地形が表面振動に及ぼす影響 (III)

ラブ波から誘發されるレーレー波

本　間　正　作*

§1. 緒　言

ラブ波の理論に依れば震源より遠いゝ地點に於けるラブ波による地表の振動方向は波面の法線に垂直な水平動に限る筈であるが，観測の結果は必ずしも十分にその條件を滿して居ない[1]．この事實の說明には地表附近の地殼構造の複雜性——水平的不均質とか斜傾した不連續面等——の影響が考へられて居るが，玆ではその樣な解說が彈性波動の數理論の上からも可能であることを證明しようと思ふ．尤も解析にかける事を易しくする爲にはモデルとして無限に長い緩やかな山脈（或ひは谷地）をラブ波が斜めに横切る時起る弱い擾亂と云ふようなものを考へ，定性的議論が出來たゞけであるのは止むを得なかつた．この樣な擾亂は種々の部分から成立するものであるが，その一つ一つについて詳しい說明は略し，比較的取扱ひが簡單で且つ興味深い擾亂レーレー波だけを幾分詳しく吟味した．即ちこの波は山脈附近では寧ろ他の部分の寄與に較べて弱勢であるが[2]，山脈から遠ざかつても減衰しないので遠方まで影響の及ぶ點に特殊の意味があるのである．

計算の方法は大體私の前論文[2]と同樣であるが，今迄は鉛直及び水平の一方向の二次元的取扱ひであつたのが此度は三次元的なので稍複雜になる．

§2. 表面に與へた應力による振動

一般に半無限彈性體の自由表面 $z=0$（z は物體內部に向つて正と採る）に應力

$$\left.\begin{aligned} X_\nu &= \mu M e^{i\gamma x+i\sigma y+i\alpha t}, \\ Z_\nu &= \mu N \quad〃 \quad, \\ Y_\nu &= \mu O \quad〃 \quad, \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

を與へた時彈性體內の振動の變位成分は

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial y}-\frac{\partial F}{\partial z}, \\ v &= \frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial E}{\partial z}-\frac{\partial G}{\partial x}, \\ w &= \frac{\partial\phi}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\partial E}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

---

* 中央氣象臺

(1) 例へば T. Matuzawa; Seismometrische Untersuchungen des Erdbebens vom 2. März 1933, (II). 震研彙報, 第 13 號, (1935).

(2) 筆者, 驗震時報, 第 11 卷. 第 4 號.

と書け，尚ほ

$$\frac{\partial E}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial z}=0 \quad\cdots\cdots(3)$$

と置く事が出來る．但し ϕ, E, F, G は次の運動方程式を滿す．

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}&=\frac{a^2}{k^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi,\\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}(E,F,G)&=\frac{a^2}{\rho k^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\cdot(E,F,G)\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(4)$$

茲に

$$\rho=\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\quad\cdots\cdots(5)$$

λ, μ はラーメの彈性係數．又 $\frac{2\pi}{k}$ は振動數 a なる P 波の波長，$\frac{2\pi}{\sqrt{\rho}k}$ は S 波の波長をあらはす．

$(\phi, E, F, G)\infty e^{i\tau x+icy+iat}$ とおくと，運動方程式から

$$\left.\begin{aligned}\phi&=\phi_0\cdot e^{i\tau x+icy+i\sigma z+iat},\\ (E,F,G)&=(E_0,F_0,G_0)\,e^{i\tau x+icy+i\chi z+iat},\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(6)$$

となる．但し ϕ_0, E_0, F_0, G_0 は常數で，

$$\sigma=i\sqrt{\tau^2+c^2-k^2},\quad \chi=i\sqrt{\tau^2+c^2-\rho k^2}\quad\cdots\cdots(7)$$

で，に σ 就て云へば $\sqrt{\tau^2+c^2-k^2}$ は $\tau^2+c^2-k^2>0$ の時は $+\sqrt{\ }$ を表はし，$\tau^2+c^2-k^2<0$ の時は $+i\sqrt{|\tau^2+c^2-k^2|}$ を表はす．χ に就ても同様

この様な解による $z=0$ の應力を計算すると ($e^{i\tau x+icy+iat}$ は略して)，

$$\frac{1}{\mu}X_\nu=-2\tau\sigma\phi_0+c\tau E_0-(\tau^2-\chi^2)F_0-c\chi G_0,$$

$$\frac{1}{\mu}Z_\nu=\{-\rho k^2+2(\tau^2+c^2)\}\phi_0+2(cE_0-\mu F_0)\cdot\chi$$

$$\frac{1}{\mu}Y_\nu=-2c\sigma\phi_0+(c^2-\chi^2)E_0-c\tau F_0+\tau\chi G_0$$

(3) より

$$\tau E_0+cF_0+\chi G_0=0\quad\cdots\cdots(8)$$

となる事を利用して G_0 を消去し，之等の應力が (1) と等しいと置けば，

$$-2\tau\sigma\phi_0+2c\tau E_0+(\rho k^2-2\tau^2)F_0=M,$$

$$-\{\rho k^2-2(c^2+\tau^2)\}\phi_0+2c\chi E_0-2\tau\chi F_0=N,$$

$$-2c\sigma\phi_0-(\rho k^2-2c^2)F_0-2c\tau F_0=O.$$

之等及び (8) より ϕ_0, E_0, F_0, G_0 を求めると,

$$\phi_0=\frac{-1}{\Delta}[2\tau\chi M+\{\rho k^2-2(c^2+\tau)^2\}\cdot N+2c\chi O], \cdots\cdots(9)$$

