鏡と光線による微小廻轉角測定における一注意

本　間　正　作*

§1. はしがき

物体の微小廻転角を測る時に廻転軸に小さい鏡をつけて，これに光源から光線を当て，反射光線を遠方においた物指しの上に受けて，その上における光線の変位から角を求めることは色々の方面に使われている。地震計の検定実験でもこの方法によると機械的摩擦を免れて精度の高い結果が得られるから，標準的試験にはぜひ利用したいし，またガリツチン式のように元来光学的記象の場合には通常の検定作業にもこれを使うより外ない。

この方法の原理は物理実験の初歩のもので改めて説明するまでもないが，場合によると廻転軸附近に鏡をとり付けることが困難であつたり実験作業上不便であることもある。この時廻転軸からある距離の所に鏡をつけたためどのように事情が変るかを調べてみた。

まだ廻転の起つていない基準の状態では反射光線が正確に物指しに垂直に当つているとする。（1） 光源に直線状のスリツトをおいて巾の極めて狭い光線を平面鏡に当て物指しの上にスリツトの像を目盛りの線に平行に結ばせる場合と，（2） 光源から巾の広い楔形光束を出しこれを平面鏡全体に当て，物指しの上の鏡の縁りの像（すなわち物指し上の明るい所と暗い所の境）の移動を読む場合と（3）凹面鏡を使つて，光源の像を物指し上に結ばせる場合とがあるが，（2）と（3）とは同じ公式になり，（1）だけがこれらと違つた公式になる。

§2. 巾のうすい光線を平面鏡に当てる時

才1図で O は紙面に垂直な廻転軸で，これより h だけ距てて鏡 M が OM と角 α をなして紙面に垂直にとり付けてあるとする。光源および物指しの紙面上えの正射影を L および $\overline{AB}$ とする。この狀態で $\overline{LM}$ が鏡の法線となす角を β，物指上の L の像を S_0 とする。またこの時 $MS_0=D$ とする。

次に物体が小角 θ だけ廻転し，鏡が M_1 来たとすると，その上での光線の反射点は LM と鏡 M_1 の交點 M' となる。M' を通つて M に平行な仮想的鏡を考えると，これによる像は S' となり，実際には鏡 M_1 は仮想の鏡をさらに M' を中心に θ まわした位置にあるから眞の像を S とすると $S'\widehat{M'}S'=2\theta$ となる。

いま OM_1 の垂線を M_1N とすると $M\widehat{M_1}N=\dfrac{\theta}{2}$ であるから

---

* 地震観測所

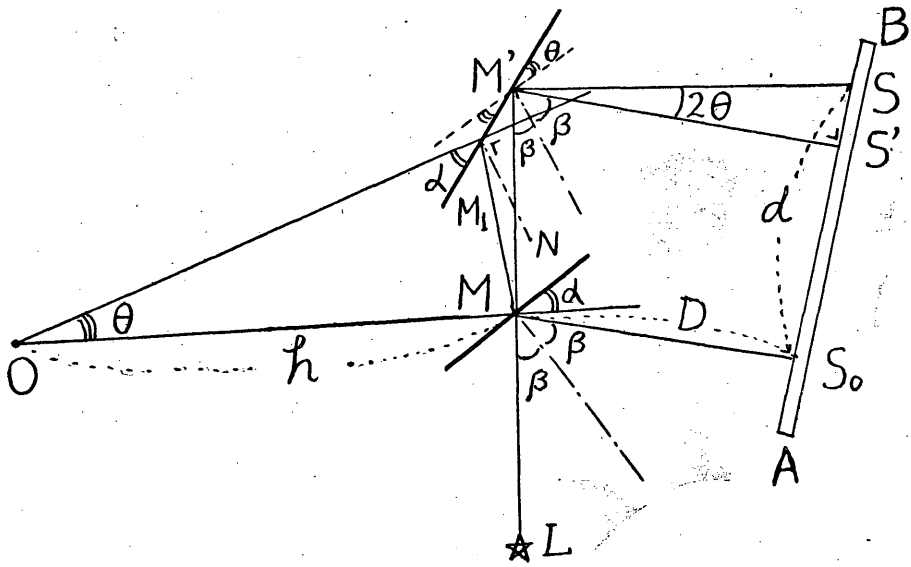

Fig. 1 O: Axis of rotation (L ar to the paper), M: Plane mirror fixed to the rotating body, M_1: Mirror in rotated position, L: Lamp, AB: Scale, d: Defection of image corresponding to the rotation angle θ

