

# 地形が表面振動に及ぼす影響

(附) レーレ波の特性式  $\Delta(\tau)$  の値

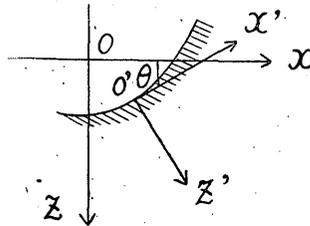
本 間 正 作

1. 緒 言 地表の複雑な構造に依り種々の弾性振動が固有周期を持ち、爲に地表で観測される地震動が擾亂を受ける事に就ては理論的研究も寡く無いが、多くは物性が鉛直方向に變つてゐる場合、例へば表面層のある場合等である<sup>(1)</sup>。然るに水平方向の状況も決して一様では無く、種々の大きさの地塊より成ると言はれてゐる<sup>(2)</sup>。更に地表の凹凸も最も顯著な不規則性の例である。茲には取扱ひが割合楽な理由で、物性は一様であるが表面に凹凸ある爲に生ずる擾亂を最も簡単な二次元問題として考へる。

2. 解 法 座標軸として水平に  $x$  及び  $y$  軸、鉛直下方に  $z$  軸を採り、平均地表面を  $z=0$ 、地形曲線の方程式を  $z=f(x)$  とし、斯様な地形が  $y$  軸に平行に無限に續いて居るものとす。入射波は平面波で射線は  $xz$  面内に在る。故に P 波及び SV 波に於ては變位は  $xz$  面内に振動し、SH 波では  $y$  方向に振動する。

第 1 圖

	$x$	$y$	$z$
$x'$	$l_1$	$m_1$	$n_1$
$y'$	$l_2$	$m_2$	$n_2$
$z'$	$l_3$	$m_3$	$n_3$



表面上の一點  $O'$  にて表面曲線の切線及び法線方向を  $x', z'$  とし (第 1 圖),  $(x, y, z)$  系と  $(x', y', z')$  系の方向餘弦の關係を上の方の如く表はすと、各系に關する弾性應力の表現の間には次の如き關係が在る。<sup>(3)</sup>

- (1) 例へば地震研究所彙報に妹澤博士、西村(源)博士等の數多くの御研究がある。
- (2) 宮部直巳；地殻變動の最近の研究 (岩波書店)
- (3) A. E. H. Love; *Mathematical Theory of Elasticity* (1934), p. 80

$$\begin{aligned}
X_z' &= l_1 l_3 X_x + m_1 m_3 Y_y + n_1 n_3 Z_z + (m_1 l_3 + n_3 l_1) Z_x \\
&\quad + (l_1 m_3 + l_3 m_1) Y_x + (m_1 n_3 + m_3 n_1) Y_z, \\
Z_z' &= l_3^2 X_x + m_3^2 Y_y + n_3^2 Z_z + 2 n_3 l_3 Z_x + 2 l_3 m_3 Y_x + 2 m_3 n_3 Y_z, \\
Y_z' &= l_2 l_3 X_x + m_2 m_3 Y_y + n_2 n_3 Z_z + (n_2 l_3 + n_3 l_2) Z_x \\
&\quad + (l_2 m_3 + l_3 m_2) Y_x + (m_2 n_3 + m_3 n_2) Y_z.
\end{aligned}$$

只今の場合は

$$\begin{aligned}
l_1 &= \frac{1}{\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}}, & n_1 &= \frac{f'(x)}{\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}}, & l_3 &= \frac{-f'(x)}{\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}}, \\
n_3 &= \frac{1}{\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}}, & m_2 &= 1, & l_2 &= n_2 = m_1 = m_3 = 0.
\end{aligned}$$

故に、簡単の爲  $X_z'$  等を  $X_v$  等と書いて、

$$X_v = \frac{1}{1+\{f'(x)\}^2} [(Z_z - X_x) \cdot f'(x) + Z_x \cdot (1 - \{f'(x)\}^2)],$$

$$Z_v = \frac{1}{1+\{f'(x)\}^2} [Z_z + X_x \cdot \{f'(x)\}^2 - 2Z_x \cdot f'(x)],$$

$$Y_v = \frac{1}{\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}} [Y_z - Y_x \cdot f'(x)]$$

曲線  $z=f(x)$  は到る處甚だ緩かて、 $|f'(x)| \ll 1$  と考へられる爲  $\{f'(x)\}^2$  は恆に問題にならないと假定する。然る時は  $\{f'(x)\}^2$  を省略して、

$$\left. \begin{aligned}
X_v &= (Z_z - X_x) f'(x) + Z_x, \\
Z_v &= Z_z - 2Z_x f'(x), \\
Y_v &= Y_z - Y_x f'(x)
\end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

更に凹凸の振幅が入射波の波長に比し甚だ小さい爲、頂上と谷底で波動の位相が殆ど違はないと考へられるものと假定すれば、

$$[X_x]_{z=f} = [X_x]_{z=0} + f(x) \cdot \left[ \frac{\partial X_x}{\partial z} \right]_{z=0},$$

$$[X_z]_{z=f} = [X_z]_{z=0} + f(x) \cdot \left[ \frac{\partial X_z}{\partial z} \right]_{z=0},$$

$$[Z_z]_{z=f} = [Z_z]_{z=0} + f(x) \cdot \left[ \frac{\partial Z_z}{\partial z} \right]_{z=0},$$

(1) 鉛直は入射した時位相差最大となる。

$$[Y_x]_{z=f} = [Y_x]_{z=0} + f(x) \cdot \left[ \frac{\partial Y_x}{\partial z} \right]_{z=0}$$

$$[Z_y]_{z=f} = [Z_y]_{z=0} + f(x) \cdot \left[ \frac{\partial Y_z}{\partial z} \right]_{z=0}$$

之を(1)の右邊に代入すると、高次の微小項は省略して

$$\left. \begin{aligned} X_v &= (Z_x - X_x) f'(x) + X_x + f \frac{\partial Z_x}{\partial z}, \\ Z_v &= Z_z + f(x) \frac{\partial Z_z}{\partial z} - 2Z_x \cdot f'(x), \\ Y_v &= Z_y + f(x) \frac{\partial Z_y}{\partial z} - Y_y f'(x) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

