験震時報　第47巻
(1982) 71～76頁

体積歪計の理論応答*

古　屋　逸　夫**

Theoretical Response of Sacks－Evertson Strainmeter

Itsuo Furuya
(Meteorological College, J.M.A.)

Theoretical response formulas for Sacks－Evertson strainmeter are derived. These formulas are given for the general elastic constants of strainmeter and surrounding medium.

Actual calculations are made for several cases. The values of elastic constants largely affect the outputs of strainmeter. In the case of seismic wave incidence against the free surface, the strainmeter does not respond to Love and SH waves, but responds to Rayleigh, P and SV waves. Particularly, the response curves for SV waves versus emergence angles are not simple because of total reflection and phase change.

§1　まえがき

現在気象庁では関東・東海地域に多数の体積歪計を展開している．この体積歪計の静的な地殻変動及び動的な地震波に対する理論的な応答を求めるのが本論文の目的である．このサックス・エバートソン型体積歪計の構造は発明者の論文を含む多数の文献にみられる（Sacks and Evertson：1968, Sacks et al：1971, Evertson：1975, 末廣：1978, 1979）．原理は簡単であって円筒形の容器にオイルを満たし，容器の体積変化に伴うオイルの上下運動を電気的な方法で検出するというものである．この容器を井戸に埋めセメントで固めておくと容器の回りの岩石の歪み変化に伴い容器も歪みを受ける．こうして岩石中の歪みが求まる．従ってこの体積歪計の原理の本質は地中に埋められた円筒容器の変形に帰せられる．

理論を進める前に，次のことを考慮し，また簡単化の仮定をする．(1)歪計のケース即ち円筒容器と回りの岩体との接触の状態によって歪計の応答は変化するであろう．歪計を実際に埋め込んでから接触の状態を直接調べる方法は現在のところない．以下では歪計と岩体は固着の状態にあると仮定する．(2)実際の歪計は有限の長さである．これを無限の長さの円筒の問題として考える．当然そのために理論と現実の違いが発生することになる．しかし歪計の円筒容器部の長さは3 m程度，直径は10 cm程度であるので無限の長さの円筒容器の仮定は十分良い近似になっているであろう．(3)円筒容器と回りの岩体との弾性定数の違いは当然考慮しなければならないだろう．また円筒容器の肉厚も考慮しなければならないだろう．(4)井戸の回り，従って円筒容器の回りには応力及び歪みの集中が起こる．このことは井戸の直径の大小にかかわらず発生する．我々が欲しいデータは井戸（円筒容器あるいは歪計）自身の歪みではなくて，井戸から十分離れた場所，言いかえれば，井戸が掘られていないときの歪みであることはいつも考慮に入れておかなければならない．(5)歪計の体積変化に関係しているのは垂直応力σ_x，σ_y，σ_zあるいは垂直歪み　e_x, e_y, e_zのみである．地震波に対する応答を考える場合，自然地震の場合にはその波長が十分長いことを考慮して，各瞬間瞬間に静的な変形が起こるものと仮定する．

以上のことを考慮して歪計の応答を求める．特定の弾性定数（例えば，ポアソン比＝0.25等）については既に計算されている（Evertson：1975）．ここでは一般的な弾性定数をつかって以下の計算をする．

§2　理　論

計算に当たって座標系をFig.1の如くとる．全般の計算の参考書はTimoshenko and Goodier (1951)及びFung (1965)である．以下応力の種類，σ_x，σ_y及びσ_zの個々について，それに対する歪計(円筒容器)の応答を考える．なお用いるパラメータを次にあげる．

a, b, l＝歪計（円筒容器）の内半径，外半径及び長さ

λ, μ＝ラーメの定数

E＝ヤング率

ν＝ポアソン比

添字1は歪計（円筒容器）に関するもの，添字2は歪計の回りの岩体に関するものである．

まず歪計の体積変化ΔVは

$$\Delta V = 2\pi a l \Delta a + \pi a^2 \Delta l \qquad (1)$$

* Received July 15, 1982
** 気象大学校

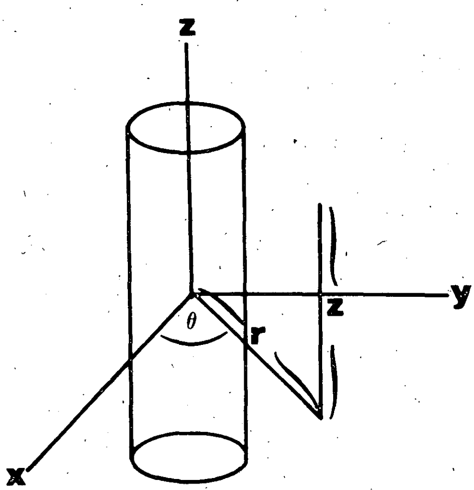

Fig. 1.