The relation between θ and d is expressed by (2.6) or approximately by (2.7) and (2.8)

$$M\hat{M_1}M' = \frac{\theta}{2} + \alpha + \frac{\pi}{2} \tag{2.1}$$

また

$$M\hat{M'}M_1 = \frac{\pi}{2} - \beta - \theta \tag{2.2}$$

それゆえ $\Delta MM'M_1$ に対して

$$MM' = MM_1 \times \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2} + \alpha + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta - \theta\right)} = MM_1 \times \frac{\cos\left(\alpha + \frac{\theta}{2}\right)}{\cos\,(\beta + \theta)}$$

$$= 2h\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\alpha + \frac{\theta}{2}\right)}{\cos\,(\beta + \theta)} \tag{2.3}$$

一方

$$S_0S' = MM' \sin\,(2\beta) \tag{2.4}$$

$$M'S' = D + MM' \cos\,(2\beta) \tag{2.5}$$

それゆえ，S_0S すなわち光線の移動距離を d とすると

$$d = S_0S' + M'S' \text{ tg } 2\theta$$

$$=D\,\mathrm{tg}\,(2\theta)+2h\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\alpha+\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\,(\beta+\theta)}\{\sin\,(2\beta)+\cos\,(2\beta)\,\,\mathrm{tg}\,(2\theta)\}$$

$$d=D\,\mathrm{tg}\,(2\theta)+4h\cdot\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\alpha+\frac{\theta}{2}\right)\sin\,(\beta+\theta)}{\cos\,(2\theta)} \tag{2.6}$$

これが正確な公式で α, β, D および h が測つてあれば θ と d の関係が知れるのであるが，これは d を知つて θ を求めるには不便である。θ が小さい時には右辺を θ の羃に展開して

$$\begin{aligned}d=&2\,(D+h\cos\alpha\sin\beta)\,\theta\\&+(2\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)\,h\,\theta^2\\&+\left(\frac{8}{3}D+h\frac{8\cos\alpha\sin\beta-3\sin\alpha\cos\beta}{3}\right)\theta^3+\cdots,\end{aligned} \tag{2.7}$$

あるいわ

$$\begin{aligned}\theta=&\frac{d}{2D\left(1+\frac{h}{D}\cos\alpha\sin\beta\right)}\\&-\frac{2\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{8\left(1+\frac{h}{D}\cos\alpha\sin\beta\right)^3}\cdot\frac{h}{D}\cdot\left(\frac{d}{D}\right)^2\\&-\cdots\cdots\end{aligned} \tag{2.8}$$

となる。才2項は才1項よりずつと小さい。才1項がふつうの公式 $\theta=\frac{d}{2D}$ と一致する条件は，$\frac{h}{D}\to 0$, $\beta\to 0$, $\alpha\to\frac{\pi}{2}$ のいずれか一つの場合である。才2項は θ と d が非対称になつて面白くないが，$\frac{h}{D}\to 0$ とするか，または $\beta\to 0$, $\alpha\to\frac{\pi}{2}$ を同時に実現させれば，才1項もふつうの公式と一致するし，才2項も0になる。$2\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=0$ すなわち $\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta=2$ のように α, β を組合わすと才2項は常に消える。才2項が無視出来る時は h/D をある程度大きくした方が θ に対する d が大きくなり観測が楽になるが，鏡の変位が大きくなるから，大きい鏡が必要になる。

§3. 鏡の縁りを使うか，凹面鏡を使う時

才2図では M が平面鏡の周辺（または凹面鏡の中心点）である。この時は移動した鏡 M_1 を通つて M に平行に仮想の鏡 M' を考える。S_1 は M_1 より物さしに下した垂線，S_2 は鏡 M' による光源 L の像である。この仮想鏡を θ だけ廻わすと M_1 に一致するから $S_2\widehat{M_1}S_1=2\theta$ である。