但し  $[\dots]_{z=0}$  は分つてのものと略した。

扱て吾々の方針は先づ凹凸なき平面の地表に於ける反射の解を第一近似解とする。之に對して  $z=0$  で  $X_z, Z_z, Y_z$  は 0 となるが  $X_v, Z_v, Y_v$  は 0 とならず一次の微小量が残る。この残留應力により強制される振動は一次の微小量で、之が第一近似解に對する補正項となる。残留應力は(2)で  $X_z = Z_z = Y_z = 0$  と置けば、

$$X_v = -X_x \cdot f'(x) + \frac{\partial Z_x}{\partial z} \cdot f(x) \dots \dots \dots (3)$$

$$Z_v = \frac{\partial Z_z}{\partial z} \cdot f(x) \dots \dots \dots (4)$$

$$Y_v = -Y_x \cdot f'(x) + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \cdot f(x) \dots \dots \dots (5)$$

で、之は  $z=0$  面に於て之に垂直或は水平に働く應力と考へても、その誤差は二次の微小量である。同様にして、得られた補正解の  $z=f(x)$  に於ける値は  $z=0$  に於ける値と考へて差支へ無い。故に問題は半無限彈性體の表面に加へられる振動性應力に依る振動問題に歸着し、應力の配分が正弦形に規則正しく並ぶ時、振動周期に應じて實體波が発生したり、表面に集中する振動が起つたり、又共鳴現象が起る事等は既に妹澤博士に依り研究された。地形が規則正しい配列の時は、只今の問題に對しても類似の現象が起る。

一般に  $f(x)$  は不規則な形を採るが、之はフーリエの積分定理により、

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) \cos\{p(x-\eta)\} d\eta \dots\dots\dots (6),$$

と書けるから、(3), (4), (5) の  $f(x)$  の所に  $f(\eta) \cos\{p(x-\eta)\}$  を入れた場合の解式に  $\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} d\eta$  なる演算を行へばよい。従つて差當り

$$z = f(x) = \zeta \cdot \cos\{p(x-\eta)\} \dots\dots\dots (7)$$

なる波状地形を考へる。(7) が實際の地形である時は前に述べた假定により  $|\zeta p| \ll 1$  でなければならぬが、(6) の場合に一般化する過程に用ふるならばその必要はない。(7) を (3), (4), (5) に代入すると、

$$X_v = \zeta p X_z \sin\{p(x-\eta)\} + \zeta \frac{\partial Z_x}{\partial z} \cos\{p(x-\eta)\}, \dots\dots\dots (8)$$

$$Z_v = \zeta \frac{\partial Z_z}{\partial z} \cos\{p(x-\eta)\} \dots\dots\dots (9)$$

$$Y_v = \zeta p Y_x \sin\{p(x-\eta)\} + \zeta \frac{\partial Y_z}{\partial z} \cos\{p(x-\eta)\}, \dots\dots\dots (10)$$

### 3. 表面に加へられる應力に依る擾亂

既に妹澤博士の解があるが只今の問題に都合よい形に就て略述する。

與へる表面應力が  $x, z$  面内に在り、次の如き形の場合

$$X_v = \mu M e^{i\tau x + iat}, \quad Z_v = \mu N e^{i\tau x + iat} \dots\dots\dots (11)$$

之に應ずる解の内、 $z$  の正方向に進行するか、 $z$  と共に減衰する解を採るべきで、その變位ポテンシアル  $\phi, \psi$  を計算すると (12) の如くなる。但し

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \left(\frac{a}{k}\right)^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{a}{k}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right),$$

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \frac{1}{\Delta(\tau)} \left\{ -2\tau \cdot \chi(\tau) M + (2\tau^2 - \rho k^2) N \right\} \cdot e^{i\sigma(\tau)Z + i\tau x + iat} \\ \psi &= \frac{1}{\Delta(\tau)} \left\{ (2\tau^2 - \rho k^2) M + 2\tau \cdot \sigma(\tau) N \right\} \cdot e^{i\sigma(\tau)X + i\tau x + iat} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

茲に  $\Delta(\tau) = (2\tau^2 - \rho k^2)^2 + 4\tau^2 \sigma(\tau) \cdot \chi(\tau) \dots\dots\dots (13)$

$$\sigma(\tau) = i\sqrt{\tau^2 - k^2}, \quad \chi(\tau) = i\sqrt{\tau^2 - \rho k^2}, \dots\dots\dots (14)$$

$$\rho = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \dots \dots \dots (15)$$

$\frac{2\pi}{k}$  は振動数  $a$  なる P 波の波長である。

(14) の意味は、例へば  $\sigma$  に就て云へば、 $|\tau| > k$  の時は  $i\sqrt{\tau^2 - k^2}$ 、 $|\tau| < k$  の時は  $-\sqrt{\tau^2 - k^2}$  を表はすものとする。従つて表面應力配分の間隔が廣く  $|\tau| < k$  であると擾亂は  $\phi, \psi$  共實體波の形を探り、間隔狭く  $|\tau| > \sqrt{\rho}k$  では共に表面振動となり、 $\sqrt{\rho}k > |\tau| > k$  の時は  $\phi$  は表面振動、 $\psi$  は實體波の形を探る。又  $\Delta(\tau) = 0$  に相當する  $\frac{2\pi}{|\tau|}$  は振動数  $a$  なる  $\nu$ - $\nu$ -波の波長  $\frac{2\pi}{l}$  と一致し、斯様な間隔で表面應力が配分されると共鳴を起して擾亂が發達する。この場合に  $\phi$  も  $\psi$  も表面振動の型式を探る事は  $\nu$ - $\nu$ -波の理論の教へる通りである。 $z=0$  に於ける變位は