である．

（A） σ_x に対する応答

ここで σ_x は井戸から十分離れた場所にかかる応力である．教科書によると，σ_x は次の(2)式，(3)式の和によって表わすことができる．

$$\left.\begin{aligned}(\sigma_{rr})_{r=c}&=\frac{1}{2}\sigma_x\\(\sigma_{r\theta})_{r=c}&=0\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

$$\left.\begin{aligned}(\sigma_{rr})_{r=c}&=\frac{1}{2}\sigma_x\cos 2\theta\\(\sigma_{r\theta})_{r=c}&=\frac{1}{2}\sigma_x\sin 2\theta\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

ここで，c は井戸の中心を中心に持つ仮想的な円筒の半径であり，b に較べて十分大きいものとする．(2)式はこの仮想円筒の側面にかかる静水圧である．(3)式によって表わされる応力による a の変化 Δa は最終的には $\cos 2\theta$ に比例するから，歪計の断面積の変化は

$$\int_0^{2\pi}\cos 2\theta\, d\theta$$

に比例し，これは零となる．従って(2)式による影響のみを考えれば良い．

この問題は純粋に軸対称問題であって，ある点での応力及び変位 u_r は

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{rr}&=\frac{A_i}{r^2}+2C_i\\\sigma_{\theta\theta}&=-\frac{A_i}{r^2}+2C_i\\u_r&=\frac{1}{E_i}\left[-\frac{(1+\nu_i)}{r}A_i+2C_i(1-\nu_i-2\nu_i^2)r\right]\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

ここで，i＝1のとき上式は $a\leq r\leq b$ で成り立ち，i＝2のときは $b<r<c$ で成り立つ． $r=c$ で $\sigma_{rr}=\frac{\sigma_x}{2}$， $r=b$ で σ_{rr}，$\sigma_{\theta\theta}$ 及び u_r が連続，$r=a$ で $\sigma_{rr}=0$ を境界条件として(4)式の未知数 A_1，A_2，C_1，C_2 を決め，$b/c=0$ とおくと結局，歪計の内径の半径方向の変化 Δa は

$$\Delta a=(u_r)_{r=a}=\sigma_x\cdot\frac{2(1+\nu_1)(1-\nu_1)(1+\nu_2)(1-\nu_2)ab^2}{(1+\nu_2)(b^2-a^2)E_1+(1+\nu_1)\cdot\{(1-2\nu_1)b^2+a^2\}E_2}\qquad(5)$$

となる．

（B） σ_y に対する応答

σ_y に対する応答は σ_x に対する応答と当然同じになる．従って σ_y のみによる Δa は

$$\Delta a=(u_r)_{r=a}=\sigma_y\cdot\frac{2(1+\nu_1)(1-\nu_1)(1+\nu_2)(1-\nu_2)ab^2}{(1+\nu_2)(b^2-a^2)E_1+(1+\nu_1)\cdot\{(1-2\nu_1)b^2+a^2\}E_2}\qquad(6)$$

となる．

（C） σ_z に対する応答

この場合には z 軸方向の変形と半径方向の変形を考える必要がある．各方向の変位は対称性も考慮して

$$\left.\begin{aligned}u_r&=u(r)\\u_\theta&=0\\u_z&=ez+z_o\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

とおける．ここで e は z 方向の歪み e_z であって一定とおいている．一般的には e は r の関数と考えるべきであろうが，以下の境界条件を満足するには結局 e は一定という結論が得られる．

フックの法則を用いて応力を(7)式を使って書き表わし，円筒座標系での平衡方程式

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_{rr})-\frac{\sigma_{\theta\theta}}{r}=0$$

に代入すると

$$\left.\begin{aligned}u_r&=A_1r+\frac{B_1}{r}\qquad a\leq r\leq b\\u_r&=A_2r+\frac{B_2}{r}\qquad b<r\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