$$E_0=\frac{1}{\rho k^2\Delta}[-2c\tau\{\rho k^2-2(c^2+\tau^2+\sigma\chi)\}M+2\rho k^2c\sigma N$$
$$-\rho k^2\{\rho k^2-2(c^2+\tau^2)\}O+2\tau^2\{\rho k^2-2(c^2+\tau^2+\sigma\chi)\}O], \cdots(10)$$

$$F_0=\frac{1}{\rho k^2\Delta}[\rho k^2\{\rho k^2-2(c^2+\tau^2)\}M-2c^2\{\rho k^2-2(c^2+\tau^2+\sigma\chi)\}M$$
$$-2\rho k^2\tau\sigma N+2c\tau\{\rho k^2-2(c^2+\tau^2+\sigma\chi)\}O], \cdots\cdots(11)$$

$$G_0=\frac{-1}{\rho k^2\chi}\cdot[cM-\tau O] \cdots\cdots(12)$$

但し

$$\Delta=\{\rho k^2-2(c^2+\tau^2)\}^2+4(c^2+\tau^2)\sigma\chi \cdots\cdots(13)$$

となる.

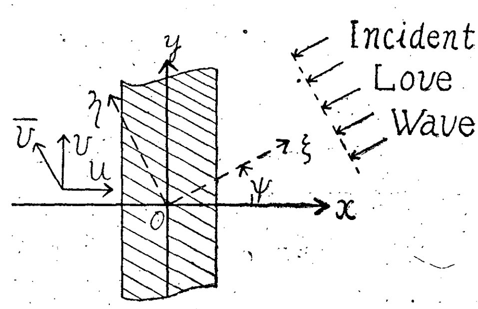
§3. ラブ波が山脈を横切る問題の一般解

山脈の主軸は y 軸と一致し, 斷面は

$$z=f(x), \quad |f'(x)|\ll 1,$$

で表はせるものとする. (第 1 圖)

第 1 圖



入射ラブ波は x 軸と角 ψ をなす方向から來る平面波とする. 但し $|\psi|<\frac{\pi}{2}$. この方向を ξ とし, 之に垂直な方向を η とし, η 方向の變位を $\bar{v}$ とする.

入射ラブ波を

$$\bar{v}=A\cdot e^{ik\alpha\xi+iat}\cdot\cos(k\beta z) \cdots\cdots(15)$$

とすると, 之は, $z=0$ で應力 0 の條滿す. 之が運動方程式

$$\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial t^2}=\frac{a^2}{\rho k^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\cdot\bar{v}$$

を滿す爲には

$$\alpha^2+\beta^2=\rho \cdots\cdots(16)$$

ラブ波が S 波の速度より大きい爲には $\frac{\alpha}{\sqrt{\rho}}<1$ である.

(15) は (x, y, z) 系に直すと,

$$u=-\bar{v}\sin\psi, \quad v=\bar{v}\cos\psi, \quad \xi=x\cos\psi+y\sin\psi$$

であるから,

$$\left.\begin{aligned} u&=-A\sin\psi\cdot\cos(k\beta z)\cdot e^{ik\alpha(x\cos\psi+y\sin\psi)+i\alpha t},\\ v&=A\cos\psi\cdot\quad〃\qquad〃 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(17)$$

この波による $z=f(x)$ 上の殘留應力は[1]

$$\left.\begin{aligned} X_\nu&=-X_x\cdot f'(x)+\frac{\partial Z_x}{\partial z}\cdot f(x),\\ Z_\nu&=\frac{\partial Z_x}{\partial z}\cdot f(x),\\ Y_\nu&=-Y_x\cdot f'(x)+\frac{\partial Y_z}{\partial z}\cdot f(x), \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(18)$$

但し X_x, $\frac{\partial Z_x}{\partial z}$ 等は $z=0$ に於ける値とす。(17) より計算すると,

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\mu}X_\nu&=[2ik\alpha f'(x)\sin\psi\cdot\cos\psi+k^2\beta^2 f(x)\sin\psi]\cdot A\cdot e^{ik\alpha(x\cos\psi+y\sin\psi)+i\alpha t},\\ \frac{1}{\mu}Z_\nu&=k^2\beta^2 f(x)\cdot A\cdot\sin\psi\cdot e^{ik\alpha(x\cos\psi+y\sin\psi)+i\alpha t},\\ \frac{1}{\mu}Y_\nu&=[-ik\alpha f'(x)\cdot(\cos^2\psi-\sin^2\psi)-k^2\beta^2 f(x)\cos\psi]\cdot A\cdot e^{ik\alpha(x\cos\psi+y\sin\psi)+i\alpha t}. \end{aligned}\right\}\cdots(19)$$

一般に $f(x)$ はフーリエの積分に依り

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\tau\int_{-\infty}^\infty f(\eta)\cos\{\tau(x-\eta)\}\,d\eta\cdots\cdots(20)$$

であるから, この成分 $\cos\{\tau(x-\eta)\}$ に對する解を作つて後に一般化すればよろしい. (19) の $f(x)$ に $\cos\{(x-\eta)\}$ を入れて少し計算すると, $e^{ik\alpha(x\cos\psi+y\sin\psi)+i\alpha t}$ は省略して,