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{i}{\Delta(\tau)} \left[ -\rho k^2 \chi(\tau) M + \tau \{ 2\sigma(\tau) \cdot \chi(\sigma) + 2\tau^2 - \rho k^2 \} N \right] e^{i\tau x + iat}, \\ w &= \frac{i}{\Delta(\tau)} \left[ -\tau \{ 2\sigma(\tau) \cdot \chi(\tau) + 2\tau^2 - \rho k^2 \} M - \rho k^2 \cdot \sigma(\tau) N \right] e^{i\tau x + iat}. \end{aligned} \right\} (16)$$

次に  $xz$  面に垂直な表面應力  $Y_v$  が與へられた時は

$$Y_v = \mu G e^{i\tau x + iat} \dots \dots \dots (17)$$

として

$$v = -\frac{iG}{\chi(\tau)} e^{i\chi(\tau)z + i\tau x + iat} \dots \dots \dots (18)$$

但し  $\chi(\tau)$  の意味は (14) と同一である。この場合にも  $\chi(\tau) = 0$  附近で  $v$  は非常に發達する。

#### 4. P 波或ひは SV 波の入射

P 波或ひは SV 波が平面調和波で入射する場合を一度に取扱つて見る。入射角及び反射角を P 波及 S 波について夫々  $e$  及び  $f$ 、振幅は入射波につき夫々  $A, B$ 、反射波につき夫々  $C, D$  とすると、擾亂を受けない P 波及 S 波の變位ポテンシアルは

$$\left. \begin{aligned} \phi &= (A e^{ikz \cos e} + C e^{-ikz \cos e}) \cdot e^{ikx \sin e + iat}, \\ \psi &= (B e^{i\sqrt{\rho}kz \cos f} + D e^{-i\sqrt{\rho}kz \cos f}) \cdot e^{ikx \sin e + iat}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (19)$$

$$\sin e = \sqrt{\rho} \cdot \sin f, \quad \cos e = -i\sqrt{\rho \sin^2 f - 1}, \dots \dots \dots (20)$$

但し  $\frac{2\pi}{k}$ ,  $\frac{2\pi}{\sqrt{\rho k}}$  は夫々 P 波及び S 波の波長である。S 波入射の場合 (従つて  $A=0$ )、 $f$  が餘り  $\frac{\pi}{2}$  に近いと  $e$  は實際の角度を表はさないが、 $\sin e$ ,  $\cos e$  に (20) の様な定義をして置くといつても  $z \rightarrow \infty$  で無限大とならぬ解に出来る。  $e$  が實際の角度をあらはさぬ場合には、反射 P 波が表面振動の形を探るから簡単に表面振動の場合と呼んで區別しよう。(19) による變位は

$$\left. \begin{aligned} u &= i\sqrt{\rho}k \{ (Ae^{ikz\cos^2 e} + Ce^{-ikz\cos^2 e}) \sin f \\ &\quad + (Be^{i\sqrt{\rho}kz\cos f} - De^{-i\sqrt{\rho}kz\cos f}) \cos f \} \cdot e^{ikz\sin e + iat}, \\ w &= ik \{ (Ae^{ikz\cos^2 e} - Ce^{-ikz\cos^2 e}) \cos e \\ &\quad - (Be^{i\sqrt{\rho}kz\cos f} + De^{-i\sqrt{\rho}kz\cos f}) \sin e \} \cdot e^{ikz\sin e + iat} \end{aligned} \right\} \dots\dots (21)$$

$C, D$  は擾亂を無視した境界条件で定まり

$$\left. \begin{aligned} C &= -\frac{(\rho \cos^2 2f - \sin 2e \cdot \sin 2f) A - \rho \sin 4f \cdot B}{\rho \cos^2 2f + \sin 2e \cdot \sin 2f}, \\ D &= -\frac{2 \sin 2e \cdot \cos 2f \cdot A + (\rho \cos^2 2f - \sin 2e \sin 2f) B}{\rho \cos^2 2f + \sin 2e \cdot \sin 2f} \end{aligned} \right\} \dots\dots (22)$$

次に表面の残留應力を (8), (9) に依り計算すると、

$$\left. \begin{aligned} \frac{X_\nu}{\mu} &= i\zeta \{ (-pP + kQ) e^{i2p(x-\eta)} + (pP + kQ) e^{-i2p(x-\eta)} \} e^{ikz\sin e + iat} \\ \frac{Z_\nu}{\mu} &= i\zeta kR (e^{i2p(x-\eta)} + e^{-i2p(x-\eta)}) \cdot e^{ikz\sin e + iat} \end{aligned} \right\} (23)$$

$$\left. \begin{aligned} P &= -\frac{k^2}{2} \{ (\rho - 2 \cos^2 e) (A + C) + \rho \sin 2f (B - D) \} \\ Q &= -\frac{\sqrt{\rho} k^2}{2} \{ 2 \sin f \cdot \cos^2 e (A + C) + \rho \cos 2f \cdot \cos f (B - D) \} \\ R &= -\frac{\rho k^2}{2} \{ \cos e \cdot \cos 2f (A - C) - 2 \sin e \cdot \cos^2 f (B + D) \} \end{aligned} \right\} (24)$$

前節の方法で擾亂の解を求めると、

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \phi_+ + \phi_-, \quad \psi = \psi_+ + \psi_- \dots\dots\dots (25) \\ \phi_\pm &= \frac{i\zeta}{\Delta(\pm p + k \sin e)} \left[ -2(\pm p + k \sin e) \cdot \chi(\pm p + k \sin e) \cdot (\mp pP + kQ) \right. \\ &\quad \left. + \{ 2(\pm p + k \sin e)^2 - \rho k^2 \} \cdot kR \right] \cdot e^{i\sigma(\pm p + k \sin e) \cdot z + i(\pm p + k \sin e) \cdot (x - \eta) + ik\eta \sin e + iat} \\ \psi_\pm &= \frac{i\zeta}{\Delta(\pm p + k \sin e)} \left[ \{ 2(\pm p + k \sin e)^2 - \rho k^2 \} (\mp pP + kQ) + 2(\pm p \right. \\ &\quad \left. + k \sin e) \cdot \sigma(\pm p + k \sin e) \cdot kR \right] \cdot e^{i(\pm p + k \sin e) \cdot z + i(\pm p + k \sin e) \cdot (x - \eta) + ik\eta \sin e + iat} \end{aligned} \right\} (26)$$