が求まる．未知数 A_1，B_1，A_2 を次の境界条件を使って求める．

（i） $r=a$ の面は自由表面である．

（ii） $r=b$ では歪計と岩体とは固着状態にあるから剥離が生じては困る．このことは $r=b$ で u_r の連続性

だけを考えれば良い（u_θ，u_z の連続性は自動的に満足される）．

(iii) $r=b$ で σ_{rr} は連続である．

(iv) 歪計から十分離れたところでは σ_z のみが存在する．従って $r\to\infty$ で $\sigma_{rr}=\sigma_{\theta\theta}=0$ である．この σ_z は与えられている．

(iv) より与えられている σ_z と z 方向の歪み e との関係は

$$\sigma_z = e E_2 \tag{9}$$

となり，この式より e が求まる．結局 A_1，B_1，A_2 は

$$\left.\begin{aligned}
A_1 &= \frac{e\{(\lambda_1-\lambda_2)\mu_1 b^2-(\mu_1-\mu_2)\lambda_1 a^2\} - 2\mu_1(\lambda_2+2\mu_2)b^2 A_2}{2(\lambda_1+\mu_1)(\mu_1-\mu_2)a^2 - 2\mu_1(\lambda_1+\mu_1+\mu_2)b^2}\\
B_1 &= -\frac{e(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1) + 2(\lambda_1+\mu_1)(\lambda_2+2\mu_2)A_2}{2(\lambda_1+\mu_1)(\mu_1-\mu_2)a^2 - 2\mu_1(\lambda_1+\mu_1+\mu_2)b^2}a^2b^2\\
A_2 &= -\nu_2 e = -\frac{\nu_2}{E_2}\sigma_z
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

となる．歪計の内径の変化 Δa，長さの変化 Δl は(10)を用いて

$$\left.\begin{aligned}
\Delta a &= A_1 a + \frac{B_1}{a}\\
\Delta l &= l_e = \frac{l}{E_2}\sigma_z
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

で求まる．

一般に σ_x，σ_y 及び σ_z が同時に存在しているときには上で求めた(5)，(6)及び(11)式を(1)に代入すれば良い．

§3 考　察

第(5)式及び(6)式は平面歪みの問題（$u_z=0, \partial/\partial z=0$）として求められた．現実には σ_x のみが働いている場合でも z 方向の変位 u_z は存在する．従って，上に求めた式は強引に $u_z=0$ にした式である．これは十分遠方で $\sigma_z=\nu_2\sigma_x$（あるいは $\nu_2\sigma_y$）となる応力を仮想的に掛けたことに相当する．正しくはこの仮想応力を§2(C)で考慮すべきであろう．このためには第(9)式の代りに

$$\sigma_z-\nu_2(\sigma_x+\sigma_y)=e E_2 \tag{9'}$$

を用いれば良い．

以上の各式に出てくる σ_x，σ_y，σ_z は歪計から十分離れた場所（現実には歪計の半径の数倍程度より遠く）での応力，従って歪計のない場合の応力と考えて良い．岩体中の歪みに対する歪計の応答を求めたいときにはフックの法則によって応力を歪みに直しさえすれば良い．以下，いろいろな場合について考察する．

1）$\nu_1=\nu_2=\nu$，$E_1=E_2=E$ の場合

このときは無限媒質中に井戸だけが掘られている場合（いわゆる empty hole）である．このとき

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{1}{E}\{(2-\nu)(\sigma_x+\sigma_y)+(1-2\nu)\sigma_z\}$$

歪みになおしておくと

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{1}{1-2\nu}\{2(1-\nu)(e_x+e_y)+e_z\}$$

となる．

2）a＝b の場合

これは歪計の肉厚が薄い場合の近似であって，$\nu_2=\nu$，$E_2=E$ とすれば当然上式と同じになる．

3）水平面と角度 θ を持つような垂直応力 S の場合

応力成分の変換則を用いると

$$\sigma_x=S\cos^2\theta,\quad \sigma_y=0,\quad \sigma_z=S\sin^2\theta$$

として§2の式を用いれば良い．

4）流体中に置かれた場合

流体中では静水圧力がかかるので

$$\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=-p$$

と置く．ただし，流体中の場合境界で剥離が起きてもかまわないから σ_z に関する部分は無視してかまわないだろう．第(5)，(6)式において $\nu_2=\frac{1}{2}$，$E_2=0$ とおいて加え合わすと