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\mu}X_\nu&=\frac{A\sin\psi}{3}[\{k^2\beta^2-2k\alpha\tau\cos\psi\}e^{i\tau(x-\eta)}+\{k^2\beta^2+2k\alpha\tau\cos\psi\}e^{-i\tau(x-\eta)}],\\ \frac{1}{\mu}Z_\nu&=\frac{k^2\beta^2A\sin\psi}{2}[e^{i\tau(x-\eta)}+e^{-i\tau(x-\eta)}]\\ \frac{1}{\mu}Y_\nu&=-\frac{A}{2}[\{k^2\beta^2\cos\psi-k\alpha\tau(\cos^2\psi-\sin^2\psi)\}e^{i\tau(x-\eta)})\\ &\quad+\{k^2\beta^2\cos\phi+k\alpha\tau(\cos^2\psi-\sin^2\psi)\}e^{-i\tau(x-\eta)}], \end{aligned}\right\}\cdots(21)$$

となる事が分る. 之等の應力成分は何れも 2 つの部分より成り後半は前半の τ 代りに $-\tau$ と置いたゞけの形を採る. 從つてこの應力を打ち消すような彈性振動の解を前節の公式 (9) 乃至 (12) から求めると, 之も 2 つの部分より成り

$$\phi=\phi(\tau)+\phi(-\tau),\quad E=E(\tau)+E(-\tau),$$
$$F=F(\tau)+F(-\tau),\quad G=G(\tau)+G(-\tau),$$

(1) 筆者; 前出.

の形を持つ．從つて (20) に依り一般化すると，例へば

$$\phi=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\tau\int_{-\infty}^\infty f(\eta)\{\phi(\tau)+\phi(-\tau)\}\,d\eta=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(\eta)\,d\eta\int_0^\infty\{\phi(\tau)+\phi(-\tau)\}\cdot d\tau$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^\infty f(\eta)\,d\eta\int_{-\infty}^\infty\phi(\tau)\,d\tau=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^\infty d\tau\int_{-\infty}^\infty f(\eta)\cdot\phi(\tau)\cdot d\eta$$

となるから，結局 (21) の前半に對する解だけを ϕ, E, F, G として，

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty d\tau\int_{-\infty}^\infty f(\eta)\,d\eta$$

と云ふ演算で一般化すればよい事が分る．故に

$$\left.\begin{aligned}\phi&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty d\tau\int_{-\infty}^\infty\phi_0\cdot e^{i\tau x+ik\alpha y\sin\psi+i\sigma z+iat}\cdot e^{-i(\tau-k\alpha\cos\psi)\eta}\cdot f(\eta)\,d\eta,\\(E,F,G)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty d\tau\int_{-\infty}^\infty(E_0,F_0,G_0)\,e^{i\tau x+ik\alpha y\sin\psi+i\chi z+iat}\cdot e^{-i(\tau-k\alpha\cos\psi)\eta}\cdot f(\eta)\,d\eta\end{aligned}\right\}\cdots(22)$$

但し

$$\phi_0=\frac{-1}{\Delta}[2\tau\chi M+\{\rho k^2-2(\tau^2+k^2\alpha^2\sin^2\psi)\}N+2k\alpha\sin\psi\cdot\chi O],\quad\cdots\cdots(23)$$

$$\begin{aligned}E_0=\frac{1}{\rho k^2\Delta}[&-2\tau k\alpha\sin\psi\cdot\{\rho k^2-2(\tau^2+k^2\alpha^2\sin^2\psi+\sigma\chi)\}M\\&+2\rho k^2\cdot k\alpha\sin\psi\cdot\sigma N-\rho k^2\{\rho k^2-2(\tau^2+k^2\alpha^2\sin^2\psi)\}O\\&+2\tau^2\{\rho k^2-2(\tau^2+k^2\alpha^2\sin^2\psi+\sigma\chi)\}O],\end{aligned}\quad\cdots\cdots(24)$$

$$\begin{aligned}F_0=\frac{1}{\rho k^2\Delta}[&\rho k^2\{\rho k^2-2(\tau^2+k^2\alpha^2\sin^2\psi)\}M\\&-2k^2\alpha^2\sin^2\psi\{\rho k^2-2(\tau^2+k^2\alpha^2\sin^2\psi+\sigma\chi)\}M-2\rho k^2\tau\sigma N\\&+2k\alpha\sin\psi\cdot\tau\{\rho k^2-2(\tau^2+k^2\alpha^2\sin^2\psi+\sigma\chi)\}O],\end{aligned}\quad\cdots\cdots(25)$$

$$G_0=\frac{-1}{\rho k^2\chi}[k\alpha\cdot\sin\psi M-\tau\cdot O]\cdots\cdots(26)$$

茲に

$$\left.\begin{aligned}\Delta&=\{\rho k^2-2(\tau^2+k^2\alpha^2\sin^2\psi)\}^2+4(\tau^2+k^2\alpha^2\sin^2\psi)\sigma\cdot\chi,\\\sigma&=i\sqrt{\tau^2+k^2\alpha^2\sin^2\psi-k^2},\quad\chi=i\sqrt{\tau^2+k^2\alpha^2\sin^2\psi-\rho k^2},^{(1)}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(27)$$

$$\left.\begin{aligned}M&=\frac{A\sin\psi}{2}[k^2\beta^2+2k^2\alpha^2\cos^2\psi-2k\alpha\tau\cos\psi],\\N&=\frac{A}{2}k^2\beta^2\sin\psi,\\O&=-\frac{A}{2}[k^2\beta^2\cos\psi+k^2\alpha^2\cos\psi(\cos^2\psi-\sin^2\psi)-k\alpha\tau(\cos^2\psi-\sin^2\psi)].\end{aligned}\right\}\cdots(28)$$

---

(1) 根號の約束に就ては 25 頁參照

斯くして (23)〜(28) を (22) に代入して $f(x)$ を實際的に與へると最後の答に到達する．この様な答は之を種々な部分に分けて考へる事が出來る．即ち

(i) 鉛直な xz 面に對して P 及び SV 的に振動する部分,

(ii) 〃 SH 的に振動する部分,

(iii) レーレー波,

(iv) 地形の特性に依る擾亂.