但し複號は上下對應する。

之等が實體波の時の射出角は P 波は  $\text{tg}^{-1} \frac{\pm p + k \sin e}{\sqrt{k^2 - (\pm p + k \sin e)^2}}$ , S 波は  $\text{tg}^{-1} \frac{\pm p + k \sin e}{\sqrt{\rho k^2 - (\pm p + k \sin e)^2}}$  となる。色々の  $p$  に對する射出角は下の如くなる。但し假に  $\sin e < 1 - \sin e$  の場合を記した。

$p$	0	$k \sin e$	$k(1 - \sin e)$	$\sqrt{\rho} k(1 - \sin f)$	$k(1 + \sin e)$	$\sqrt{\rho} k(1 + k \sin f)$	$\infty$
$\phi_+$	$e$	— (増大) —	$\rightarrow \frac{\pi}{2}$	..... (表面振動) .....	$\rightarrow$		
$\psi_+$	$f$	— ( " ) —	$\rightarrow \frac{\pi}{2}$	..... (表面振動) .....	$\rightarrow$		
$\phi_-$	$e$	— (減小) $\rightarrow 0$ — (減小)	$\rightarrow -\frac{\pi}{2}$	..... (表面振動) .....	$\rightarrow$		
$\psi_-$	$f$	— ( " ) $\rightarrow 0$ — ( " )	$\rightarrow -\frac{\pi}{2}$	..... (表面振動) .....	$\rightarrow$		

従つて、 $p > k \sin e$  になると (—) 波は入射波の進んで來る方向に戻つて行く事になる。次に擾亂が實體波の形を採る場合のエネルギーを考へるに之は振幅の 2 乗の量である爲、只今の議論では無視されて、問題とならないが、2 次の項も考慮する様な場合には、之が波動勢力の散亂に與る様になり、特に表面波勢力逸散に關して重要である。但し斯様な事情の下でも地形の波長が短かくて  $p > \sqrt{\rho} k(1 + \sin f)$  となると、總て表面振動の形を採るから、エネルギーの散亂は起らず、反射波は完全な平面より反射されたものと變りない事になる<sup>(1)</sup>。共鳴現象の起る  $p$  は、 $\frac{2\pi}{|p \pm k \sin e|}$  が振動數  $a$  なるレーレー波の波長  $\frac{2\pi}{l}$  と一致する時であるから、

$$l > k \sin e \text{ の時 } \quad l = p + k \sin e \quad \text{及び} \quad l = p - k \sin e,$$

$$l < k \sin e \text{ の時 } \quad l = k \sin e - p \quad \text{及び} \quad l = p - k \sin e$$

より出る  $p$  で與へられ、従つて  $e$  (或ひは  $f$ ) = 0 ならざる限り、必ず 2 個の  $p$  が確定する。

次に (16) に依り表面の變位を求め、之を (6) に依り一般化すると若干の計算の後、

$$u = \frac{k}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Delta(\tau)} \left[ -\rho k(\tau - k \sin e) \cdot \chi(\tau) \cdot P + \rho k^2 \cdot \chi(\tau) \cdot Q \right]$$

(1) 之等に就て後の機會に正確に論議し度いと思ふ。音波に就て同種の問題は Lord Rayleigh が取扱つた。(Theory of Sound, Vol, II., p. 89)

$$\left. \begin{aligned}
 & -\tau\{2\sigma(\tau)\cdot\chi(\tau)+2\tau^2-\rho k^2\}R \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) e^{i\tau(x-\eta)+ik\eta\sin e+i\alpha t} d\eta, \\
 w = & \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Delta(\tau)} \left[ -\tau(\tau-k\sin e)\cdot\{2\sigma(\tau)\cdot\chi(\tau)+2\tau^2 \right. \\
 & \left. +\rho k^2\}P+k\tau\{2\sigma(\tau)\cdot\chi(\tau)+2\tau^2-\rho k^2\}Q \right. \\
 & \left. +\rho k^3\sigma(\tau)R \right] d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) e^{i\tau(x-\eta)+ik\eta\sin e+i\alpha t} d\eta
 \end{aligned} \right\} (27)$$

但し(26)を導く爲に使つた地形曲線は(7)の様な實函數で與へられてあるから、入射波として(19)の實數部を擇ぶなら、夫に應ずる(27)も矢張り實數部を採れば宜いのである。表面の一點の運動は橢圓軌道を描く。

### 5. SH波の入射

擾亂を受けない入射波と反射波の組合せは、

$$\begin{aligned}
 v &= e^{i\sqrt{\rho}k(z\cos f+x\sin f)+i\alpha t} + e^{-i\sqrt{\rho}k(z\cos f-x\sin f)+i\alpha t} \\
 &= 2\cos\{\sqrt{\rho}kz\cos f\}\cdot e^{i\sqrt{\rho}kx\sin f+i\alpha t} \dots\dots\dots (28)
 \end{aligned}$$

(10) に依り表面の殘留應力を計算すると、

$$\begin{aligned}
 \frac{Y_v}{\mu} &= \zeta \left\{ (\sqrt{\rho}pk\sin f - \rho k^2 \cos^2 f) e^{i(\sqrt{\rho}k\sin f + p)(x-\eta) + i\sqrt{\rho}k\eta\sin f + i\alpha t} \right. \\
 & \left. + (-\sqrt{\rho}pk\sin f - \rho k^2 \cos^2 f) e^{i(\sqrt{\rho}k\sin f - p)(x-\eta) + i\sqrt{\rho}k\eta\sin f + i\alpha t} \right\} \dots (29)
 \end{aligned}$$

故に(18)により

$$v = v_+ + v_- \dots\dots\dots (30)$$

$$\begin{aligned}
 v_{\pm} &= -\frac{i\zeta (\pm\sqrt{\rho}pk\sin f - \rho k^2 \cos^2 f)}{\chi(\pm p + \sqrt{\rho}k\sin f)} \\
 & \bullet e^{i\chi(\pm p + \sqrt{\rho}k\sin f)\cdot z + (\pm p + \sqrt{\rho}k\sin f)(x-\eta) + i\sqrt{\rho}k\eta\sin f + i\alpha t} \dots\dots\dots (31)
 \end{aligned}$$