$$\Delta a=-p\frac{2(1-\nu_1^2)ab^2}{E_1(b^2-a^2)}$$

となる．歪計の材質の弾性定数を $E_1=1.96\times10^{12}$ dyn/cm²，$\nu_1=0.33$，a＝5.4 cm，b＝5.7 cm* とすると歪計（円筒容器）の体積歪みは

$$\frac{\Delta V}{V}=1.77\times10^{-8}/\mathrm{mb}$$

となる．

5）自由表面に地震波が入射する場合

媒質中に垂直応力 σ_x，σ_y，σ_z を生じないような地震波の入射に対しては歪計は応答しない．従ってラブ波及び SH 波が入射しても理論上歪計の出力は零である．以下歪計は波の波長に較べて十分浅い場所に埋められているものとする．従って z＝0 における応力を考える．

レーリー波が入射するとき．層構造のときには固有関数を数値計算によって求め，それから歪，応力を求め式に代入すれば良い．ここでは，最も簡単な場合だけを考える．半無限媒質でかつポアソンの関係（$\lambda_2=$

* メーカー提供

μ_2）が成り立つ場合，$z=0$における歪みは

$$e_x=-\kappa A\sin(\kappa x-\omega t),\quad e_y=0,$$
$$e_z=0.33\kappa A\sin(\kappa x-\omega t)$$

となる．ここでAはレーリー波の$z=0$におけるz方向の振幅である．フックの法則によって応力に直すと

$$\sigma_x=-2.67\mu_2\kappa A\sin(\kappa x-\omega t),$$
$$\sigma_y=-0.67\mu_2\kappa A\sin(\kappa x-\omega t),\quad \sigma_z=0$$

となる．波長λ_0を使うと

$$\sigma_x+\sigma_y=-\frac{20.5}{\lambda_0}\mu_2 A\sin(\kappa x-\omega t),\ \sigma_z=0$$

となる．

P波あるいはSV波が入射するとき。変位u，wを

$$u=\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial z},\quad w=\frac{\partial\phi}{\partial z}-\frac{\partial\psi}{\partial x}$$
$$\phi=A_0 e^{i\omega(t-ax+bz)}+A e^{i\omega(t-ax-bz)}$$
$$\psi=B_0 e^{i\omega(t-ax+cz)}+B e^{i\omega(t-ax-cz)}$$
$$a=\frac{\cos e}{v_p}=\frac{\cos f}{v_s},\quad b=\frac{\sin e}{v_p},\quad c=\frac{\sin f}{v_s}$$

とおく．ここでe，fはそれぞれP，SV波の進行方向と水平面のなす角度である．P波入射のときは$A_0=1/\kappa$，$B_0=0$，SV波入射のときは$B_0=\frac{1}{\kappa}$，$A_0=0$とおく．$1/\kappa$は入射波の変位振幅を1にするためにおかれた．係数の間には次の関係がある．

P波入射

$$\frac{A_0}{-\{\lambda+(\lambda+2\mu)\tan^2 e\}(1-\tan^2 f)+4\mu\tan f\tan e}=\frac{A}{\{\lambda+(\lambda+2\mu)\tan^2 e\}(1-\tan^2 f)+4\mu\tan e\tan f}=\frac{B}{4\{\lambda+(\lambda+2\mu)\tan^2 e\}\tan e}$$

SV波入射

$$\frac{B_0}{-\{\lambda+(\lambda+2\mu)\tan^2 e\}(1-\tan^2 f)+4\mu\tan f\tan e}=\frac{A}{4\mu\tan f(1-\tan^2 f)}=\frac{B}{\{\lambda+(\lambda+2\mu)\tan^2 e\}(1-\tan^2 f)+4\mu\tan f\tan e}$$

ただし，SV入射の際$\cos e=\frac{v_p}{v_s}\cos f>1$のときには

$$\tan e=-i\sqrt{1-\left(\frac{v_s}{v_p}\right)^2\frac{1}{\cos^2 f}}$$

とおく．歪 e_x, e_z はP波，SV波に対してそれぞれ

$$\left\{\begin{array}{l}e_x=-\kappa\cos^2 e-\kappa^2\cos^2 e\cdot A-\kappa^2\frac{v_p}{v_s}\cos e\cdot\sin f\cdot B\\ e_z=-\kappa\sin^2 e-\kappa^2\sin^2 e\cdot A+\kappa^2\frac{v_p}{v_s}\cos e\cdot\sin f\cdot B\end{array}\right.$$

