xi_m^{-p_m} \\ \partial \lambda(u) / \partial c_m &= -p_m K_m \chi_{s_m < u} \xi_m^{-p_m - 1} \\ \partial \lambda(u) / \partial p_m &= -K_m \chi_{s_m < u} \xi_m^{-p_m} \log \xi_m \end{aligned}$$

を (23) に代入して数値積分を行えばよい。数値積分は積分区間  $[T_s, T_e]$  を 2 次余震を伴った余震の発生時刻で小区間に分け、シンプソンの公式を用いる。

$c$  と  $p$  が共通 ( $c = c_0 = c_1 = \dots, p = p_0 = p_1 = \dots$ ) の場合には

$$\begin{aligned} \partial \lambda(u) / \partial K_m &= \chi_{s_m < u} \xi_m^{-p} \\ \partial \lambda(u) / \partial c &= - \sum_{i=0}^{I-1} p K_i \chi_{s_i < u} \xi_i^{-p-1} \\ \partial \lambda(u) / \partial t &= - \sum_{i=0}^{I-1} K_i \chi_{s_i < u} \xi_i^{-p} \log \xi_i \end{aligned}$$

を (23) に代入して同様な数値積分を行えばよい。

\*5 パラメタを作る  $m$  次元ユークリッド空間で  $m+1$  個の点は  $m$  次元の単体 (シンプレックス) をつくる。これが命名の由来である

## 付録 C 大森パラメタの誤差分布

非定常な点過程において最尤推定パラメタの  $T_e \rightarrow \infty$  での漸近的振る舞いは Kutoyants(1982) によって調べられている。それによれば,  $\hat{\theta} - \theta^{(0)}$  は平均 0 共分散行列  $F^{-1}$  の正規分布に従う (同論文, Theorem 5)。いくつかの前提条件がつくが, その中で本質的と思われる条件 BI の意味するところを, 最も簡単な場合, すなわち  $I = 1$  で  $K$  のみを推定する場合\*6で見よう。この場合, 条件 BI は

$$\lim_{T_e \rightarrow \infty} \inf_{0 < K < K_{\max}} F(T_s, T_e) = \infty \quad (35)$$

となる。

$$F(T_s, T_e) = \frac{1}{K} \int_{T_s}^{T_e} (u + c)^{-p} du \quad (36)$$

なので

$$(35) \text{ の左辺} = \frac{1}{K_{\max}} \int_{T_s}^{T_e} (u + c)^{-p} du. \quad (37)$$

(35) はこの積分が  $T_e \rightarrow \infty$  で無限大に発散することを要請するので  $p \leq 1$  となる。すなわち余震は無限に発生する。通常の余震活動では  $p > 1$  であり, 発生する余震総数は有限であるが, この場合の誤差分布がどうあるべきかは未解決と思われる。

このような問題があるものの, Fisher 行列 (23) を用いた誤差評価式は実際には広く用いられているため (例えば Ogata 1983), 本プログラムでも採用している。

## 付録 D プログラム中の関数群

b_truncatedGR	切断 GR 分布の最適パラメタを推定する
func_b_truncated	切断 GR 分布の (- 対数尤度) を計算する
b_Utsu	宇津分布の最適パラメタを推定する
func_b_Utsu	宇津分布の (- 対数尤度) を計算する
omori_opt	改良大森公式の最適パラメタを推定する
func_omori	改良大森公式の (- 対数尤度) を計算する
find_minimum	シンプレックス法による最小化を行う 最小化すべき関数は func_omori, func_b_Utsu, func_b_truncate
intensity	強度関数を算出する
prob_cal	強度関数から余震発生確率を算出する

## 謝辞

気象研究所客員研究員の岡田正実氏には, 原稿を丁寧に見ていただきました。同氏の助言は論文を改訂する上で大変役に立ちました。記して感謝いたします。

## 文献

- 明田川保, 伊藤秀美, 弘瀬冬樹 (印刷中): X Window System を用いた震源検索・地震活動解析プログラム (REASA) の開発, 駿震時報, 70, 51-66
- 石垣祐三 (2006): ETAS モデルを用いた地震活動の短期確率評価, 駿震時報, 69, 135-154.
- 伊藤秀美, 若山晶彦, 高山博之, 高山寛美, 吉田明夫, 清野政明 (1994): 地震活動予測支援システム, 地震学会 (1994 年春) 予稿集 1994
- 宇津徳治 (1978): 地震のマグニチュード分布式の

\*6 十分大きい  $K_{\max}$  をとって,  $K$  を  $0 < K < K_{\max}$  の範囲で推定

パラメータ推定, 地震 2, 31, 367-382.

岡田正実(1970):地震のマグニチュード別度数分布について  
—地震の上限についての統計的考察—, 研究時報, **22**,  
8-19.

岡田正実, 伊藤秀美(2001): 負の2項モデルによる余震の  
確率予測(1) —基本モデルの構築とその評価—, 地震  
2, **54**, 335-345.

奥村晴彦(1991): C 言語によるアルゴリズム事典, 技術評  
論社, 260-265.

竹内啓(1974): 統計的推定の漸近理論, 教育出版社

地震調査委員会(1998): 余震の確率評価手法について, 地震  
調査研究推進本部報告書

[http://www.jishin.go.jp/main/p\\_hokokukaigi01B.htm](http://www.jishin.go.jp/main/p_hokokukaigi01B.htm)

横山博文(1997): Xウィンドウシステムを用いた地震活動解  
析プログラム, 験震時報, **60**, 37-51.

Ogata, Y (1983) : Estimation of the Parameters in the Modified  
Omori Formula, J. Phys. Earth 30,115-124.

Kutoyants, Yu. A. (1982) : Multidimensional Parameter  
Estimation of the Intensity Function of Inhomogeneous  
Poisson Process, Problems Control Inf. Theory, **11**, 325-334.