地形曲線を一般化すると表面の變位は、

$$v = -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\rho}k\tau\sin f - \rho k^2}{\chi(\tau)} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) e^{i\tau(x-\eta) + i\sqrt{\rho}k\eta\sin f + i\alpha t} d\eta \dots (32)$$

となる事が分る。波狀地形の場合には  $|\pm p + \sqrt{\rho}k\sin f| = \sqrt{\rho}k$  に近づくと擾亂が發達する。

### 6. レーレー波の傳播及び一例

表面波が凹凸ある表面を傳はる時受ける擾亂も、波の減衰度が地形の振幅に對し緩かであれば、前述と同様な方法で調べ得る。此處ではレーレー波の場合

を考へる。

平面レ-レ-波の解は良く知れて居る通り

$$\left. \begin{aligned} u &= il\{-l^2 + \beta^2\} e^{-\alpha z} + 2\alpha\beta e^{-\beta z} \cdot e^{i(lx + at)}, \\ w &= \alpha\{(l^2 + \beta^2) e^{-\alpha z} - 2l^2 e^{-\beta z}\} \cdot e^{i(lx + at)}, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

$$\text{茲に } l^2 - \alpha^2 = k^2, \quad l^2 - \beta^2 = \rho k^2, \quad (2l^2 - \rho k^2)^2 - 4l^2 \sqrt{(l^2 - k^2)(l^2 - \rho k^2)} = 0 \quad (34)$$

次に (8), (9) に従つて表面の應力を計算すると,

$$\left. \begin{aligned} \frac{X_v}{\mu} &= i\zeta \{ [pP + (\alpha - \beta)Q] e^{ip(x-\eta)} + [-pP + (\alpha - \beta)Q] e^{-ip(x-\eta)} \} e^{ilx + iat} \\ \frac{Z_v}{\mu} &= \zeta(\alpha - \beta)R \{ e^{ip(x-\eta)} + e^{-ip(x-\eta)} \} e^{ilx + iat} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (35)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{但し } P &= -\frac{1}{2} \{ (\rho k^2 + 2\alpha^2)(\rho k^2 + 2\beta^2) - 4\alpha\beta l^2 \}, \\ Q &= -\alpha l(l^2 + \beta^2) \\ R &= \frac{1}{2} (2l^2 - \rho k^2)^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36)$$

(35) を (23) に較べると  $k \sin e \rightarrow l$ ,  $k \rightarrow \alpha - \beta$ ,  $P \rightarrow -P$ ,  $R \rightarrow -iR$  と置き代へたものになるから, 容易に擾亂の解が求まり,

$$\phi = \phi_+ + \phi_-, \quad \psi = \psi_+ + \psi_- \dots\dots\dots (37)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_{\pm} &= \frac{i\zeta}{\Delta(\pm p + l)} \left[ -2(\pm p + l) \cdot \chi(\pm p + l) \cdot \{ \pm pP + (\alpha - \beta)Q \} \right. \\ &\quad \left. - i\{ 2(\pm p + l)^2 - \rho k^2 \} (\alpha - \beta)R \right] \cdot e^{i\alpha(\pm p + l)z + i(\pm p + l)(x-\eta) + il\eta + iat} \\ \psi_{\pm} &= \frac{i\zeta}{\Delta(\pm p + l)} \left[ \{ 2(\pm p + l)^2 - \rho k^2 \} \cdot \{ \pm pP + (\alpha - \beta)Q \} \right. \\ &\quad \left. - 2i(\pm p + l) \cdot \sigma(\pm p + l) \cdot (\alpha - \beta)R \right] e^{i\chi(\pm p + l)z + i(\pm p + l)(x-\eta) + il\eta + iat} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

之より共鳴を起す條件は  $p = 2l$  の場合に限る。即ちレ-レ-波が, その波長の半分の波長の波状地形に沿ふて進むと擾亂が發達する。又 (+) の波は必ず  $\phi, \psi$  共表面振動となり, 實體波の形を採る場合は (-) 波の方にのみ有り得て, その射出角は P 波, S 波に對し夫々

$$\text{tg}^{-1} \frac{l-p}{\sqrt{k^2 - (l-p)^2}}, \quad \text{tg}^{-1} \frac{l-p}{\sqrt{\rho k^2 - (l-p)^2}} \quad \text{となる。}$$

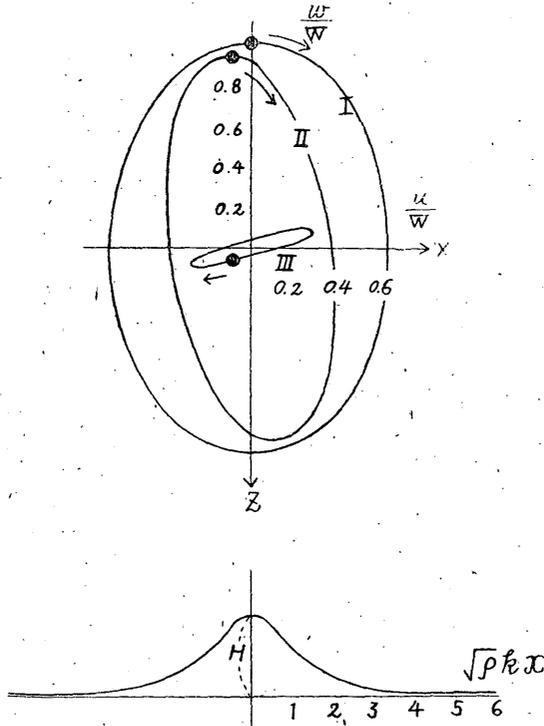
次に地形を一般化して表面の變位を作ると,

$$\left. \begin{aligned}
 u &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Delta(\tau)} \left[ \rho k^2 (\tau - l) \cdot \chi(\tau) P + \rho k^2 (\alpha - \beta) \chi(\tau) \cdot Q + i(\alpha - \beta) \right. \\
 &\quad \left. \tau \{ 2\sigma(\tau) \cdot \chi(\tau) + 2\tau^2 - \rho k^2 \} R \right] d\tau \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) e^{i\tau(x-\eta) + i l \eta + i a \tau} d\eta, \\
 w &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Delta(\tau)} \left[ \tau(\tau - l) \{ 2\sigma(\tau) \cdot \chi(\tau) + 2\tau^2 - \rho k^2 \} P + (\alpha - \beta) \right. \\
 &\quad \left. \tau \{ 2\sigma(\tau) \cdot \chi(\tau) + 2\tau^2 - \rho k^2 \} Q - i(\alpha - \beta) k^2 \sigma(\tau) R \right] d\tau \\
 &\quad \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) e^{i\tau(x-\eta) + i l \eta + i a \tau} d\eta,
 \end{aligned} \right\} (39)$$