こんどは光線 LM の入射角 β と，LM_1 の仮想鏡 M' に対する入射角 β' とが違つてやる。$M'M_1$ の垂線を M_1M' とすると，

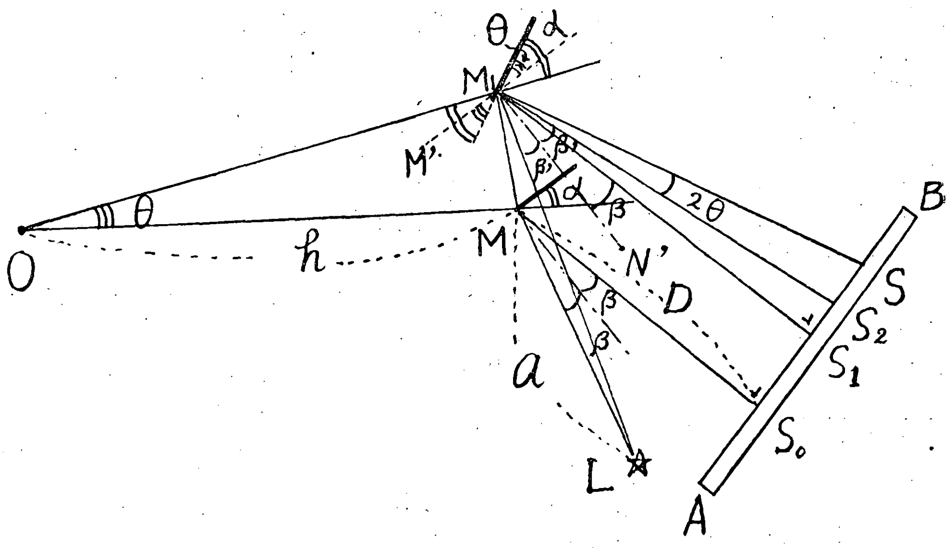

Fig. 2 M: Edge of a mirror or centre of a convex mirror
Other notations are same as Fig. 1.

The relation betweed O and d is expressed by (3.8) or approximately by (3.5) and (3.10).

$$L\widehat{M}_1M = M'\widehat{M}_1N' - L\widehat{M}_1N' - M'\widehat{M}_1M = \frac{\pi}{2} - \beta' - \left(\frac{\pi}{2} - 2 + \frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \alpha - \beta' - \frac{\theta}{2} \qquad (3.1)$$

$$\therefore \quad M\widehat{M}_1S_1 = S_1\widehat{M}_1N' + N'\widehat{M}_1L + L\widehat{M}_1M$$

$$= \beta + \beta' + \left(\alpha - \beta' - \frac{\theta}{2}\right) = \alpha + \beta - \frac{\theta}{2} \qquad (3.2)$$

$$\therefore \quad S_0S_1 = MM_1 \times \sin\ M\widehat{M}_1S_1 = 2h\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\alpha + \beta - \frac{\theta}{2}\right) \qquad (3.2)$$

また $M\widehat{L}M_1 = \beta' - \beta$ であるから (3.1) も参照し ΔLMM_1 について

$$\sin\ (\beta' - \beta) = \frac{MM_1}{ML}\sin\left(\alpha - \beta' - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{2h}{a}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\alpha - \beta' - \frac{\theta}{2}\right)$$

ここに a は光源と鏡の距離 LM である。

$$\operatorname{tg}\ (\beta' - \beta) = \frac{\frac{2h}{a}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\alpha - \beta = \frac{\theta}{2}\right)}{1 + \frac{2h}{a}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\alpha - \beta - \frac{\theta}{2}\right)} \qquad (3.4)$$