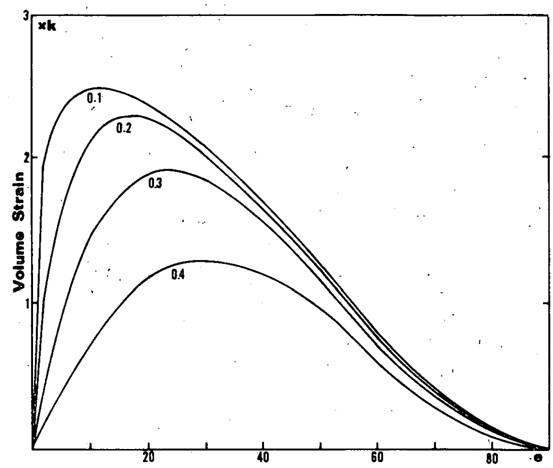

Fig. 2. Volume strain resulting from P wave incidence with unit displacement amplitude.

Poisson's ratios of surrounding medium are taken as parameters. The abscissa is an angle between the incident wave line and the horizontal. The ordinate should be multiplied by κ (wave number). The rigidity of surrounding medium is fixed to 7.37×10^{10} cgs (1/10 that of strainmeter). Poisson's ratio of strainmeter is 0.33.

$$\left\{\begin{array}{l}e_x=-\kappa\cos^2 f\cdot A+\kappa\cos f\cdot\sin f(1-\kappa B)\\ e_z=\kappa^2\{\cos^2 f-(\frac{v_s}{v_p})^2\}A-\kappa\cos f\cdot\sin f\cdot(1-\kappa B)\end{array}\right.$$

となり，これをフックの法則に代入すれば，σ_x，σ_y，σ_zが求まる．もちろん$\sigma_z=0$である．媒質の弾性定数をとりかえた場合の歪計の体積歪みの例を以下にあげる．

Fig. 2. とFig. 3. はP波入射の場合である。Fig. 2は周辺媒質の剛性率が歪計の剛性率の10分の1のとき，そのポアソン比をパラメータとしたものであり，第3図はポアソン比を0.3として，その剛性率を何分のいくつかにした場合である．P波入射の場合には臨界角がないために歪計のレスポンスはすなおな形をしている．

Fig. 4. とFig. 5. はSV波入射の場合であり，Fig. 2. Fig. 3. と同様な図である。SV波入射の場合にはSV波が全反射する部分があり，その臨界角を境にして大変複雑なレスポンスを示す．図中のピークの位置が臨界角

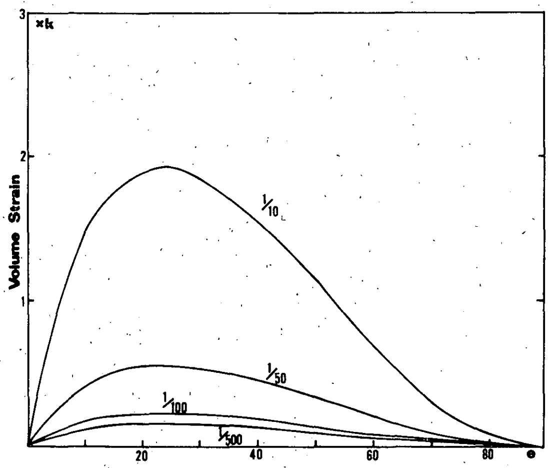

Fig. 3. Volume strain resulting from P wave incidence with unit displacement amplitude.

Rigidities of surrounding medium are taken as parameters. Poisson's ratio of surrounding medium is fixed to 0.3. Fractions are ratios of rigidity of the medium to that of strainmeter (7.37×10^{11}cgs). Other captions are same as Fig. 2.