なる楕圓軌道を示す。

ラブ波の場合も同様に出来る筈であるが、大して興味も無いから省略する。

第 2 圖



上  $x=0$  に於ける軌道  $\left(\frac{L}{H}=60\right)$ , 下は地形曲線

I は普通のレーレー波 II は變形を受けたレーレー波 III は擾亂

數値計算の一例として一番簡単なレーレー波傳播の場合を行つた。

地形曲線を

$$z = f(x) = \left. \begin{cases} \frac{-H}{m-n} \{m e^{-nx} - n e^{-mx}\}, & (x > 0) \\ \frac{-H}{m-n} \{m e^{nx} - n e^{mx}\}, & (x < 0) \end{cases} \right\} \quad (m > n) \quad (40)$$

と置くと、 $H$  が山の高さになる。ポアソン比を  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{m}{\sqrt{\rho k}} = 2$ ,  $\frac{n}{\sqrt{\rho k}} = 1$ , 普通のレーレー波の上下動の最大半振幅を  $W$  とすると、山の頂上 ( $x=0$ ) に於ける擾亂の變位は、

$$\left. \begin{aligned} u &= -17.9 \times \frac{H}{[S \text{波の波長}]} W \sin(at + 18^\circ 06'), \\ w &= +5.49 \times \frac{H}{[S \text{波の波長}]} W \sin(at + 42^\circ 45') \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (41)$$

となる。但し原のレーレー波は (33) に實數の常數を乗じたものであるから、夫と較べると (41) の變位は分子の廻轉方向は一致してゐるが軸が傾いた橢圓軌道を描く事が分る。(第 2 圖)

尚を (41) を導く計算の大略を述べると次の通りである。(39) に於て、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) e^{i\tau(x-\eta)+i\eta+iat} d\eta &= 2 e^{i(\tau x+at)} \int_0^{\infty} f(\eta) \cos(l-\tau)\eta d\eta \\ &= -2mn(m+n)H \cdot \frac{e^{i(\tau x+at)}}{[(l-\tau)^2+m^2][(l-\tau)^2+n^2]} \end{aligned}$$

之を (39) に代入し

$$\xi = \frac{\tau}{\sqrt{\rho k}}, \quad m_1 = \frac{m}{\sqrt{\rho k}}, \quad n_1 = \frac{n}{\sqrt{\rho k}}, \quad l_1 = \frac{l}{\sqrt{\rho k}} \quad \dots\dots\dots (42)$$

と置くと容易に、

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{2m_1n_1(m_1+n_1)H e^{iat}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\xi\sqrt{\rho k}x}}{\Delta(\xi)[(\xi-l_1)^2+m_1^2][(\xi-l_1)^2+n_1^2]} \cdot \\ &\quad \left[ P \cdot \xi \cdot \chi + \left( \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{\rho k}} Q - l_1 P \right) \cdot \chi + i(m_1-n_1) R \xi \{2\sigma\chi + 2\xi^2 - 1\} \right] d\xi, \\ w &= -\frac{2m_1n_1(m_1+n_1)H e^{iat}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\xi\sqrt{\rho k}x}}{\Delta(\xi)[(\xi-l_1)^2+m_1^2][(\xi-l_1)^2+n_1^2]} \cdot \\ &\quad \left[ P \xi^2 \{2\sigma\chi + 2\xi^2 - 1\} + \left( \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{\rho k}} Q - l_1 P \right) \xi \{2\sigma\chi + 2\xi^2 - 1\} \right] d\xi \end{aligned} \right\} (43)$$

$$-i(m_1 - n_1) \frac{P}{\rho} \sigma \left] d\xi \right.$$

但し

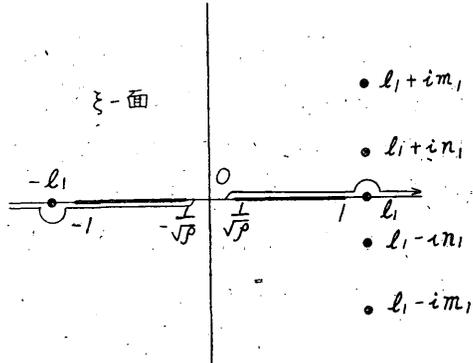
$$\left. \begin{aligned} \sigma(\xi) &= i\sqrt{\xi^2 - \frac{1}{\rho}}, & \chi(\xi) &= i\sqrt{\xi^2 - 1}, \\ \Delta(\xi) &= (2\xi^2 - 1)^2 + 4\xi^2\sigma(\xi)\chi(\xi), & \Delta(l_1) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

被積分函数の特異點は次の 10 個ある。

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{單極} & \pm l_1, \quad l_1 \pm im_1, \quad l_1 \pm in_1, \\ \text{分枝點} & \pm 1, \quad \pm \frac{1}{\sqrt{\rho}}, \end{array} \right.$$

積分路は之等の特異點に對して第 3 圖の様な關係位置にとればよい。但し分枝點を結ぶ截線 (cut) は  $+1, +\frac{1}{\sqrt{\rho}}; -1, -\frac{1}{\sqrt{\rho}}$  の 2 本とする。次に  $\xi = l_1$  附近で  $\xi \pm 1, \xi \pm \frac{1}{\sqrt{\rho}}$  の偏角が盡く 0 と約束し、積分路を上半面の無限遠方に持ち上げることに依り、 $x=0$  に於ては、