この様なことはに於 (22) ける τ についての積分の特異點の吟味から分ることであるが，各別の解析は他の機會に讓り，此回はレーレー波だけを調べた（次節）．之はレーレー波が遠方迄よく勢力が減衰しない點が他の三者に比し特異な性質であるからで，山脈附近では寧ろ比較的弱勢であらうと想像される[1].

上の各々の中 (ii) 以外は盡く上下動を伴ひ，又波面の法線方向の變位成分を伴ふものである．從つて地形によりラブ波に之等の成分が發生し得る事を定性的に證明出來たわけである．地形が無限に長くはなく，有限の大きさのものである場合も，同議に議論出來るが後の機會にする[2].

§4. 誘發されるレーレー波の性質

前節に得た解 (22) よりレーレー波を採り出すには，先づ η に關する積分と τ に關する積分の順序を入れ換へると，$e^{ika y \sin\psi + iat}$ は省いて，

$$\left.\begin{aligned}\phi&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\eta)\,e^{ik\alpha\cos\psi\cdot\eta}\,d\eta\int_{-\infty}^{\infty}\phi_0\,e^{i\tau(x-\eta)+i\sigma z}\,d\tau,\\(E,\,F,\,G)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\eta)\,e^{ik\alpha\cos\psi\eta}\,d\tau\int_{-\infty}^{\infty}(E_0,\,F,\,G_0)\,e^{i\tau(x-\eta)+i\chi z}.\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(29)$$

この τ に關する積分の特異點の一つは

$$\Delta=\{\rho k^2-2(\tau^2+k^2\alpha^2\sin^2\psi)\}^2+4(\tau^2+k^2\alpha^2\sin^2\psi)\cdot\sigma\cdot\chi=0$$

の根として與へられ，山脈のない半無限彈性體に於ける振動數 a なるレーレー波の波長を $\dfrac{2\pi}{l}$ とすると，

$$\tau^2{}_0+k^2\alpha^2\sin^2\psi=l^2$$

を滿足するような τ_0 が丁度その根に當る筈である．しかるに同じ振動數のレーレー波と S 波の波長は前者の方が短く，ラブ波と S 波では後者が短い事から，レーレー波の波長はラブ波の夫より短く，從つて $k\alpha<l$ となる．故に

$$\tau_0=\pm\sqrt{l^2-k^2\alpha^2\sin^2\psi}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(30)$$

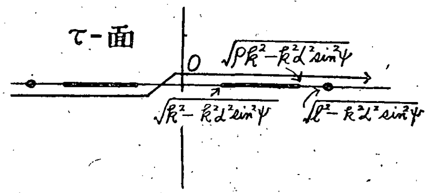
(1) 前の論文の時もさうであつた．筆者，前出

(2) 彈性の水平的不均質がある場合不均一さが弱いのきは，ラブ波に對して擾亂は生じない．之については筆者；地表物質の水平均質が表面振動に及ぼす影響，(本誌，p.) に載せる．

は實數である．この特異點のまわりの積分がレーレー波を與へるものである．

一般に τ 面上の特異點の分布は，第一次ラブ波の入射角に依り種々の場合を生ずるものであるが，σ, χ に關する根號の約束[1]及び Fictive friction の考へにより[2]積分路は第１圖の様に採ればよい事が分る．從つて $x<0$ に於ける解を求める場合には積分路を移動して $-i\infty$ の方に持つて行く事により $\tau_0=\sqrt{l^2-k^2\alpha^2\sin^2\psi}$ のみが積分に關係し，$x>0$ の解では $+i\infty$ の方に持つて行く事により $\tau^0=\sqrt{l^2-k^2\alpha^2\sin^2\psi}$ のみが關係する．

