

震源を求める一方法 (1)*

朝 倉 克 抓**

550.341

A Method of determining the Location of the Hypocenter (1)

K. Asakura

(Morioka Local Meteorological Observatory)

We devised a method for the determination of the hypocenter which make use of the duration time of preliminary tremors at three observation points.

According to this method, we can determine the hypocenter without a map, by the aid of accomplished travel-time curve and three formulae which give the angular distance between two points on a spherical surface.

For the application of this method, in advance, it is necessary to calculate the constants which indicate the position of each observation points.

For example, as the above-mentioned three points, we pick up Sapporo, Tokyo and Fukuoka where comparatively sensitive seismographs are set, and calculated the hypocenter of the earthquake which occurred at July 26, 1953; 16h 53m (G.M.T.) in Marianas Islands.

§ 1. はしがき

震央および震源の深さを求めることは、既に多くの人達によって種々の方法が考えられているが、震源の深さを求める場合、観測資料が乏しく、しかも地球表面の曲率を無視できないほど遠い地震になると甚だ困難と思われる。筆者は3か所の (P~S) 時間を知ることにより、地図なしで震源を求める方法を試みた。

§ 2. 基礎の理論

I. 震源の深さの決定

地球の中心を座標の原点ととり、その点と赤道上的の経度 0° なる点および東経 90° なる点をそれぞれ結ぶ直線を x 軸、 y 軸ととり、地軸を z 軸にとる。

観測点 $A_i (i=1, 2, 3)$ の座標を (a_i, b_i, c_i) とし、 A_i を中心とする半径 R_i の球の方程式は

* Received Nov. 27, 1957.

** 盛岡地方気象台

$$(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2 + (z-c_i)^2 = R_i^2 \dots\dots\dots (1)$$

地球の半径を 1 とすれば、地球の方程式は

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \dots\dots\dots (2)$$

上の 4 個の球が 1 点を共有するための条件は

(i) (1) および (2) より x, y, z を消去する;

(1) より

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(a_i x + b_i y + c_i z) + 1 = R_i^2$$

ただし、 $a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$ とする。

(2) の関係を入れると

$$a_i x + b_i y + c_i z = 1 - \frac{R_i^2}{2} \dots\dots\dots (3)$$

となり、

$$D \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ である.}$$

なぜなら D は $\mathbf{A}_i = a_i \mathbf{i} + b_i \mathbf{j} + c_i \mathbf{k}$ なる Vector によって張られる平行六面体の体積である。こゝに $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ はそれぞれ x, y, z 軸の正の向きの単位 Vector である。

ゆえに (3) より x, y, z を求めれば、それはただ一組の解として得られる。すなわち

$$x = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 - \frac{R_1^2}{2} & b_1 & c_1 \\ 1 - \frac{R_2^2}{2} & b_2 & c_2 \\ 1 - \frac{R_3^2}{2} & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \equiv D_1, \quad y = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & 1 - \frac{R_1^2}{2} & c_1 \\ a_2 & 1 - \frac{R_2^2}{2} & c_2 \\ a_3 & 1 - \frac{R_3^2}{2} & c_3 \end{vmatrix} \equiv D_2,$$

$$z = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 - \frac{R_1^2}{2} \\ a_2 & b_2 & 1 - \frac{R_2^2}{2} \\ a_3 & b_3 & 1 - \frac{R_3^2}{2} \end{vmatrix} \equiv D_3 \dots\dots\dots (4)$$

これらの値を (2) に代入して

$$D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 = 1 \dots\dots\dots (5)$$

(ii) (4) における D_1, D_2, D_3 は x, y, z を未知数とする (3) の連立方程式の解である。

* (3) は (6) および (11) から次のように表わされる。

$$\cos \Delta_i = \sin \varphi_i' \sin \varphi' + \cos \varphi_i' \cos \varphi_i' \cos(\lambda_i - \lambda)$$

それは平面 $a_i x + b_i y + c_i z = 1 - \frac{R_i^2}{2}$ が 1 点 (D_1, D_2, D_3) を共有することを意味し、その共有点は $D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 = 1$ より地表上にある。これらの平面は方向余弦 (a_i, b_i, c_i) をもち、原点からの距離が $1 - \frac{R_i^2}{2}$ である。それと球 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ との交線は明らかに円であり、それらの円はまた $(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 + (z - c_i)^2 = R_i^2$ と $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ との交線でもある。ゆえに (5) が成立するときは (1) および (2) で表わされる 4 個の球は 1 点を共有する。