第 3 圖



$$\left. \begin{aligned} u &= AI_1 + BI_2 + CI_3 + 2\pi i [\text{Res}(-l_1) + \text{Res}(l_1 + im_1) + \text{Res}(l_1 + in_1)], \\ w &= AI_4 + BI_5 - \frac{C}{\rho} I_6 + 2\pi i [\text{Res}(-l_1) + \text{Res}(l_1 + im_1) + \text{Res}(l_1 + in_1)] \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

茲に  $\text{Res}(-l_1)$  等は (43) の右邊の  $\xi = -l_1$  等に於ける留數の意味で之は簡單に求まる。又  $I_1$  等は次の様な積分を截線  $-1, -\frac{1}{\sqrt{\rho}}$  の周圍を正向に廻つて採つたもので、少しく計算を進めると (46) 右邊の様になる。但し  $A, B, C$  は常數で (48) の様なものを示す。

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \int \frac{-\xi \chi(\xi)}{\Delta(\xi)[(\xi + l_1)^2 + m_1^2][(\xi + l_1)^2 + n_1^2]} d\xi = 2 \int_{\frac{1}{\sqrt{\rho}}}^1 \xi (2\xi^2 - 1)^2 \varphi(\xi) d\xi, \\ I_2 &= \int \frac{\chi(\xi)}{\Delta(\xi)[(\xi + l_1)^2 + m_1^2][(\xi + l_1)^2 + n_1^2]} d\xi = -2 \int_{\frac{1}{\sqrt{\rho}}}^1 (2\xi^2 - 1)^2 \varphi(\xi) d\xi, \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \int \frac{-\xi [2\sigma\chi + 2\xi^2 - 1]}{\Delta(\xi)[(\xi+l_1)^2 + m_1^2][(\xi+l_1)^2 + n_1^2]} d\xi \\
 &= -4i \int_{\frac{1}{\sqrt{\rho}}}^1 \xi (2\xi^2 - 1) \cdot \sqrt{\xi^2 - \frac{1}{\rho}} \varphi(\xi) d\xi, \\
 I_4 &= \int \frac{\xi^2 [2\sigma\chi + 2\xi^2 - 1]}{\Delta(\xi)[(\xi+l_1)^2 + m_1^2][(\xi+l_1)^2 + n_1^2]} d\xi \\
 &\doteq 4i \int_{\frac{1}{\sqrt{\rho}}}^1 \xi^2 (2\xi^2 - 1) \cdot \sqrt{\xi^2 - \frac{1}{\rho}} \varphi(\xi) d\xi, \\
 I_5 &= I_3 \\
 I_6 &= \int \frac{\sigma(\xi)}{\Delta(\xi)[(\xi+l_1)^2 + m_1^2][(\xi+l_1)^2 + n_1^2]} d\xi \\
 &= -8 \int_{\frac{1}{\sqrt{\rho}}}^1 \xi^2 \left( \xi^2 - \frac{1}{\rho} \right) \cdot \varphi(\xi) d\xi,
 \end{aligned} \tag{46}$$

$$\varphi(\xi) = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{F(\xi)[(\xi+l_1)^2 + m_1^2][(\xi+l_1)^2 + n_1^2]}, \quad F(\xi) = \Delta(\xi) \cdot \overline{\Delta(\xi)}. \tag{47}$$

$$\begin{aligned}
 A &= -\frac{2m_1n_1(m_1+n_1)He^{i\alpha t_0}}{\pi} \cdot P, \\
 B &= \quad \quad \quad \cdot \left\{ \frac{(\alpha-\beta)Q}{\sqrt{\rho}k} - l_1P \right\} \\
 C &= \quad \quad \quad \cdot i(m_1-n_1)R,
 \end{aligned} \tag{48}$$

$I_1, I_2$  等は数値積分に依つて求める。又  $P, Q, R$  は (36) にある。之等に上掲の通り  $m_1=2, n_1=1, l_1=1.08766$  (ポアソン比  $1/4$ ) を入れると次の如き数値になる。

$$\begin{aligned}
 I_1 &= 0.007820, & I_2 &= -0.011124, & I_3 &= -0.001859i, \\
 I_4 &= -0.003906i, & I_5 &= I_3, & \frac{1}{\rho} I_6 &= -0.002954
 \end{aligned}$$

又  $u$  に對して

$$\begin{aligned}
 \text{Res}(-l_1) &= -0.001883Ai + 0.001731B - 0.0025415C, \\
 \text{Res}(l_1 + im_1) &= \{0.069859 + 0.008588i\}A \\
 &\quad + \{0.011156 - 0.023718i\}B - \{0.007570 + 0.002489i\}C, \\
 \text{Res}(l_1 + in_1) &= -\{0.002106 - 0.009616i\}A \\
 &\quad + \{0.003356 + 0.005756i\}B + \{0.001319 - 0.0016485i\}C
 \end{aligned}$$

$w$  に対して

$$\text{Res}(-l_1) = 0.002764A - 0.0025415B + 0.0012435Ci$$

$$\text{Res}(l_1 + im_1) = -\{0.017116 + 0.017852i\}A \\ -\{0.007570 + 0.002489i\}B + \{0.008188 + 0.007775i\}C,$$

$$\text{Res}(l_1 + im_1) = \{0.003083 - 0.000474i\}A \\ + \{0.001319 - 0.0016485i\}B - \{0.0013415 + 0.001682i\}C$$

故に

$$\left. \begin{aligned} u &= \{-0.0947 + 0.4257i\}A \\ &\quad + \{0.09085 + 0.0912i\}B + \{0.0260 - 0.0571i\}C, \\ w &= \{0.11515 - 0.0747i\}A \\ &\quad + \{0.0260 - 0.1318i\}B + \{0.04905 - 0.0430i\}C \end{aligned} \right\} \dots (49)$$