次に $S_1\widehat{M}_1S = 2\theta + (\beta' - \beta)$ だから, (3.2) も参照して

$$S_1S=(D+MM_1\cos M\widehat{M_1}S_1)\ \mathrm{tg}\ S_1\widehat{M_1}S$$
$$=\left\{D+2h\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\alpha+\beta-\frac{\theta}{2}\right)\right\}\mathrm{tg}\ \{2\theta+(\beta'-\beta)\} \tag{3.5}$$

しかるに(3.4)より

$$\mathrm{tg}\ \{2\theta+(\beta'-\beta)\}=\frac{\mathrm{tg}\ (2\theta)+\mathrm{tg}\ (\beta'-\beta)}{1-\mathrm{tg}(2\theta)+\mathrm{tg}(\beta'-\beta)}$$
$$=\frac{\sin(2\theta)+\dfrac{2h}{a}\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\sin\left(\alpha-\beta+\dfrac{3}{2}\theta\right)}{\cos(2\theta)+\dfrac{2h}{a}\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\alpha-\beta+\dfrac{3}{2}\theta\right)}$$

であるから(3 5)は

$$S_1S=\left\{D+2h\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\alpha+\beta-\frac{\theta}{2}\right)\right\}\frac{\sin(2\theta)+\dfrac{2h}{a}\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\sin\left(\alpha-\beta+\dfrac{3}{2}\theta\right)}{\cos(2\theta)+\dfrac{2h}{a}\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\alpha-\beta+\dfrac{3}{2}\theta\right)} \tag{3.6}$$

また(3.2)より

$$S_0S_1=MM_1\sin M\widehat{M_1}S_1$$
$$=2h\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\alpha+\beta-\frac{\theta}{2}\right) \tag{3.7}$$

(3.6)と(3.7)より

$$\alpha=S_0S_1+S_1S=\frac{D}{\cos(2\theta)+\dfrac{2h}{a}\mathit{siu}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\alpha-\beta+\dfrac{3}{2}\theta\right)}$$
$$\times\left[\left\{\sin(2\theta)+\frac{2h}{a}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\alpha-\beta+\frac{3}{2}\theta\right)\right\}\right.$$
$$\left.+\frac{2h}{D}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left\{\sin\left(\alpha+\beta+\frac{3}{2}\theta\right)+\frac{2h}{a}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin(2\alpha+\theta)\right\}\right] \tag{3.8}$$

これが d と θ との間の正確な関係である。

θ が十分小さいとして冪級数に展開すれば

$$d=\left[2D+\frac{h}{a}\{D\sin(\alpha-\beta)+a\sin(\alpha+\beta)\}\right]\theta-\left[\left\{\frac{h}{a}D\frac{\cos(\alpha-\beta)}{2}-a\frac{3\cos(\alpha+\beta)}{2}\right\}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{h}{a}\right)^2\{D\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha-\beta)+a(\sin\overline{\alpha+\beta}\cos\overline{\alpha-\beta}-\sin\overline{2\alpha})\}\right]\theta^2$$
$$+\left[\frac{8}{3}D+\frac{h}{a}\left\{D\frac{23\sin(\alpha-\beta)}{6}+a\frac{5\sin(\alpha+\beta)}{6}\right\}\right.$$

$$+\left(\frac{h}{a}\right)^2\left\{D\,\frac{1+2\sin^2(\alpha-\beta)}{2}-a\,\frac{\cos(2\alpha)}{2}\right\}$$

$$+\left(\frac{h}{a}\right)^3\{D\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha-\beta)+a(\sin\overline{\alpha+\beta}\cos\overline{\alpha+\beta}-\sin\overline{2\alpha})\}\cos(\alpha-\beta)\Big]\theta^3$$

$$+\cdots, \tag{3.9}$$

あるいわ

$$\theta=\frac{d}{2D\left[1+\dfrac{h}{2a}\left\{\sin(\alpha-\beta)+\dfrac{a}{D}\sin(\alpha+\beta)\right\}\right]}$$

$$+\frac{1}{2\left[1+\dfrac{h}{2a}\left\{\sin(\alpha-\beta)+\dfrac{a}{D}\sin(\alpha+\beta)\right\}\right]^3}$$