そこで (i) および (ii) から、(1) および (2) なる 4 個の球が 1 点を共有するための必要にして十分なる条件は (5) が成立することである。

その共有点を震央とし、観測点 A_i の地心緯度・経度、および震央距離をそれぞれ $\varphi_i', \lambda_i, \Delta_i$ とすれば

$$a_i = \cos \varphi_i' \cos \lambda_i, \quad b_i = \cos \varphi_i' \sin \lambda_i, \quad c_i = \sin \varphi_i' \quad \dots \dots \dots (6)$$

であり、また $1 - \frac{R_i^2}{2} = \cos \Delta_i$ より (5) は次のように変形される。

$$\begin{aligned} & (p_1 \cos \Delta_1 + p_2 \cos \Delta_2 + p_3 \cos \Delta_3)^2 \\ & + (q_1 \cos \Delta_1 + q_2 \cos \Delta_2 + q_3 \cos \Delta_3)^2 \\ & + (r_1 \cos \Delta_1 + r_2 \cos \Delta_2 + r_3 \cos \Delta_3)^2 = 1. \quad \dots \dots \dots (7) \end{aligned}$$

ここに p_1, p_2, \dots, r_3 なる 9 個の量は観測点の位置によって決まる常数で次のような関係があり、(6) から φ_i', λ_i が決まればあらかじめ計算しておくことができる。

$$p_1 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad p_2 = -\frac{1}{D} \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad r_3 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

結局、(7) は観測点 A_i を中心にし、震央距離 Δ_i をもつ 3 個の円が震央において交わる必要にして十分なる条件である。

一般に $\Delta_i = f(H, t_i)$ とおくことができるから、 H が Δ_i, t_i について一価連続函数と仮定するならば (7) を満足する H が一義的に求まることになる。ここに H は震源の深さ、 t_i は A_i における (P~S) 時間である。実際には H の種々の値に対する (P~S) — Δ 曲線が交錯しないような十分遠い震央距離をもつ地震について行えばよい。もちろん、震源域の大いさは考えず、地震波速度は深さだけの函数と仮定する。(7) を簡単に表わすと $F(H, t_1, t_2, t_3) = 1$ となる。したがって H に関して Maclaurin の級数に展開すれば

$$F(0, t_1, t_2, t_3) + H \left(\frac{\partial F}{\partial H} \right)_{H=0} + \frac{H^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial H^2} \right)_{H=0} + \dots = 1. \quad \dots \dots \dots (8)$$

ただし、 H の変域は $(0 \leq H \leq 1)$ であり、その変域において $\frac{\partial^n F}{\partial H^n}$ は n のすべての値に対して、有限であると仮定すれば $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H^n}{n!} = 0$ なるゆえ、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ となり上式の展開が成り立つ。

$$\text{ここに } \alpha_n = \frac{H^n}{n!} \left(\frac{\partial^n F}{\partial H^n} \right)_{H=0} \quad (0 < \theta < 1)$$

そこで、(8) において第 2 項以下を無視して、

$$\text{すなわち、} (F)_{H=0} + H \left(\frac{\partial F}{\partial H} \right)_{H=0} = 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial H} = \frac{\partial F}{\partial \Delta_1} \frac{\partial \Delta_1}{\partial H} + \frac{\partial F}{\partial \Delta_2} \frac{\partial \Delta_2}{\partial H} + \frac{\partial F}{\partial \Delta_3} \frac{\partial \Delta_3}{\partial H}$$

より近似的に

$$H = \frac{1}{2} \frac{D_{10}^2 + D_{20}^2 + D_{30}^2 - 1}{\sum_{i=1}^3 (D_{10} p_i + D_{20} q_i + D_{30} r_i) \left(\frac{\partial \Delta_i}{\partial H} \right)_{H=0} \sin f(0, t_i)} \quad \dots \dots \dots (9)$$

となり H が求まる。

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに } D_1 &= p_1 \cos \Delta_1 + p_2 \cos \Delta_2 + p_3 \cos \Delta_3, \\ D_2 &= q_1 \cos \Delta_1 + q_2 \cos \Delta_2 + q_3 \cos \Delta_3, \\ D_3 &= r_1 \cos \Delta_1 + r_2 \cos \Delta_2 + r_3 \cos \Delta_3, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