第 1 圖



先づ $x<0$ に於ける波即ち屈折レーレー波を考へる．(29) の τ に關する積分は

$$\tau=\tau_0=\sqrt{l^2-k^2\alpha^2\sin^2\psi}$$

に於ける留數から求めればよい．從つて

$$\left.\begin{aligned}
\phi&=\frac{-2i}{\Delta_0'}\left[2\tau_0\chi_0M_0+(\rho k^2-2l^2)N_0+2k\alpha\sin\psi\cdot\chi_0O_0\right]e^{i\sigma_0z}\\
&\qquad\times\int_{-\infty}^{\infty}f(\eta)\,e^{-i(\tau_0-k\alpha\cos\psi)\eta}\,d\eta,\\
E&=\frac{2i}{\rho k^2\Delta_0'}\left[-2\tau_0k\alpha\sin\psi\{\rho k^2-2(l^2+\sigma_0\chi_0)\}M_0+2\rho k^2k\alpha\sin\psi\cdot\sigma_0N_0\right.\\
&\qquad\left.-\rho k^2\{\rho k^2-2l^2\}O_0+2\tau_0^2\{\rho k^2-2(l^2+\sigma_0\chi_0)\}O_0\right]e^{i\chi_0z}\\
&\qquad\times\int_{-\infty}^{\infty}f(\eta)\,e^{-i(\tau_0-k\alpha\cos\psi)\eta}\,d\eta,\\
F&=\frac{2i}{\rho k^2\Delta_0'}\left[\rho k^2\{\rho k^2-2l^2\}M_0-2k^2\alpha^2\sin^2\psi\{\rho k^2-2(l^2+\sigma_0\chi_0)\}M_0\right.\\
&\qquad\left.-2\rho k^2\tau_0\sigma_0N+2k\alpha\sin\psi\cdot\tau_0\{\rho k^2-2(l^2+\sigma_0\chi_0)\}O_0\right]e^{i\chi_0z}\\
&\qquad\times\int_{-\infty}^{\infty}f(\eta)e^{-i(\tau_0-k\alpha\cos\psi)\eta}\,d\eta,\\
G&=0,
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots(31)$$

但し共通因子 $e^{i\sqrt{l^2-k^2\alpha^2\sin^2\psi}\,x+ik\alpha y\sin\psi+iat}$ を略してある．又

$$\left.\begin{aligned}
M_0&=\frac{A}{2}\sin\psi\left[k^2\beta^2+2k^2\alpha^2\cos^2\psi-2k\alpha\cos\psi\sqrt{l^2-k^2\alpha^2\sin^2\psi}\right],\\
N_0&=\frac{k^2\beta^2A}{2}\sin\psi,
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots(32)$$

---

(1) 25 頁參照.

(2) 或ひは夫に代る物理的考察，即ちレーレー波は山脈から左右に發散して行くので，收斂して來るのでは無いと云ふ條件からも云へる．

$$O_0=-\frac{A}{2}[k^2\beta^2\cos\psi+k^2\alpha^2\cos\psi(\cos^2\psi-\sin^2\psi)$$
$$-k\alpha(\cos^2\psi-\sin^2\psi)\sqrt{l^2-k^2\alpha^2\sin^2\psi}].$$
$$\Delta_0'=\left[\frac{d\Delta}{dt}\right]_{t=\tau_0}=-4\sqrt{l^2-k^2\alpha^2\sin^2\psi}\left[\frac{\rho^2k^4-4l^4}{2l^2}+\frac{4l^4\{2l^2-(\rho+1)k^2\}}{(2l^2-\rho k^2)^2}\right], \quad\cdots(33)$$
$$\sigma_0=i\sqrt{l^2-k^2},\quad \chi_0=i\sqrt{l^2-\rho k^2}. \quad\cdots\cdots(34)$$

(34) より σ_0, χ_0 は何れも純虚數で ϕ, E, F は z と共に指數的に減少する表面波の性質を持つ. 而して $e^{i\sqrt{l^2-k\alpha^2\sin^2\psi}x+ik\alpha y\sin\psi+iat}$ に比例する事から進行速度はレーレー波の速度 $\frac{a}{l}$ である事が分る. 又その方向は x 軸と φ なる角をなすとすれば,

$$\cos\varphi=\frac{\sqrt{l^2-k^2\alpha^2\sin^2\psi}}{l},\quad \sin\varphi=\frac{k\alpha\sin\psi}{l}\quad\cdots\cdots(35)$$

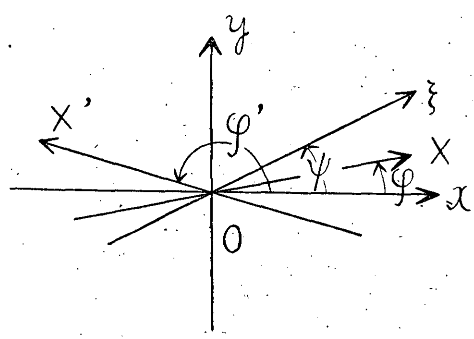
或ひはラブ波の速度を V_L, レーレー波の速度を V_R とすれば $\frac{k\alpha}{l}=\frac{V_R}{V_L}$ となるから

$$\frac{\sin\varphi}{V_R}=\frac{\sin\psi}{V_L}\quad\cdots\cdots(36)$$

即ち幾何光學の屈折法則と同じ法則で屈折して居る (第 2 圖).

このレーレー波の進行方向に平行及垂直に X, Y 軸を採つた新座標 (Y, Y, Z) の夫々の方向への變位成分を U, V, W- とすれば,

第 2 圖



$$X=x\cos\varphi+y\sin\varphi$$
$$=(x\sqrt{l^2-k^2\alpha^2\sin\psi}+k\alpha y\sin\psi)\frac{1}{l}$$

$$\left.\begin{aligned}U&=u\cos\varphi+v\sin\varphi,\\ V&=-u\sin\varphi+v\cos\varphi,\\ W&=w,\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(37)$$

但し

$$u=\frac{\partial\phi}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial z},\quad v=\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial E}{\partial z},\quad w=\frac{\partial\phi}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\partial E}{\partial y}\quad\cdots\cdots(38)$$

先づ $V=0$ なる事を證明する.