$$\times\left[\frac{1}{4}\left(\frac{h}{2a}\right)\left\{\cos(\alpha-\beta)-3\frac{a}{D}\cos(\alpha+\beta)\right\}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{h}{2a}\right)^2\left\{\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)+\frac{a}{D}(\sin\overline{\alpha+\beta}\cos\overline{\alpha-\beta}-\sin\overline{2\alpha})\right\}\right]\left(\frac{d}{D}\right)^2$$

$$+\cdots\cdots. \tag{3.10}$$

才1項がふつうの公式と一致するためには，$\dfrac{h}{2a}\to 0$ か $\sin(\alpha-\beta)+\dfrac{a}{D}\sin(\alpha+\beta)=0$ すなわち $(D+a)\,\mathrm{tg}\,\alpha\doteqdot(D-a)\,\mathrm{tg}\,\beta$ がなり立つ必要がある。たとえば $\alpha=0$ なら $\beta=0$，または $a=D$ に択べばよい。$\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ なら $\beta=\dfrac{\pi}{2}$ でよいが $\beta=\dfrac{\pi}{2}$ にすることは実際上不可能である。いずれの場合にも才2項が消えない。h がわり合い小さい時でも a をそれ相応に小さくすると θ に対する d の値を増減出来る。

§4. 例

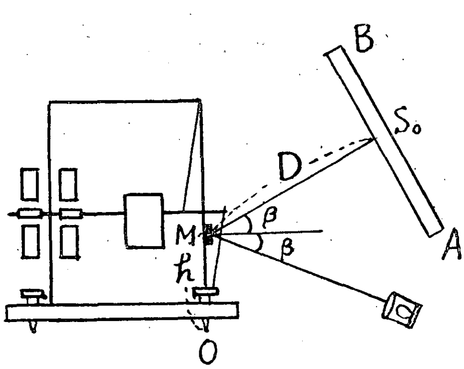

Fig. 3

ガリツチン地震計水平動の振子等長を出すには台全体を傾けて水平振子の廻転軸と鉛直線のなす角 i を少しずつ変化させ，これに応ずる自由振動周期を測定する(1)。この時台の傾きの変化（すなわち i の変化）は台につけた鏡に光をあてて行うが，台の廻転軸が三脚の先端であるからここに鏡をつけるわけに行かない。比較的樂に實驗しうるためには，台から相当距つた所に鏡をつけねばならない。（才3図）今脚の直上 30cm の所に枠面

(1) B. Galitzin; Vorlesungen über Seismometrie (1918).

に鏡をつけ，物指しは鏡から 150cm の所にあり，光源と鏡の間は 100cm であるとする。すなわち

$$\alpha=0,\ h=30\text{cm},\ D=150\text{cm},\ a=100\text{cm}$$

とすると (2.8) の才1項から

$$\theta=\frac{d}{2D\left(1+\frac{h}{D}\sin\beta\right)}=\frac{d}{2D\ (1+0.2\ \sin\beta)} \tag{4.1}$$

(3.10) の才1項からは

$$\theta=\frac{d}{2D\left\{1+\frac{h}{2a}\left(-\sin\beta+\frac{a}{D}\sin\beta\right)\right\}}$$

$$=\frac{d}{2D\left\{1-\frac{h\ (D-a)}{2aD}\sin\beta\right\}}$$

$$=\frac{d}{2D(1-0.05\sin\beta)} \tag{4.2}$$

すなわち (4.1) では鏡と物指しの有効距離が 20sin β% 増した事になり，(4.2) では 5sin β% だけ減つた事になる。色々の β に対する有効距離と D の比は次表で与えられる。

β	(4.1) による時	(4.2) による時
0°	1	1
10°	1.035	0.991
20°	1.068	0.983
30°	1.100	0.975
50°	1.153	0.962

従つて求める振子等長も眞の値に対しこの割合で (4.1) の場合は短く，(4.2) の場合は長く求まることになる。

実験室の都合上 α を 0 や $\pi/2$ におくと十分 D を長くとれないが，斜めにとりつけると都合がよい時には上の諸公式を使うと勝手な α に対する θ と d の関係が求められて便利と思われる。

1951. VI. 28