なる関係があり D_{10}, D_{20}, D_{30} は $H=0$ としたときのそれぞれ D_1, D_2, D_3 の値であり、 $f(0, t_i)$ は走時表から計算でき、 $\left(\frac{\partial \Delta_i}{\partial H} \right)_{H=0}$ の値は次のようにしてやはり走時表から計算することができる。すなわち、横軸に震源の深さ (H)、縦軸に震央距離 (Δ_i) を取り ($P \sim S$) 時間 (t_i) に関する曲線をひくとき、その曲線に関する接線の方向係数のうち $H=0$ のところの値が t_i における $\left(\frac{\partial \Delta_i}{\partial H} \right)_{H=0}$ である。

そのようにして多くの走時表より求めた値を次々とプロットし、それらに対する平均曲線を描いたものが Fig. 1 である。

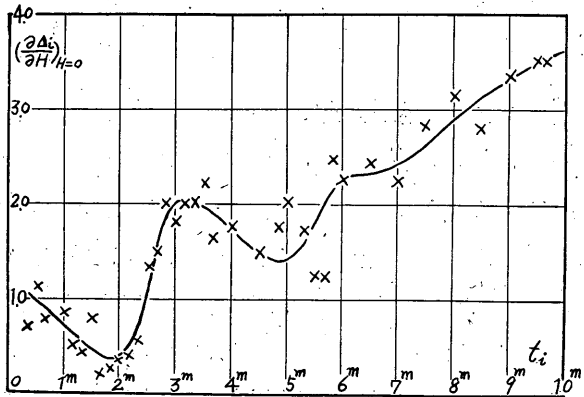


Fig. 1. Relation between (S-P) intervals (t_i) and $\left(\frac{\partial \Delta_i}{\partial H} \right)_{H=0}$ which are computed from various travel time curves. The curve is an average one for the plotted points

II. 震源の深さを求める別の方法

(7) より再び $F(H, t_1, t_2, t_3) = 1$ とおき、種々の H に対する F を走時表を基に計算し、横軸を H 、縦軸を F にして、求めた値をプロットしそれらに関する平均曲線を引いてみると、その曲線と $F = 1$ なる直線との交点における H の値が震源の深さである。ただし、此の方法には次のような欠点に伴う。すなわち Fig. 2 に示すとおり、ある $(P \sim S)$ 時間 t に対して H の違いによる

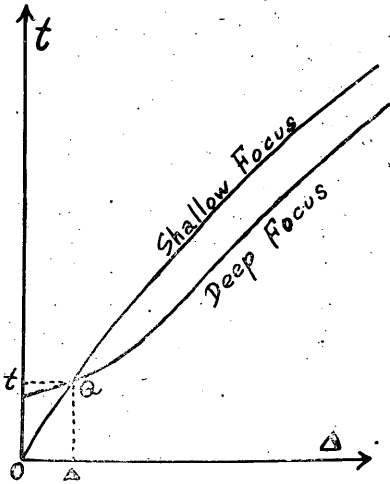


Fig. 2. Comparative model of shallow and deep focus earthquakes which appeared in $\Delta - (P \sim S)$ curve

震央距離 Δ の値が同一となる。ゆえに此の方法では Δ がそれらの影響を受けないように十分遠くなければならない。もしくは3点の値のうち少くともひとつは Q 点に來ないことが必要である。

III. 震央の決定

I あるいは II の方法で求めた H の値を (10) に代入し、再び走時表を基に D_1, D_2, D_3 を計算する。上述のことから $x = D_1, y = D_2, z = D_3$ であり、この x, y, z は震央の直角座標であるから、その地心緯度、経度を φ', λ とすれば

$$D_1 = \cos\varphi' \cos\lambda, \quad D_2 = \cos\varphi' \sin\lambda, \quad D_3 = \sin\varphi' \dots \dots (11)$$

で、また地心緯度 φ' と地理的緯度 φ とのあいだには次

の関係がある。

$$\varphi' = \varphi - 11.67' \sin 2\varphi \quad (1)$$

これを (11) に代入して得られる次式のうち、第1式と第2式あるいは第3式の二つの式から震央 (φ, λ) が求まる。

$$\left. \begin{aligned} \sin(\varphi - 11.67' \sin 2\varphi) &= D_3, \\ \cos(\varphi - 11.67' \sin 2\varphi) \cos\lambda &= D_1, \\ \cos(\varphi - 11.67' \sin 2\varphi) \sin\lambda &= D_2. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