$$V=\left(-\frac{\partial\phi}{\partial x}\sin\varphi+\frac{\partial\phi}{\partial y}\cos\varphi\right)+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\sin\varphi+\frac{\partial E}{\partial z}\cos\varphi\right)$$
$$=(-il\sin\varphi\cos\varphi\cdot\phi+il\sin\varphi\cdot\cos\varphi\cdot\phi)+i\chi_0(F\sin\varphi+E\cos\varphi)$$
$$=i\chi_0\left(\frac{1}{il}\frac{\partial E}{\partial x}+\frac{1}{il}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}\right)=\frac{\chi_0}{l}\left(\frac{\partial E}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

(8) により

$$=-\frac{\chi_0}{l}\cdot\frac{\partial G}{\partial z}=0$$

故に波の進行方向の鉛直面内に振動して居る．次に U と W を求めると，

$$U=\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial\phi}{\partial y}\sin\varphi\right)+\left(-\frac{\partial F}{\partial z}\cos\varphi+\frac{\partial E}{\partial z}\sin\varphi\right)$$

$$=il\phi+i\chi_0\cdot(E\sin\varphi-F\cos\varphi),$$

$$W=i\sigma_0\phi-il(E\sin\varphi-F\cos\varphi),$$

しかるに (31) から，少し計算すると，

$$\phi=\frac{-2i}{\Delta'_0}[2l\chi_0(M_0\cos\varphi+O_0\sin\varphi)+(\rho k^2-2l^2)N_0],$$

$$E\sin\varphi-F\cos\varphi=\frac{2i}{\rho k^2\cdot\Delta_0'}[-\rho k^2(\rho k^2-2l^2)(M_0\cos\varphi+O_0\sin\varphi)+2\rho k^2l\sigma_0N_0]$$

と云ふ事が分り，又

$$AP=M_0\cos\varphi+O_0\sin\varphi,\quad AQ=N_0 \quad\cdots\cdots(38)$$

とおくと，(32) から

$$\left.\begin{aligned}P&=\frac{1}{2}[k^2\beta^2\sin(\psi-\varphi)+k\alpha\sin(2\psi-\varphi)\cdot\{k\alpha\cos\psi-l\cos\varphi\}],\\Q&=\frac{1}{2}k^2\beta^2\sin\psi,\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(39)$$

となるからも P も Q 實數で，

$$\left.\begin{aligned}U=&\frac{2l}{\Delta_0'}A[2l\chi_0P+(\rho k^2-2l^2)Q]e^{i\sigma_0z}\\&-\frac{2\chi_0}{\Delta_0'}A[-(\rho k^2-2l^2)P+2l\sigma_0Q]e^{i\chi_0z},\\W=&\frac{2\sigma_0}{\Delta_0'}A[2l\chi_0P+(\rho k^2-2l^2)Q]e^{i\sigma_0z}\\&+\frac{2l}{\Delta_0'}A[-(\rho k^2-2l^2)P+2l\sigma_0Q]e^{i\chi_0z}.\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(40)$$

となる．但し共通因子 $e^{ilx+iat}\int_{-\infty}^{\infty}f(\eta)e^{-i(\tau_0-k\alpha\cos\psi)\eta}d\eta$ は略してある．

又 (33) は

$$\Delta_0'=-4l\cos\varphi\cdot\left[\frac{\rho^2k^4-4l^4}{2l^2}+\frac{4l^4\{2l^2-(\rho+1)k^2\}}{(2l^2-\rho k^2)^2}\right]\quad\cdots\cdots(41)$$

之等の變位は 2 つの部分より成り P の入つたものは，山脈附近の殘留切線應力 (M 及び O) に依る分，Q の入つたものは法線應力 (N) に依る分で，各々獨立に $z=0$ で應力 O と云ふ自由

レーレー波の條件を滿足する事は容易に證明出來る．即ち山脈から遠く距つた平坦の地點では平面レーレー波として傳播して行く．次に $z=0$ での變位を求めると，

$$\left.\begin{aligned} U_0&=\frac{2(\sqrt{\rho}k)^3\sqrt{l^2-\rho k^2}}{\Delta_0'}A\left\{iP+\frac{\rho k^2-2l^2}{2l\sqrt{l^2-\rho k^2}}Q\right\}\cdot e^{ilx+iat}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}f(\eta)\,e^{-i(l\cos\varphi-k\alpha\cos\psi)\eta}\,d\eta,\\ W_0&=\frac{2i(\sqrt{\rho}\,k)^3\dfrac{\rho k^2-2l^2}{2l}}{\Delta_0'}A\left\{iP+\frac{\rho k^2-2l^2}{2l\sqrt{l^2-\rho k^2}}Q\right\}\cdot e^{ilx+iat}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}f(\eta)\,e^{-i(l\cos\varphi-k\alpha\cos\psi)\eta}\,d\eta.\end{aligned}\right\}\quad(42)$$

從つて振巾比及び粒子の軌道の性質も普通のレーレー波と變らない事が分る．

次に反射レーレー波を考へる．この時は波の存在區域が $x>0$ であるから (29) の τ に關する積分は積分路を $+i\infty$ に遠ざけて $\tau=-\sqrt{l^2-k^2\alpha^2\sin^2\psi}$ に於ける留數から求まる．從つて $e^{-i\sqrt{l^2-k^2\alpha^2\sin^2\psi}x+ik\alpha y\sin\psi+iat}$ と云ふ因數を持つ解が得られ，速度は矢張り a/l であるが，方向は x 軸と φ' の角をなすとすれば，

$$\cos\varphi'=\frac{-\sqrt{l^2-k^2\alpha^2\sin^2\psi}}{l},\qquad \sin\varphi'=\frac{k\alpha\sin\psi}{l}\quad\cdots\cdots\cdots(43)$$