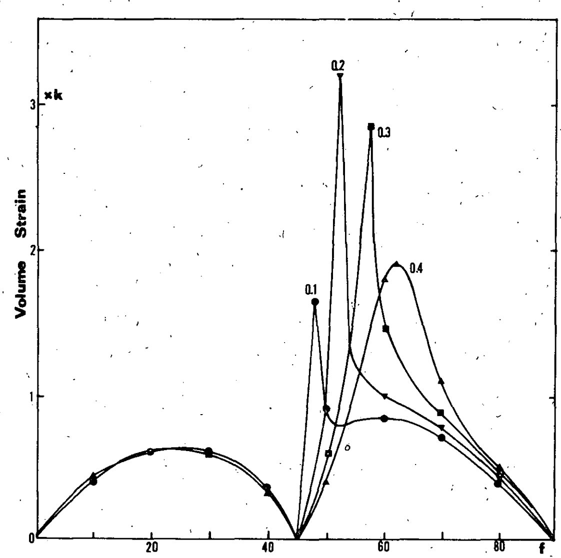

Fig. 4. Volume strain resulting from SV wave incidence with unit displacement amplitude.

Other captions are same as Fig. 2.

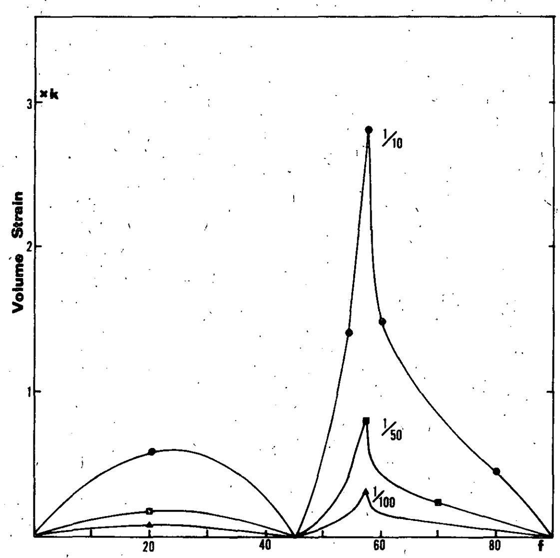

Fig. 5. Volume strain resulting from SV wave incidence with unit displacement amplitude.

Other captions are same as Fig. 3.

の位置であり，それより角度の小さい部分で反射P波は存在しない．全反射の部分でレスポンスのない角度があり，その角度と臨界角の間では他の部分と較べてレスポンスの符号が逆転する．

§4 結 語

以上みてきたように，歪計の出力は回りの岩体の弾性的性質にかなり影響を受ける．その岩体が非常に大きい場合だけでなく局所的な場合にも歪に影響がでるだろう．また歪計の設置状況（井戸とか穴）や地形も歪場に影響を与えるだろう．このことは体積歪計に限ったことではなくて他の歪計の場合も同様である．注意すべきことは歪計の出力は一般に歪計自身の歪みであり，それは歪計のない場合の岩体の歪みを拡大または縮小したものである．岩体の歪みもまた地形等の影響を受けて，もっと広範囲の岩体の平均的な歪みを拡大または縮小したものである，ということである．ともかく歪計の出力をそのまま広範囲の場所の歪と判断するためにはかなりの注意が必要であろう．種々の影響を解析的に考慮するのは不可能である．従って個々の歪計の設置場所に適した状況を，例えば有限要素法等を使って考慮することが必要になってこよう．

この研究は地震学会(1978)で発表したものに少し手を加えたものである．その際いろいろとお世話になった末廣重二，檜皮久義及び佐藤馨の各氏に感謝します．

また理論面で少なからずお世話になった鈴木保典氏に感謝します.

参 考 文 献

Evertson D. W. (1975) : Borehole strainmeters for seismology, Ph. D. thesis. University of Texas.

Fung Y. C. (1965) : Foundations of Solid Mechanics, Prentice-Hall Inc.

古屋逸夫 (1978) : 円筒の変形一容積歪計に則して, 地震学会予稿集, 1978, No. 2, 122

Sacks I. S. and D. W. Evertson (1968) : A sensitive borehole strain-rate meter, Year Book 68, Carnegie Inst.

Sacks I. S., S. Suyehiro D. W. Evertson and Y. Yamagishi (1971), Sacks-Evertson strainmeter, its installation in Japan and some preliminary results concerning strain steps, Pap. Met. Geophys., **22**, 195 - 208

末廣重二 (1978) : 地殻変動の連続観測, 地震予知の方法, 東大出版会 117 -145

末廣重二 (1979) : 地殻変動連続観測と埋込式歪計(I), 測候時報, **46**, 9 - 26

Timoshenko S. and J. N. Goodier (1951) : Theory of Elasticity, McGraw-Hill.