しかし、三角函数は週期函数であるため φ, λ は一義的には求まらないが、 $(P \sim S)$ 時間から大体の見当を付けることができる。

計算のめんどうを幾らかでもさけるため (12) に関する Nomogram を作成した。Fig. 3 のとおりであり、図中 φ, λ スケールにおける負の値は南緯または西経を意味し、太線の λ, D_1 スケールは (12) における第2式を表わし、他の λ, D_2 スケールは第3式であり、太線の φ スケールは両者に共通に使用する。

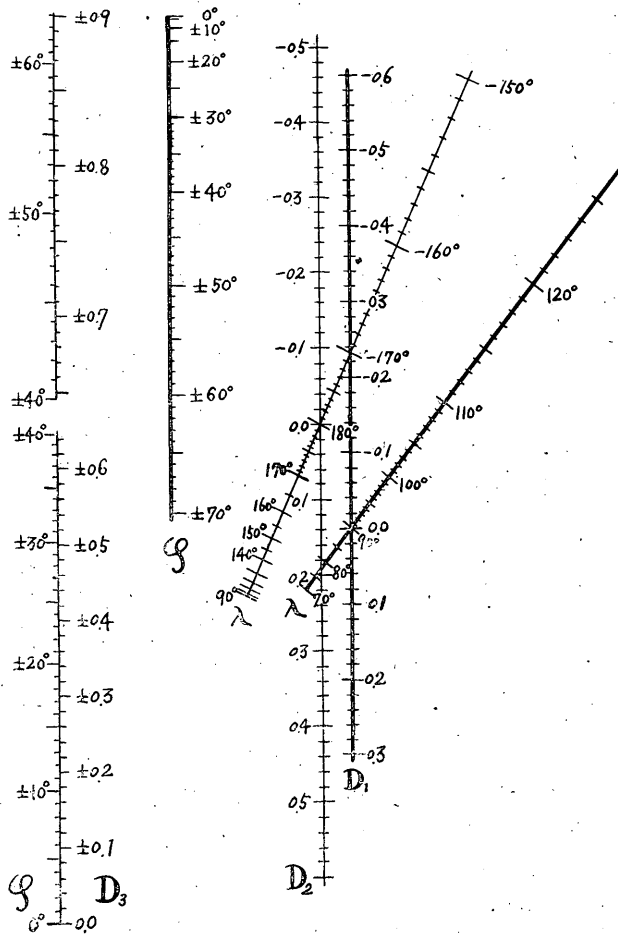


Fig. 3. The nomograms for $\sin(\varphi - 11.67' \sin 2\varphi) = D_3$, $\cos(\varphi - 11.67' \sin 2\varphi) \cos \lambda = D_1$, and $\cos(\varphi - 11.67' \sin 2\varphi) \cdot \sin \lambda = D_2$, where the negative signs in φ and λ scales show latitude south and longitude west

§ 3. 実用例

いま、 A_1, A_2, A_3 をそれぞれ比較的精度の高い地震計が置かれてあり適当な距離の間隔をもつ福岡、東京、札幌と選び実際に用いた例を次に示す。常数計算の結果 (10) は次のとおり。

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= 5.4553 \cos \Delta_1 - 10.7200 \cos \Delta_2 + 4.7363 \cos \Delta_3, \\ D_2 &= 5.3687 \cos \Delta_1 - 3.1436 \cos \Delta_2 - 1.6615 \cos \Delta_3, \\ D_3 &= 0.9756 \cos \Delta_1 - 6.9026 \cos \Delta_2 + 6.5729 \cos \Delta_3. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

「地震月報」⁽²⁾によると昭和28年7月26日 16 h 53 m (G. M. T.) ころマリアナ諸島に起った地震の震央、震源の深さおよび (P~S) 時間は次のとおりである。

Epicenter	{	ϕ 17.5° N	$H = \text{about } 200 \text{ km}$
		λ 146° E	
A_1 ;	3m 38.0s	(福 岡)	
A_2 ;	3m 16.3s	(東 京)	
A_3 ;	4m 07.2s	(札 幌)	