となる．即ち屈折波の場合の φ との關係は

$$\varphi'=\pi-\varphi\quad\cdots\cdots\cdots(44)$$

と云ふ關係になる．（第 2 圖）前の X, Y 軸の代りに X', Y' 軸を採り U 等の代りに U' 等と書けば，$V'=0$ は前と同様で，(38), (39), (40), (41), (42) 等の諸式は總て φ の代りに φ' を用ひ，X の代りに X' を用ひれば，そのまゝ成立する．即ち

$$\left.\begin{aligned} U'&=-\frac{2l}{\Delta_0'}A\,[2l\chi_0P'+(\rho k^2-2l^2)\,Q']\,e^{i\sigma_0z}+\frac{2\chi_0}{\Delta_0'}A\,[-(\rho k^2-2l^2)\,P'+2l\sigma_0Q']\,e^{i\chi_0z},\\ W'&=-\frac{2\sigma_0}{\Delta_0'}A\,[2l\chi_0P'+(\rho k^2-2l^2)\,Q']\,e^{i\sigma_0z}-\frac{2l}{\Delta_0'}A\,[-(\rho k^2-2l^2)\,P'+2l\sigma_0Q']\,e^{i\chi_0z},\end{aligned}\right\}\cdots(45)$$

但し共通因子 $e^{ilX'+iat}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}f(\eta)\,e^{-i(l\cos\varphi'-k\alpha\cos\psi)\eta}\,d\eta$ は略してある．又

$$\left.\begin{aligned} P'&=\frac{1}{2}[k^2\beta^2\sin(\psi-\varphi')+k\alpha\sin(2\psi-\varphi')\cdot\{k\alpha\cos\psi-l\cos\varphi'\}],\\ Q'&=\frac{1}{2}k^2\beta^2\sin\psi=Q\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(46)$$

で σ_0, χ_0, Δ_0' 等は屈折波の場合と同じものでよろしい．P' は屈折波の φ を使つて

$$P'=\frac{1}{2}[-k^2\beta^2\sin(\psi+\varphi)-k\alpha\sin(2\psi+\varphi)\cdot\{k\alpha\cos\psi+l\cos\varphi\}]\cdots\cdots\cdots(47)$$

とも書ける．

表面の變位は

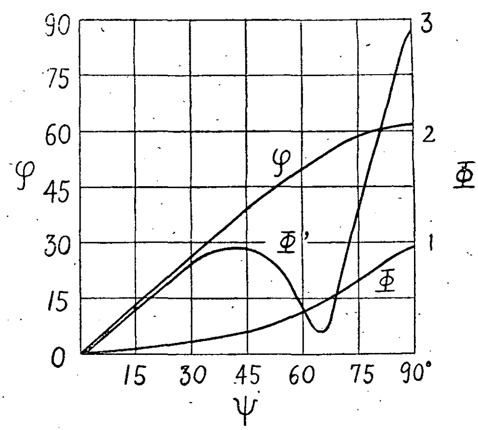
$$U_0'=-\frac{2(\sqrt{\rho}k)^3\cdot\sqrt{l^2-\rho k^2}}{\Delta_0'}A\left\{iP'+\frac{\rho k^2-2l^2}{2l\sqrt{l^2-\rho k^2}}Q'\right\}\cdot e^{ilX'+iat}\cdot\times\int_{-\infty}^{\infty}f(\eta)\,e^{i(l\cos\varphi+k\alpha\cos\psi)\eta}\,d\eta,$$

$$W_0'=-\frac{2i(\sqrt{(\rho k)})^3\cdot\dfrac{\rho k^2-2l^2}{2l}}{\Delta_0'}A\left\{iP'+\frac{\rho k^2-2l^2}{2l\sqrt{l^2-\rho k^2}}Q'\right\}\cdot e^{ilX'+iat}\cdot\times\int_{-\infty}^{\infty}f(\eta)\,e^{i(l\cos\varphi+k\cos\psi)\eta}\,d\eta. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(48)$$

之も平面自由レーレー波の特性を備へて居る.

勿論ラブ波が傳はる爲には表面に異層が存在するか，さもなければ物性が深さと共に連續的に變化して居る必要があり，その様な條件の下にはレーレー波の性質も均質の場合とは異る筈であり，さう云ふ場合でも必ずしも取扱へないわけでは無いが，結局自由表面の境界條件で事柄を決定しようと云ふ方針であるから性質的には大した變りは無い筈である.