但し  $P = -1.6104(\rho k^2)^2$      $Q = -3.37465(\rho k^2)^2$      $R = 0.9330(\rho k^2)^2$

$$\therefore \begin{cases} A = \frac{2m_1 n_1 (m_1 + n_1) H e^{i a t}}{\pi} (\rho k^2) \times 1.6104 \\ B = \quad \quad \quad \quad \quad \quad \times (-0.084545) \\ C = \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \times (-0.9330i) \end{cases}$$

之は原のレーレー波が (36) の形とした時のもので、原のレーレー波を (36) の實數部分と考へ、表面に於ける上下動の半振幅の大きさが  $W$  である場合には (49) の實數部分を探り、且つ

$$\frac{W}{|\alpha\{(l^2 + \beta^2) - l^2\}|} = \frac{W}{0.9218(\sqrt{\rho} k)^3}$$

を乗じて、(41) に到達する。

**7. 結 言** 地形の不規則性が地動に與へる影響を調べる第一段として極めて緩かな地勢の場合を取扱ひ、その一般解を地動が P 波、SV 波、SH 波及びレーレー波の各場合に就いて導いた、之等は種々の波長の波狀地形に起因する擾亂の組合せとして表はされるもので、個々の波狀地形に應ずる擾亂としては地中に進入するもの表面に集中するもの又共鳴を起すもの等が現はれ得る。之は入射波及び地形の波長と入射角との相互關係で規定されるものである。但し地形が相當緩やかと言ふ事は多くの場合可成り實情と一致してゐる事柄である。此種の問題では茲に取扱つた場合の他に三次元に擴張すること、自由表面

の問題とする代りに異種の弾性體の境界面に凹凸がある場合の散亂<sup>(1)</sup>、地形の代りに物性の水平變化がある場合等があり、又表面波に對しての擾亂波による勢力の逸散問題も甚だ重要な様に思はれるが之等は次の機會に譲る。

尙前節に取扱つた例題中 (43) の積分に於ける如く、 $\Delta(\xi)$  を分母に持つ函数の  $\pm \infty$  間の積分は表面に力を加へる半無限弾性體の問題等で屢々現はれるもので、此際單極の周圍の積分は留數の定理で容易く求められるが、分枝點の周圍の積分は一般に難物で、殊に今の場合の如く通例使はれる漸近展開法等が效かない場合には數値積分に依らねばならない。この方法は漸近展開で解かれてゐる問題にも適用して、例へば淺發地震の震央附近の土地振動の模様を調べる事に用ひる可能性がありさうに思へるから、截線附近の  $\Delta(\tau)$  の表を附録として掲げた。

この小論の大部分は筆者が水戸測候所在勤中當時の同所長高谷靜馬氏の御鞭撻と同所員諸氏の御援助の下に計算することが出来たもので茲に深甚の謝意を捧げ度い。其後種々御世話頂いて居る本多博士他本臺地震課の諸氏、有益な御教示を戴いた畏兄廣野理學士に厚く御禮申上げる。

(昭和 15 年 11 月於中央氣象臺)

附録  $\Delta(\tau)$  の表。 ( $\lambda = \mu$  の場合)

$$\Delta(\tau) = (2\tau^2 - \rho k^2)^2 - 4\tau^2 \sqrt{(\tau^2 - k^2)(\tau^2 - \rho k^2)}$$

但し  $\frac{2\pi}{k}$ ,  $\frac{9\pi}{\sqrt{\rho}k}$  は夫々 P 波, S 波の速度,  $\rho = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}$ .  $\Delta(\tau) = 0$  の正根を  $l$  すると  $\frac{2\pi}{l}$  とはレ-レ-波の速度。

$\tau$  を一般に複素數とする時  $\tau$ -面の模様を第 4 圖の如く書き  $\tau = l$  に於て、

$$\arg(\tau \pm k) = 0, \quad \arg(\tau \pm \sqrt{\rho}k) = 0$$

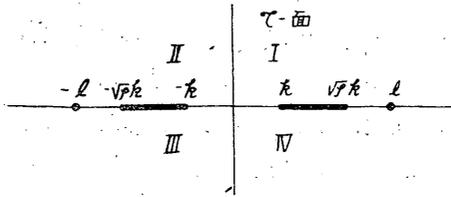
と約束し、第 I 象限と第 III 象限、第 II 象限と第 VI 象限は夫々原點に對し對稱となる。表中虚部の複號は第 I 象限と第 III 象限では (-), 第 II 象限と第 IV 象限では (+) を採る。

$$\Delta(\tau) \cdot \overline{\Delta(\tau)} = F(\tau)$$

も亦必要であるから之も掲げた。

(1) 音波に關する同種の問題は Lord Rayleigh, loc. cit.

第 4 圖



$\tau \times \sqrt{p}k$	$\Delta(\tau) \times \rho^{2ik}$	$F(\tau) \times \rho^{4ik}$
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	+ 0.111 111 ± i 0. —	0.012 34568
0.58	0.107 060 0.060 702	0.015 1467
0.60	0.078 400 0.188 121	0.041 5360
0.62	0.053 4535 0.272 6225	0.077 1797
0.64	0.032 689 0.347 665	0.121 9381
0.66	0.016 5895 0.418 609	0.175 5083
0.68	0.005 65505 0.487 208	0.237 4080
0.70	0.000 400 0.554 025	0.306 944
0.72	0.001 35425 0.619 0595	0.383 168
0.74	0.009 06305 0.681 965	0.465 163
0.76	0.024 087 0.742 132	0.551 349
0.78	0.047 002 0.798 7115	0.640 139
0.80	0.078 400 0.850 598	0.729 664
0.82	0.118 887 0.896 4015	0.817 676
0.84	0.169 0855 0.934 360	0.901 611
0.86	0.229 633 0.962 239	0.978 635
0.88	0.301 1815 0.977 119	1.045 461
0.90	0.384 400 1.007 455	1.098 496
0.92	0.479 972 0.950 425	1.133 685
0.94	0.588 596 0.894 4495	1.146 571
0.96	0.710 986 0.791 676	1.132 245
0.98	0.847 873 0.605 3625	1.085 355
1.00	1. 0. —	1. —