Jeffreys-Bullen の走時表⁽³⁾ から種々の深さに対する震央距離を計算すれば Table 1 のようになる。

Table 1. The epicentral distances (Δ_i) correspond to the various focal depth (H) which were computed by Jeffreys-Bullen's travel-time tables for the Marianas earthquake

t_i H	$t_1 = 3\text{m } 38.0\text{s}$	$t_2 = 3\text{m } 16.3\text{s}$	$t_3 = 4\text{m } 07.2\text{s}$
0 km	19.8°	17.7°	23.0°
160 km	20.8°	18.8°	24.6°
300 km	22.0°	19.1°	26.0°
350 km	22.3°	19.8°	26.5°
477 km	23.3°	20.3°	27.5°
540 km	23.7°	20.7°	28.0°
667 km	24.4°	21.3°	28.8°

Fig. 1 から $\left(\frac{\partial \Delta_1}{\partial H}\right)_0 = 1.95$, $\left(\frac{\partial \Delta_2}{\partial H}\right)_0 = 2.01$, $\left(\frac{\partial \Delta_3}{\partial H}\right)_0 = 1.67$ と求まる。また、 $H=0$ のときに関して (13) から

$$D_{10}^2 = 0.5187, \quad D_{20}^2 = 0.2778, \quad D_{30}^2 = 0.1538 \text{ を得る。}$$

これらの値を (9) に代入して H を求めれば $H = -0.05$ となる。地球半径を 6371km とすれば $H = -318.6$ となり震源の深さは大体 300km と推定できる。

次に別の方法で H を求めてみる。 H の種々の値に対する F は

$H=0\text{km}$ のとき	0.9503,	$H=477\text{km}$ のとき	-1.0330,
// 160 //	0.9591,	// 540 //	1.0396,
// 300 //	1.0058,	// 667 //	1.0572
// 350 //	0.9981,		

となる。§ 2. の II の方法によりこれらの値を方眼紙上にプロットし、それらに関する平均曲線を引けば Fig. 4. のようになり、 H の値は前の方法によるものとほぼ同じ結果を得る。それゆえや

はり震源の深さを 300km として, Fig. 3. の図表より φ , λ を求めれば

$$D_3=0.297, \quad D_2=0.513 \text{ から}$$

$$\varphi=17^\circ\text{N}, \quad \lambda=147^\circ\text{E} \text{ となる.}$$

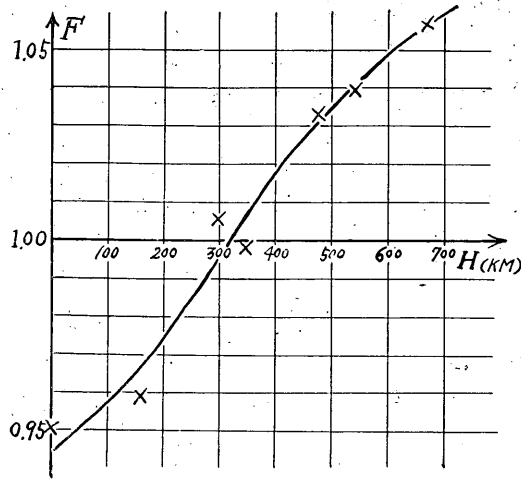


Fig. 4. Relation between F and H which is computed from Table 1. The curve is an average one for the plotted points

§ 4. あとがき

例題の結果として, 特に H が「地震月報」の値と相当食い違いを生じたが, なにぶん 3 個の ($P \sim S$) 時間だけのことであり, 観測その他の誤差および走時曲線の取り方の問題もあるので, その程度の誤差はやむをえないであろう. しかし, 計算のやっかいな欠点はあっても, 仮定としては既成の走時曲線を使うことだけだから, 今後, 地殻の水平構造の研究も進み, もっと精度の高い地震計が置かれるようになり, 加えて他に 2 か所の国際的協力があれば相当遠い地震でも割合正しい値を望むことができると思う. なお, 次回には観測点を 7, 8 か所に増やし, 今回の方法を第一近似として誤差の問題について論じたいと思う.

終りにのぞみ御指導頂いた気象庁研修所高木聖, 山川宜男両教官に御礼申し上げます. また, 原稿を読んでいただき, 御忠告をして下さった仙台管区气象台渡辺偉夫, 気象庁宇佐美竜夫両技官に感謝いたします.

参 考 文 献

- (1). 本多弘吉 : 地震波動 108—109.
- (2). 中央气象台 : 地震月報 No. 31, 46—49.
- (3). 中央气象台 : 地震観測法追録 (第 1 号) 1.3—1.43.