第 3 圖



一例としてポアソン比が 1/4，從つて S 波の速度が，1.088 V_R の場合に，この値が更に 0.96 V_L に等しいものとして，入射角 ψ と屈折角或ひは反射角 φ との關係を第 3 圖に示した. 又地形が

$$z=\frac{H}{m-n}(me^{-nx}-ne^{-mx})\quad(x>0)$$
$$=\frac{H}{m-n}(me^{nx}-ne^{mx})\quad(x<0)\qquad(m>n)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(49)$$

の場合[(1)]に $m=3$，$n=2$ として表面の變位を計算すると，

屈折波に就て

$$U_0=-1.09\,A\frac{H}{L}\cdot\Phi\,e^{ilX+iat},\quad W_0=1.60\,A\frac{H}{L}\,i\Phi\,e^{ilX+iat}$$

反射波に就て

$$U_0'=1.09\,A\frac{H}{L}\cdot\Phi'\,e^{ilX'+iat},\quad W_0'=-1.60\,A\frac{H}{L}\,i\Phi' e^{ilX'+iat}\quad\cdots\cdots(50)$$

(1) 筆者，前出

となる．但し L は振動數 a なる S 波の波長即ち $\dfrac{2\pi}{\sqrt{\rho k}}$ で Φ, Φ' は ψ と共に變る複素數である．第 3 圖には Φ 及び Φ' の絕對値も載せて置いた．この樣な値は前に述べた樣に大して意味のあるものでは無いが，一般には反射波の方が屈折波より勢力大で．又屈折波はラブ波の入射角が大きくなる程勢力が增大するが，反射波は入射角度 65° 附近で一時勢力の著しく減る所がある．

勿論この逆にレーレー波より誘發されるラブ波と云ふ樣なものも考へられる筈であるが，この場合は誘發されたラブ波を確める爲に表面層（或ひは不均質性）を置く事が必須となるから簡單には濟まない．

§5. 一つの注意

昭和 14 年 1 月 25 日南米チリーに强震が起つた際，本邦各地の觀測所が明瞭な表面波が觀測せられ，之に就いて木澤綏氏が詳細に硏究された結果[1]に依ると，この位相は地表粒子の運動軌道が殆ど純粹にレーレー波としての性質を具備してゐる事が確められる．即ち粒子の振動は大體波線を含む鉛直面內に偏よつて居り，且つ波の進む方向に前進する車輪とは逆むきの廻轉をする．然るにこの波の走時は Macelwane 氏の敎科書[2]の M 相（レーレー波）の走時より 10 分も早く，大體 L 相（ラブ波）の出現が期待される時刻に現はれて居るのである．この事實は種々の解釋の仕方があるかも知れないが，地表附近の水平不均質によるラブ波からレーレー波への轉化と云ふ，只今の理論からも或る程度の暗示は與へられるように思ふ．太平洋の大部分をラブ波として進行して來て日本近海でその一部がレーレー波に轉向した場合には上記の樣なことが起り得るであらう．勿論此回の數理論では誘發されるレーレー波を小さい擾亂と假定してあるから，日本では結局强いラブ波（第一次波）が觀測されると云ふ結論しか得られないが，入射ラブ波が衰へ，稍ゝ遠方では減衰性の弱い純レーレー波だけが卓越するような地表のモデルを考へる事は思考の上だけでは左程困難で無い．此等の點については將來尙ほ一層の吟味を要する事は云ふ迄も無いが，一つの可能性として指摘して置き度いと思ふ[3]．

§6. 結　論

無限に長い緩やかな山脈（或ひは谷地）のある地表をラブ型の波が斜めに橫切るとき，山脈の影響に依る擾亂彈性振動を理論的に取扱ひ，特にその際誘發されるレーレー波に就て詳しく吟味して

---

(1) 木澤綏，昭和 14 年 1 月 25 日チリー大地震の調査，驗震時報，第 11 卷．第 4 號．

(2) J. B. Macelwane & F. W. Sohon ; Introduction to Theoretical Seismology, (1936), p. 245 及び表 18, 19 參照．

(3) 尙ほ P. Caloi はレーレー波の外に之と類似の特性を持ちもつと速度の大きい表面波が 2 種存在し得るとなし之を C, SL 等と呼んで實例を擧げて主張して居る．(P. Caloi, Pub. Bur. Centr. Séism. Intern., A 15 (1939)．然し理論的に疑問多く，又根據の一つとして居る Gutenberg の G 波との關係等も不得要領で遽かには信用出來ない．

次の結果を得た.

(1) 山脈より先方には屈折レーレー波，手前側には反射レーレー波が出る.

(2) 入射ラブ波と山脈に垂直な水平線のなす角即ち入射角を ψ，レーレー波の反射角及び屈折角（兩者は等しい）を φ，ラブ波及びレーレー波の進行速度を夫々 V_L, V_R とする，

$$\frac{\sin\psi}{V_L}=\frac{\sin\varphi}{V_R}$$

と云ふ幾何光學的の反射屈折法則が成立つ.

(3) 屈折波，反射波の振幅は $\psi=0$ の時に 0 で ψ が大きく成る程增大するが反射波は途中或る入射角の附近で，一時著しく減る所がある，

(4) ラブ波の入射角が決ればレーレー波の振幅は入射ラブ波の振幅及び山脈の高さに比例する.

(5) 反射波の振幅は概して屈折波の夫より大きい.

終りに臨み常に御鞭撻を頂く本多博士地震課の諸氏及び畏兄廣野理學士に深甚の謝意を表し，又チリー地震に就き種々御敎示下さつた木澤綏氏及び計算，製圖に御助力を頂いた鈴木，高見兩孃に厚く御禮申上げる.

（昭和 16 年 7 月，於 中央氣象臺）

訂正. 30 頁の第 1 圖及びこの論文の第 1 報以下及び次頁の論文の相當する圖に於ける cut は何れも誤りであつて，4 つの分枝點と ∞ 點を結ぶ cut でなければならない. 從つて第 1 報の結論には本質的の影響を受けるが，その他ではこれ等の分枝點に關した積分を行つてゐないから結論に變りはない. 尙詳しい訂正は近くこの論文の續報中に述べる積りである.